

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXXXIII

1936 (XIV)

SERIE SESTA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXIII



ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGrafo DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1936 (XIV)

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 5 gennaio 1936 Anno (XIV)

Presidenza del prof. F. MILLOSEVICH.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Meccanica (Idrodinamica). — *Effetti di zavorra nello spazio.*
Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. U. CISOTTI e di A. MASOTTI.

Il § 1 di questa Nota, di U. Cisotti, contiene la estensione ad un solido spaziale delle nozioni di « risultante e momento degli effetti di zavorra », già dallo stesso autore introdotte per ostacoli piani ⁽²⁾; e dà i risultati della loro applicazione ad un solido sferico ⁽³⁾.

Il § 2, di A. Masotti, contiene i risultati ottenuti da questo autore relativi alle espressioni che hanno la risultante e il momento degli effetti di zavorra per un solido spaziale di forma qualunque ⁽⁴⁾.

§ 1.

1. Diciamo τ la regione infinita dello spazio che si estende esternamente alla superficie chiusa σ , contorno generalmente regolare di un solido fisso; τ sia occupata da un liquido perfetto omogeneo.

(1) Presentata nella seduta del 5 gennaio 1936.

(2) U. CISOTTI, *Un criterio di valutazione delle azioni dinamiche sopra un ostacolo circolare munito di una sorgente e immerso in una corrente traslocircolatoria* (questi « Rendiconti », vol. XXII, ser. 6^a, 2° sem. 1935, pp. 275-279); *Calcolo degli « effetti di zavorra » relativi ad una lamina rettilinea* (ibid., pp. 279-283); *Sul calcolo degli effetti di zavorra* (in corso di pubblicazione nella raccolta di scritti matematici in onore di Luigi Berzolari).

(3) Questo paragrafo riassume una conferenza tenuta il 13 dicembre 1935 al Seminario Matematico e Fisico di Milano, che sarà pubblicata nel volume X dei suoi « Rendiconti ». Ivi saranno giustificati i risultati che qui sono soltanto annunciati.

(4) In uno scritto più esteso, che vedrà la luce altrove, saranno date le relative dimostrazioni.

Immaginiamo, in un primo tempo, che il liquido sia animato dal moto permanente e irrotazionale che assume all'infinito il carattere della corrente uniforme, con velocità \mathbf{V} , di modulo V e versore \mathbf{i} . Il potenziale cinetico di questo moto è:

$$(1) \quad \varphi_c(P) = V(P - O) \times \mathbf{i} + \varphi_1(P),$$

essendo P un generico punto di τ , O un punto fisso qualunque, e designando $\varphi_1(P)$ una funzione armonica e regolare in τ , anche all'infinito, e tale che sopra σ la sua derivata secondo la normale *esterna* a σ , di versore \mathbf{n} , eguagli $-V\mathbf{n} \times \mathbf{i}$. La determinazione di $\varphi_1(P)$ implica la risoluzione di un problema di Neumann in τ . La velocità competente a questo moto è:

$$(2) \quad \mathbf{v}_c = \text{grad } \varphi_c;$$

il suo modulo si mantiene ovunque limitato, anche sopra σ .

Immaginiamo, in un secondo tempo, che il liquido sia animato dal moto permanente e irrotazionale che in esso provoca una sorgente, di portata q , aperta in un punto regolare S di σ . Il potenziale cinetico di questo moto è:

$$(3) \quad \varphi_s(P) = -\frac{q}{2\pi|P-S|} + \varphi_2(P),$$

designando $\varphi_2(P)$ una funzione armonica e regolare in τ , anche all'infinito, tale che sopra σ la sua derivata normale eguagli

$$-\frac{q}{2\pi|P-S|^2} \mathbf{n} \times \text{vers}(P-S);$$

$\varphi_s(P)$ diviene infinita quando $P \rightarrow S$ dell'ordine di $\frac{1}{|P-S|}$. La velocità competente a questo moto è:

$$(4) \quad \mathbf{v}_s = \text{grad } \varphi_s;$$

il suo modulo si mantiene limitato ovunque, fuorchè in S , dove diviene infinito dell'ordine di $\frac{1}{|P-S|^2}$; diviene nullo all'infinito, e quindi il moto è locale.

Supponiamo adesso che il liquido sia animato dal moto composto dei due precedentemente descritti. Sarà:

$$(5) \quad \varphi = \varphi_c + \varphi_s$$

il potenziale cinetico del moto composto, e:

$$(6) \quad \mathbf{v} = \text{grad } \varphi = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_s$$

la velocità. Per quanto si disse, φ e v divengono infiniti quando $P \rightarrow S$, degli ordini di $\frac{1}{|P-S|}$ e $\frac{1}{|P-S|^2}$ rispettivamente.

2. Ricordiamo ora che alla pressione dinamica compete nei moti permanenti la espressione $-\frac{1}{2}\rho v^2$, essendo ρ la densità del liquido; e che alla risultante e al momento delle azioni dinamiche esercitate dal liquido sopra una superficie σ competono le espressioni:

$$(7) \quad \mathbf{R} = -\frac{1}{2}\rho \int_{\sigma} v^2 \mathbf{n} d\sigma, \quad \mathbf{M} = -\frac{1}{2}\rho \int_{\sigma} v^2 (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{n} d\sigma$$

essendo ora \mathbf{n} il versore della normale interna a σ , e \mathbf{O} un punto fisso qualunque, rispetto al quale è valutato il momento.

Vorremmo applicare le (7) per valutare le azioni dinamiche sulla superficie σ del solido dianzi considerato, essendo il moto del liquido quello rappresentato dalle (5) e (6): ma, essendo in tal caso

$$(8) \quad v^2 = v_c^2 + v_s^2 + 2\mathbf{v}_c \times \mathbf{v}_s,$$

si vede, per quanto si disse, che le funzioni integrande dei secondi membri delle (7) divengono infinite nel punto S del campo di integrazione, dell'ordine di $\frac{1}{|P-S|^4}$, e quindi gli integrali non hanno significato analitico.

Però, la differenza

$$(9) \quad v^2 - v_s^2 = v_c^2 + 2\mathbf{v}_c \times \mathbf{v}_s$$

diviene infinita nel punto S dell'ordine di $\frac{1}{|P-S|^2}$, e quindi possono avere significato analitico gli integrali che si ottengono da quelli che figurano nelle (7) scrivendo in essi $v^2 - v_s^2$, cioè $v_c^2 + 2\mathbf{v}_c \times \mathbf{v}_s$, al posto di v^2 .

Con ciò, i secondi membri delle (7) assumono l'aspetto seguente:

$$(10) \quad \begin{cases} -\frac{1}{2}\rho \int_{\sigma} v_c^2 \mathbf{n} d\sigma - \rho \int_{\sigma} \mathbf{v}_c \times \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} d\sigma, \\ -\frac{1}{2}\rho \int_{\sigma} v_c^2 (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{n} d\sigma - \rho \int_{\sigma} \mathbf{v}_c \times \mathbf{v}_s \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{n} d\sigma, \end{cases}$$

e si possono interpretare come la risultante e il momento delle differenze fra le azioni dinamiche subite da σ nel caso in esame e quelle che si hanno quando v'è solo la sorgente: sono, si può dire, gli aumenti delle azioni dinamiche provocati dalla corrente traslatoria. Li designeremo con \mathbf{R}' e \mathbf{M}' .

Si osservi che \mathbf{R}' e \mathbf{M}' constano, ciascuno, di due termini. Dei primi termini è chiaro il significato: essi sono la risultante e il momento delle azioni dinamiche che la corrente traslatoria sola eserciterebbe sopra σ , e il loro studio fu già fatto ⁽¹⁾. La presenza dei secondi termini è dovuta alla attività della sorgente. Posto quindi:

$$(11) \quad \boxed{\mathbf{R}^* = -\rho \int_{\sigma} \mathbf{v}_c \times \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad , \quad \mathbf{M}^* = -\rho \int_{\sigma} \mathbf{v}_c \times \mathbf{v}_s \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{n} d\sigma}$$

chiameremo \mathbf{R}^* e \mathbf{M}^* « risultante e momento degli effetti di zavorra », estendendo così al caso spaziale, e precisando, le denominazioni già adottate per il corrispondente caso piano ⁽²⁾.

3. A titolo di esempio considereremo il caso particolare notevole in cui la superficie σ è una sfera.

Designati con \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 i due componenti della velocità asintotica della corrente, \mathbf{V} , il primo parallelo e il secondo perpendicolare al diametro passante per la sorgente, si ha per la risultante degli effetti di zavorra e per il loro momento rispetto al centro della sfera:

$$(12) \quad \mathbf{R}^* = \rho q \left(-\mathbf{V}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{V}_2 \right) \quad , \quad \mathbf{M}^* = 0.$$

§ 2.

4. Di \mathbf{R}^* e \mathbf{M}^* , risultante e momento degli effetti di zavorra, definiti dalle (11), si possono dare espressioni che sono valide per un solido di forma qualunque. Esse sono le seguenti:

a) per la risultante degli effetti di zavorra:

$$(13) \quad \boxed{\mathbf{R}^* = \rho q [\mathbf{v}_c(S) - \mathbf{V}] \quad ,}$$

ossia:

$$(14) \quad \mathbf{R}^* = \rho q \mathbf{v}_t(S),$$

essendo $\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_c - \mathbf{V}$ la velocità che provocherebbe in ogni punto di τ un atto di moto traslatorio, con velocità $-\mathbf{V}$, del solido;

(1) U. CISOTTI, *Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito*. (« Atti del R. Istituto Veneto », to. LXIX-2, 1909-1910, pp. 427-445).

(2) U. CISOTTI, *l. c.* primi.

b) per il momento degli effetti di zavorra rispetto ad S:

$$(15) \quad \boxed{\mathbf{M}^* = \mathbf{V} \wedge \mathbf{Q}_s},$$

essendo

$$\mathbf{Q}_s = \rho \int_{\tau} \mathbf{v}_s d\tau$$

la quantità di moto del liquido che è dovuta alla sola sorgente.

Per un solido di forma sferica queste formule danno i risultati enunciati nel n. 3.

5. Le formule (13) e (15) danno luogo ad alcune immediate conseguenze.

Da esse discende subito che il sistema degli effetti di zavorra non ha, in generale, invariante scalare nullo, sicchè esso non ammette, in generale, una riduzione maggiore di quella che porta ad un vettore e ad una coppia.

Ma è noto che vi sono sopra σ due punti dove \mathbf{v}_e si annulla, e sono quelli di arrivo e di distacco del filone della corrente traslatoria. Se questi sono punti regolari di σ , e la sorgente è aperta in corrispondenza di uno di essi, si ha:

$$(16) \quad \mathbf{R} = -\rho q \mathbf{V},$$

e l'invariante scalare del sistema degli effetti di zavorra è nullo, sicchè il sistema stesso è riducibile ad un solo vettore.

Se σ è una superficie di rotazione, e la corrente traslatoria corre parallelamente al suo asse, i due punti predetti sono quelli nei quali l'asse stesso incontra la superficie, e sono punti regolari se in essi i meridiani incontrano normalmente l'asse. Collocata la sorgente in uno di questi punti, il sistema degli effetti di zavorra equivale alla sua risultante, data dalla (16), applicata in un punto dell'asse; ed è notevole che quella risultante non dipende affatto dalla forma del meridiano. Analogo risultato sussiste se l'asse è un asse di simmetria di ordine qualunque per la superficie σ (nel senso che a questa locuzione danno i cristallografi).

6. Le formule (13) e (15), insieme a quelle classiche relative alla risultante e al momento delle azioni dinamiche dovute ad una corrente traslatoria, conducono a notevoli espressioni di \mathbf{R}' e \mathbf{M}' , risultante e momento delle differenze fra le azioni dinamiche subite da σ nel caso in esame e quelle che si hanno quando v'è solo la sorgente, definite nel n. 2 ed espresse dalle (10).

Ricordiamo che la risultante delle azioni dinamiche dovute alla corrente traslatoria è nulla, e che il momento è $\mathbf{V} \wedge \mathbf{Q}_t$, essendo

$$\mathbf{Q}_t = \rho \int_{\tau} \mathbf{v}_t d\tau$$

la quantità di moto che provocherebbe in tutto il liquido un atto di moto traslatorio, con velocità $-\mathbf{V}$, del solido⁽¹⁾. Si deduce quindi che

$$(17) \quad \mathbf{R}' = \rho q \mathbf{v}_t(S) \quad , \quad \mathbf{M}' = \mathbf{V} \wedge (\mathbf{Q}_t + \mathbf{Q}_s),$$

nella seconda delle quali figura la quantità di moto che possederebbe tutto il liquido se il solido, munito della sorgente, traslasse in esso con velocità $-\mathbf{V}$.

7. A titolo di complemento ci permettiamo di segnalare una circostanza notevole.

Se la sorgente non fosse addossata al solido, ma fosse staccata da esso, si potrebbero calcolare completamente le azioni dinamiche subite dall'ostacolo. Supposto permanente il fenomeno, sarebbero applicabili le (7), e queste darebbero, in virtù della (8), le azioni dinamiche scomposte in tre parti: azioni dinamiche dovute alla corrente traslatoria sola, azioni dinamiche dovute alla sorgente sola, azioni dinamiche dovute alla corrente traslatoria e alla sorgente insieme. Queste ultime sono rappresentate dai secondi membri delle (11). Orbene, si constata che per esse sussistono ancora le espressioni date dai secondi membri delle (13) e (15)⁽²⁾.

(1) U. CISOTTI, loc. cit. secondo.

(2) Ritornando con maggiore ampiezza anche su questo caso faremo i doverosi riferimenti ai precedenti lavori in proposito del Lagally.

Meccanica. — *Condizioni sulla fronte d'onda e onde elettromagnetiche armoniche.* Nota ⁽¹⁾ del Socio G. A. MAGGI e di B. FINZI.

Allorchè un fenomeno si propaga in un mezzo imperturbato, esiste in ogni istante una fronte d'onda, sulla quale debbono verificarsi condizioni cinematiche e dinamiche molto restrittive; condizioni dalle quali si prescinde, invece, quando si supponga tutto il mezzo perturbato, e stabilizzate le onde che in esso si propagano.

Ci proponiamo in questa Nota di mostrare quali limitazioni impongano le condizioni sulla fronte d'onda alle onde generali, soluzioni dell'equazione di d'Alembert, e alle onde elettromagnetiche, con particolare riguardo alle soluzioni armoniche delle equazioni di Maxwell.

Nel primo caso dimostreremo che, data una famiglia di soluzioni, ognuna delle quali corrisponde alla particolare scelta dell'onda base, tutte le soluzioni della famiglia soddisfanno alle condizioni imposte, soltanto se le onde sono piane; una particolare soluzione può invece soddisfare alle condizioni considerate, pur mantenendo i caratteri della sua generalità. Nel secondo caso dimostreremo che, data una famiglia di soluzioni armoniche, ognuna delle quali corrisponde alla scelta dell'onda base, tutte le soluzioni della famiglia soddisfanno a tutte le condizioni imposte, soltanto se le onde sono piane; che se poi si considera una particolare soluzione, essa può soddisfare alle condizioni considerate, sia se le onde sono piane, sia se le onde sono sferiche; ma in questo ultimo caso, la soluzione non è definita in tutto lo spazio esterno alla sfera di base.

1. — *Condizioni sulla fronte d'onda.* — Un fenomeno si propaghi in un mezzo imperturbato: esisterà in ogni istante una fronte d'onda, separante la regione perturbata dello spazio da quella imperturbata. Sia φ una delle quantità atte ad individuare il fenomeno: nella regione perturbata riterremo φ funzione $\varphi(P, t)$ del posto e del tempo, in generale non sempre e ovunque nulla, mentre nella regione imperturbata riterremo φ nulla.

Alla fronte d'onda, costituita in ogni istante da una superficie di discontinuità σ , corrisponde nello spazio quadridimensionale cinematico una ipersuperficie Σ , che è varietà caratteristica del sistema differenziale S relativo al fenomeno ed al quale φ soddisfa.

(1) Presentata nella seduta del 5 gennaio 1936.

Sia

$$(1) \quad \tau(P, t) = k = \text{cost.}$$

l'equazione di questa varietà caratteristica. Per $\tau = k$, le derivate della funzione φ debbono soddisfare ad alcune condizioni cinematiche di compatibilità.

Se il sistema S è differenziale del primo ordine, si può imporre il raccordo di φ attraverso a Σ , supponendo cioè $\varphi = 0$ per $\tau = k$: le derivate prime, in generale discontinue attraverso a Σ , debbono allora soddisfare alle seguenti condizioni ⁽¹⁾:

$$(2) \quad \text{per } \tau = k: \quad \varphi_i = \lambda \tau_i \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

nelle quali λ è un fattore di proporzionalità, l'indice zero si riferisce alla derivazione parziale rispetto al tempo e gli indici 1, 2, 3 alla derivazione parziale rispetto alle coordinate spaziali.

Le condizioni (2) sono appunto le condizioni cinematiche di compatibilità. Esse *non* esigono però che, per $\tau = k$, sia, come è stato supposto, $\varphi = 0$; basta soltanto che, per $\tau = k$, φ sia costante ⁽²⁾.

Analogamente, se il sistema S è differenziale del secondo ordine, si può imporre il raccordo attraverso a Σ delle derivate prime di φ , e quindi ⁽³⁾:

$$(2') \quad \text{per } \tau = k: \quad \varphi_{ij} = \lambda \tau_i \tau_j \quad (i, j = 0, 1, 2, 3).$$

Anche le condizioni cinematiche di compatibilità (2') non esigono che, per $\tau = k$, sia $\varphi_i = 0$; basta soltanto che, per $\tau = k$, φ_i sia costante.

Tenendo poi conto del sistema S , si otterranno, dalle condizioni di compatibilità cinematiche, le condizioni di compatibilità dinamiche, le quali, oltre a confermare che la varietà Σ è varietà caratteristica, forniranno, insieme alle (2), o (2'), tutte le condizioni alle quali debbono soddisfare le derivate di φ sulla fronte d'onda.

2. — *Onde generali.* — Applichiamo le considerazioni precedenti ai fenomeni retti dall'equazione di d'Alembert, propagantisi in un mezzo omogeneo isotropo. La generica funzione $\varphi(P, t)$ sarà dunque soluzione della seguente unica ben nota equazione differenziale del secondo ordine:

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 \varphi,$$

nella quale a denota una costante avente le dimensioni di una velocità.

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, Bologna, 1931, § 7.

(2) A. E. H. LOVE, «Proc. Lond. Math. Soc.», vol I, ser. 2^a, 1904, p. 37.

(3) Cfr. T. LEVI-CIVITA, loc. cit.

Le condizioni dinamiche di compatibilità si ottengono ponendo (2') in (3). Ne risulta così semplicemente che le varietà caratteristiche di equazione (1) soddisfanno all'equazione differenziale di primo ordine seguente:

$$(4) \quad \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right)^2 = a^2 (\text{grad } \tau)^2.$$

La soluzione di (4) può esprimersi così:

$$(5) \quad \tau = \frac{n(P)}{a} - t, \quad \text{con} \quad (\text{grad } n)^2 = 1.$$

Le superficie d'onda σ , soluzioni di (4), risultano dunque superficie parallele, avanzanti normalmente con velocità a , ed n rappresenta l'intercetta normale fra la superficie d'onda generica passante per P ed una superficie d'onda base, che, *a priori*, è arbitraria, in dipendenza appunto dell'arbitrarietà della costante k che compare nella (1).

Nel caso in esame dunque, se le superficie d'onda sono parallele, basterà che su di esse siano soddisfatte, nell'istante in cui fungono da fronte d'onda, le condizioni cinematiche di compatibilità, in virtù delle quali φ e φ_i ($i = 0, 1, 2, 3$) si mantengono costanti.

Consideriamo ora le soluzioni dell'equazione di d'Alembert della forma

$$(6) \quad \varphi = f(P) F(\tau),$$

dove τ è dato da (5). Esse comprendono le onde più comunemente note, quali le onde piane, sferiche, ecc. Diremo le soluzioni (6), o le somme di soluzioni (6), « onde generali » ⁽¹⁾.

Quali limitazioni impongono ad esse le condizioni cinematiche sulla fronte d'onda?

Osserviamo che

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -f(P) F'(\tau), \quad \varphi_j = f_j(P) F(\tau) + \frac{1}{a} f(P) F'(\tau) n_j$$

($j = 1, 2, 3$).

Ne segue che perchè le condizioni cinematiche siano soddisfatte, bisogna che sia soddisfatta almeno una delle seguenti condizioni: le onde sono piane, oppure, qualunque ne sia la forma, è

$$(7) \quad F(k) = 0, \quad F'(k) = 0.$$

(1) G. A. MAGGI, questi « Rendiconti », ser. 5^a, vol. XXIX, 1920; *Selecta*. Milano, 1932, p. 232.

Osserviamo che l'espressione (6), anche quando si prefissino le funzioni f ed F , rappresenta una famiglia di soluzioni: ogni soluzione corrisponde ad un particolare valore della costante k che compare in (1). Le soluzioni che rispettano le condizioni cinematiche sulla fronte d'onda, qualunque sia k , sono soltanto quelle corrispondenti ad onde piane. Le soluzioni che rispettano le condizioni cinematiche sulla fronte d'onda, per particolari ed assegnati valori di k , sono quelle per cui sussistono le (7)⁽¹⁾.

Si rilevi che, anche quando si voglia soddisfare a tutte le condizioni sulla fronte d'onda (come anche quando da tali condizioni si prescinda), non è necessario, come suppone il Somigliana in una Nota recentemente riprodotta nel volume « Memorie scelte »⁽²⁾, supporre le onde (6) del tipo: $\varphi = f(n) F(\tau)$ ⁽³⁾.

3. - *Onde elettromagnetiche.* — Consideriamo ora le onde elettromagnetiche in un mezzo omogeneo, isotropo, coibente. Le equazioni di Maxwell, con il consueto significato dei simboli, si scrivono così:

$$(8) \quad \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathbf{H} \quad , \quad \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E} .$$

Esse costituiscono un sistema di sei equazioni differenziali del primo ordine nelle sei componenti dei vettori elettromagnetici \mathbf{E} ed \mathbf{H} .

Le condizioni cinematiche di compatibilità (2), valide per ogni componente dei vettori elettromagnetici, si possono scrivere così:

$$(6) \quad \text{per } \tau = k : \quad \mathbf{E}_i = \mathbf{e}\tau_i \quad , \quad \mathbf{H}_i = \mathbf{h}\tau_i \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

essendo \mathbf{e} ed \mathbf{h} vettori *a priori* arbitrari. Esse affermano che i vettori \mathbf{E} ed \mathbf{H} sono costanti per $\tau = k$.

(1) Ad es., dette x, y, z le coordinate cartesiane di P , r la grandezza del raggio vettore descritto da un polo O , nel quale degenera la superficie d'onda base, al punto P , sono soluzioni di (3), rispettanti le condizioni sulla fronte d'onda, le seguenti:

$$\varphi = AF \left(\frac{x}{a} - t \right) \quad (\text{onde piane}),$$

$$\varphi = \frac{1}{r} \operatorname{sen}^2 \alpha \left(\frac{r}{a} - t \right) \quad (\text{onde sferiche}),$$

$$\varphi = \frac{x}{r^3} \operatorname{sen}^3 \alpha \left(\frac{r}{a} - t \right) - \frac{3 \alpha x}{ar^2} \operatorname{sen}^2 \alpha \left(\frac{r}{a} - t \right) \cos \alpha \left(\frac{r}{a} - t \right) \quad (\text{onde sferiche solenoidali}),$$

nelle quali A ed α denotano delle costanti.

(2) « Atti R. Acc. delle Scienze di Torino », vol. 54, 1919. Torino, 1936, p. 439.

(3) G. A. MAGGI, loc. cit.

Le condizioni dinamiche di compatibilità, ottenute tenendo conto nelle (9) delle (8), permettono di scrivere le seguenti relazioni ⁽¹⁾.

$$(10) \quad \text{per } \tau = k: \begin{cases} \frac{\partial \tau}{\partial t} \varepsilon \mathbf{e} - c \operatorname{grad} \tau \wedge \mathbf{h} = 0, \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} \mu \mathbf{h} + c \operatorname{grad} \tau \wedge \mathbf{e} = 0. \end{cases}$$

Da queste si ottiene ancora la relazione (4) individuante le caratteristiche del sistema (8), nella quale

$$(11) \quad a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}.$$

Le onde sono dunque, come è noto, parallele, avanzano con velocità data da (11), e, mediante la relazione (5), dedotta dalla (4), le condizioni dinamiche di compatibilità assumono la seguente forma:

$$(12) \quad \text{per } \tau = k: \begin{cases} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{E} = -\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}, \\ \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{H} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}. \end{cases}$$

Le (12), nelle quali \mathbf{n} denota il versore $\operatorname{grad} n$ normale alle superficie d'onda σ , sono le condizioni di Love ⁽²⁾.

In definitiva dunque, se le superficie d'onda sono parallele, dovranno verificarsi su di ognuna di esse, nell'istante in cui questa funge da fronte d'onda, le condizioni cinematiche (9) e le condizioni dinamiche (12). Nota però una soluzione delle equazioni indefinite di Maxwell, basterà che essa soddisfaccia alle condizioni cinematiche (9) perchè questa possa rappresentare il propagarsi di un fenomeno elettromagnetico nel mezzo imperturbato.

4. — *Onde elettromagnetiche armoniche.* — Consideriamo ora, in particolare, le soluzioni delle equazioni di Maxwell (8), costituenti quelle che si dicono « onde armoniche »:

$$(13) \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}^{(1)} \cos \alpha \left(\frac{n}{a} - t \right) + \mathbf{F}^{(2)} \sin \alpha \left(\frac{n}{a} - t \right), \quad \mathbf{F} = \mathbf{E}, \mathbf{H},$$

nelle quali $\mathbf{F}^{(1)}$ ed $\mathbf{F}^{(2)}$ sono funzioni del posto, α è una costante ed n, a, t hanno significato noto.

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA, loc. cit., § 9.

(2) A. E. H. LOVE, loc. cit.

La (13), come abbiamo già avuto occasione di rilevare in una Nota recente ⁽¹⁾, dipende dalla scelta della superficie base d'onde si conta n : essa rappresenta dunque una famiglia di soluzioni di (8). Ad ogni valore della costante k , che compare in (1), si ha una particolare soluzione (13).

In una Nota all'Istituto Lombardo ⁽²⁾ abbiamo dimostrato che, se (13), qualunque sia k , soddisfa sempre e ovunque alle equazioni di Maxwell (8) e sulla fronte d'onda alle condizioni di Love (12), le superficie d'onda non possono essere che piani paralleli o sfere concentriche; che se poi imponiamo alla soluzione di essere regolare in tutto lo spazio esterno ad una superficie chiusa convessa, le sole onde possibili sono quelle piane.

Aggiungiamo ora che se, invece di tener conto soltanto delle condizioni di Love, teniamo conto anche delle condizioni cinematiche (9), concludiamo che, dovendo essere, sulla fronte d'onda $\frac{n}{a} - t = k$, \mathbf{F} costante, qualunque sia k , $\mathbf{F}^{(1)}$ ed $\mathbf{F}^{(2)}$ debbono essere ivi costanti, e quindi costanti ovunque: le sole onde armoniche, rappresentate da (13), qualunque sia k , che soddisfanno a tutte le condizioni sulla fronte d'onda sono dunque le onde piane ⁽³⁾.

5. — Consideriamo ora delle particolari soluzioni della forma (13), ottenute fissando un valore per k , fissando cioè la base donde si conta n (cfr. n. 2).

Supponiamo

$$(14) \quad k = 0.$$

È questo il problema postosi dal Sona in una Nota recente, e da lui discusso, sfruttando le (12), nel caso in cui la superficie base sia sferica ⁽⁴⁾.

In virtù delle condizioni cinematiche (9), avremo da (13):

$$(15) \quad \text{per } \frac{n}{a} - t = 0 : \mathbf{F}^{(1)} = \text{cost.}$$

Dunque $\mathbf{F}^{(1)}$, che è funzione soltanto del posto, è ovunque costante.

Ma dalle (12), che sono conseguenza delle (9), scende che

$$(16) \quad \text{per } \frac{n}{a} - t = 0 : \begin{cases} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{E}^{(1)} = -\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}^{(1)}, \\ \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}^{(1)} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}^{(1)}. \end{cases}$$

(1) G. A. MAGGI e B. FINZI. Questi «Rendiconti», ser. 6^a, vol. XXII, 1935, p. 200.

(2) G. A. MAGGI e B. FINZI, «Rend. R. Ist. Lombardo», vol. LXVII, 1934, p. 363.

(3) Ciò può verificarsi, valendosi, nel caso ora contemplato, delle (12).

(4) L. SONA, «Atti R. Ist. Veneto», vol. XCIV, 1935, p. 297.

Segue di qui che, o n è costante ovunque, oppure ovunque $\mathbf{F}^{(1)} = 0$. Poichè nella prima ipotesi le onde sono piane parallele, non resta che a discutere la seconda ipotesi.

La particolare soluzione (13) che ora consideriamo si scrive così:

$$(17) \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}^{(2)} \sin \alpha \left(\frac{n}{a} - t \right), \quad \mathbf{F} = \mathbf{E}, \mathbf{H}.$$

Ponendo (17) nelle equazioni indefinite (8), si ottiene che in ogni luogo ed in ogni istante deve essere

$$-\frac{\alpha \varepsilon}{c} \mathbf{E}^{(2)} \cos \alpha \left(\frac{n}{a} - t \right) = \sin \alpha \left(\frac{n}{a} - t \right) \text{rot } \mathbf{H}^{(2)} + \\ + \frac{\alpha}{a} \cos \alpha \left(\frac{n}{a} - t \right) \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}^{(2)}, \text{ ecc.}$$

Dovendo queste relazioni verificarsi ad ogni valore di t , scende che, in ogni luogo:

$$(18) \quad \text{rot } \mathbf{H}^{(2)} = 0, \quad \mathbf{E}^{(2)} = - \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}^{(2)}, \text{ ecc.}$$

Osserviamo ora che le (18) sono precisamente quelle stesse condizioni che nella Nota « Condizioni di esistenza delle onde elettromagnetiche armoniche » ⁽¹⁾ ci hanno permesso di concludere che le superficie d'onda debbono essere piani paralleli o sfere concentriche. Ancora dunque nel caso in esame le sole onde possibili sono le onde piane parallele e le onde sferiche concentriche.

In conclusione dunque, anche la *particolare* soluzione armonica (13), nella quale $k = 0$, ammette soltanto o onde piane parallele, o onde sferiche concentriche; ma, in quest'ultimo caso, la soluzione non è definita in tutto lo spazio esterno alla sfera di base ⁽²⁾.

(1) G. A. MAGGI e B. FINZI, loco ultimo citato, formule (10) e (11).

(2) La non esistenza di onde sferiche armoniche regolari in tutta la regione esterna alla sfera base è stata dimostrata dal Sona nella Nota citata.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Trasporti non lineari: geometria di un sistema di equazioni alle derivate parziali del 2° ordine.* — I. *Preliminari.* Nota di ENEA BORTOLOTTI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. E. BOMPIANI.

1. I sistemi cui si riferisce la mia ricerca ⁽²⁾, della quale in questa e in altre due Note che seguiranno espongo i principali risultati, sono quelli del tipo

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = H_{\alpha\beta}^i(u^\lambda, x^j, p_\gamma^l) \\ (i, j, h, k, l, g, f = 1, \dots, n; \alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots = 1, \dots, m; m \leq n)$$

ove $p_\gamma^l = \frac{\partial x^l}{\partial u^\gamma}$, e le $H_{\alpha\beta}^i = H_{\beta\alpha}^i$ s'intendono funzioni degli argomenti $u^\lambda, x^j, p_\gamma^l$, finite e continue con tutte le derivate che ci occorra considerare.

Mi sono proposto anzitutto di costruire, mediante una conveniente geometrizzazione, una teoria invariantiva dei sistemi (1.1) per le trasformazioni

$$(1.2) \quad x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n)$$

delle funzioni incognite (coordinate nell'ambiente X_n), e simultaneamente

$$(1.3) \quad u^{a'} = u^{a'}(u^1, \dots, u^m)$$

dei parametri (coordinate su una qualunque varietà integrale X_m). Lo scopo viene raggiunto in modo completo e abbastanza semplice: ci si riconduce, come vedremo (numeri 4,5) a una sorta di *connessione affine generalizzata*, con due sistemi di parametri (Γ_{hk}^i e $G_{\alpha\beta}^\gamma$), e a un gruppo di sette tensori, sei dei quali in certo modo tengono il ruolo di *tensori di curvatura* di quella connessione; mediante i quali, e le relative derivate (costruite coi parametri dell'anzidetta connessione) si hanno tutti gli invarianti del sistema (1.1) per le supposte trasformazioni.

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1936.

(2) Di prossima pubblicazione.

Gli enti così determinati sono intrinsecamente legati al sistema (1.1); le proprietà esprimibili mediante essi si potranno dire *proprietà intrinseche* del sistema. Non è detto però che tali enti e tali proprietà siano tutti legati alla totalità delle varietà integrali del sistema in oggetto. Dato questo sistema, su ciascuna sua varietà integrale risulta anche determinato un sistema di coordinate curvilinee (cioè, una *parametrizzazione*); per le (1.3) tali coordinate cangiano *simultaneamente su tutte* le varietà integrali. Ma è evidente che si possono anche cambiare, *indipendentemente*, sulle singole varietà integrali le coordinate, con una trasformazione

$$(1.4) \quad u^{\alpha'} = u^{\alpha'}(x^i, p^l_{\gamma}, u^{\alpha}),$$

ove al luogo delle x^i, p^l_{γ} si debbono intendere poste quelle funzioni delle u^{α} che corrispondono alla supposta varietà integrale. Ma queste trasformazioni (1.4) si possono ottenere componendo una trasformazione (1.4) con un opportuno *cambiamento delle funzioni* $H^i_{\alpha\beta}$, tale da dar luogo a un nuovo sistema con le medesime varietà integrali. Nel caso geometricamente più interessante, in cui valgono pel sistema (1.1) le *condizioni d'integrabilità*, e inoltre, un *punto iniziale* e una *m-direzione per esso determinano una varietà integrale* — il che ha luogo soltanto sotto certe altre condizioni per le $H^i_{\alpha\beta}$: le (7.1) indicate più oltre (Nota III) — le più generali trasformazioni sulle $H^i_{\alpha\beta}$ che non mutano le varietà integrali sono della forma

$$(1.5) \quad \hat{H}^i_{\alpha\beta} = H^i_{\alpha\beta} + \tau^{\gamma}_{\alpha\beta}(u, x, p) p^l_{\gamma}$$

ove le $\tau^{\gamma}_{\alpha\beta}$ sono soggette a condizioni che derivano da quelle d'integrabilità per le $H^i_{\alpha\beta}$, e del resto sono arbitrarie funzioni degli argomenti indicati (intendiamo: le $u^{\alpha}, x^i, p^l_{\gamma}$).

Le (1.5) potranno dirsi: *cambiamenti della legge di parametrizzazione* per le varietà integrali. Le proprietà invarianti per le (1.2), (1.3), (1.5) sono tutte e sole le proprietà che dipendono *soltanto dalle varietà integrali*, e non dalla *legge di parametrizzazione*. Le diremo (seguendo J. Douglas) *proprietà descrittive* del sistema (1.1); esse sono (nel senso sopra precisato) *proprietà intrinseche*, ma *non tutte* le proprietà intrinseche del sistema.

Diremo poi, secondo Douglas (ma la cosa non ci interessa che lei raffronti coi precedenti lavori del Douglas e di altri autori) *proprietà affini* del sistema (1.1) quelle che sono invarianti per le (1.2), ma soltanto per quelle (1.3) che hanno i secondi membri *lineari interi*:

$$(1.6) \quad u^{\alpha'} = c^{\alpha'}_{\alpha} u^{\alpha} + d^{\alpha'} \quad , \quad (c^{\alpha'}_{\alpha}, d^{\alpha'} \text{ cost.}; |c^{\alpha'}_{\alpha}| \neq 0).$$

Specialmente alle *proprietà intrinseche* in genere (Nota II) è dedicata la presente esposizione; nei riguardi di quelle *descrittive* debbo per ora limi-

tarmi a un primo cenno (Nota III). Ma credò necessario premettere (nella presente Nota) uno sguardo d'orientamento, sulla precedente letteratura dell'argomento.

2. Sui sistemi (1.1), però quasi unicamente pel caso $m = 1$, vi sono già svariati lavori che per l'indirizzo adottato si avvicinano al mio, pur differendone in qualche punto sostanziale. Già nel 1915 K. Żorawski ha studiato⁽¹⁾ gli invarianti di un sistema differenziale ordinario

$$(2.1) \quad \frac{d^2 x^i}{du^2} = v^i(u, x^i, p^i) \quad \left(p^i = \frac{dx^i}{du} \right)$$

per le trasformazioni

$$(2.2) \quad \begin{cases} u' = u + a \\ x^{i'} = \varphi^{i'}(u, x^i, p^i; a) \\ p^{i'} = \psi^{i'}(u, x^i, p^i; a). \end{cases}$$

Queste trasformazioni sono da un lato più generali, dall'altro (nei riguardi del parametro u) più ristrette di quelle che io prendo in considerazione. La teoria di Żorawski è condotta in modo puramente analitico: ma in tempi più recenti, lo studio delle *connessioni affini* e particolarmente delle trasformazioni di una tale connessione che *ne conservano le geodetiche* (generalizzazione di una teoria svolta da nostri illustri geometri per le varietà riemanniane: Beltrami, Dini, Levi-Civita) ha dato luogo ad una assai notevole geometrizzazione dei sistemi

$$(2.3) \quad \frac{d^2 x^i}{du^2} = -\Gamma_{jk}^i(x^1, \dots, x^n) p^j p^k$$

cioè, dei sistemi (2.1) pei quali i secondi membri non contengono u , e nei riguardi delle p^i sono polinomi (interi) omogenei del 2° grado. La teoria dei sistemi (2.3), considerati in relazione alle trasformazioni (1.2) sulle x^i , e anche alle trasformazioni

$$(2.4) \quad \hat{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + \delta_j^i \psi_k + \delta_k^i \psi_j + \Omega_{jk}^{..i} \quad (\Omega_{jk}^{..i} + \Omega_{kj}^{..i} = 0)$$

che non mutano le linee integrali (corrispondenti nel caso attuale alle (1.5)) è quella che dalla Scuola americana di Princeton (L. P. Eisenhart, O. Veblen, T. Y. Thomas, J. M. Thomas, ...) è stata detta « *geometria (affine e proiettiva) dei cammini* » (geometry of paths).

(1) Ved. K. ŻORAWSKI, *Ueber Differentialinvarianten gewisser Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen gegenüber Punkttransformationen*. « Bulletin Intern. de l'Acad. ». Cracovia, 1915, pp. 241-274; e *Ueber gewisse Differentialinvarianten der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung*. « Bulletin Intern. Acad. de Bohême », 1915.

Era naturale proporsi una analoga geometrizzazione pei casi in cui o , essendo sempre $m = 1$, si facciano ipotesi più generali circa i secondi membri; oppure sia $m > 1$. Nel 1928 J. Douglas ha svolto una teoria che ha detto « *geometria generale dei cammini* »⁽¹⁾: in cui sostanzialmente tratta il caso in cui i secondi membri delle (2.1) non contengano u e siano funzioni *omogenee* del 2° grado nelle p^i . A questa restrizione il Douglas è condotto perchè egli parte dalla considerazione della totalità delle linee integrali (cioè dei « cammini »), che egli suppone soggetta a questa condizione: che entro una conveniente regione n -dimensionale della X_n di x^1, \dots, x^n per due punti passi una e una sola linea della totalità in questione, rappresentabile in forma finita con equazioni del tipo $x^i = f^i(u, a)$: ove le a^i sono $2n - 2$ parametri essenziali. I risultati di Douglas si riferiscono sia alle proprietà *affini* che a quelle *descrittive* del sistema in considerazione.

Il Douglas ha poi esteso la sua teoria⁽²⁾ al caso di sistemi del tipo (1.1) (m qualunque), i cui secondi membri, indipendenti dalle u^α , abbiano nei riguardi delle p_α^i una certa « proprietà d'omogeneità », precisamente

$$(2.5) \quad H_{\alpha\beta}^i(x^j, p_\gamma^i) = q_{\alpha'}^{\alpha'} q_{\beta'}^{\beta'} H_{\alpha'\beta'}^i(x^j, q_{\gamma'}^{\gamma'} p_\gamma^i) \quad (|q_{\gamma'}^{\gamma'}| \neq 0; q_{\alpha'}^{\alpha'} q_{\beta'}^{\beta'} = \delta_{\alpha\beta}^{\beta}).$$

Si tratta effettivamente di una estensione semplice e notevole della ordinaria *omogeneità* (nel nostro caso: di 2° grado) rispetto a uno o più parametri. La teoria così costruita dal Douglas è da lui detta « *geometria delle m -estensioni* » (geometry of m -spreads); essa giunge, nel caso preso in considerazione, a risultati interessanti e conclusivi, relativi sia alla geometria *affine* che a quella *descrittiva* delle m -estensioni, o del corrispondente sistema: su cui non potrei qui soffermarmi.

Alla « geometria generale dei cammini » (e delle m -estensioni) di Douglas si collegano, e in certo senso vi rientrano, le ricerche svolte nell'ultimo quindicennio da molti autori, e particolarmente dal Berwald, e in tempi più recenti dal Cartan, allo scopo di geometrizzare i problemi di Calcolo delle Variazioni

$$(2.6) \quad \delta \int \mathcal{L}(x, p) du = 0,$$

(ove \mathcal{L} è, nelle p^i , omogenea di grado 1) a una variabile, e, ad opera del Cartan, anche gli analoghi problemi a due variabili⁽³⁾. Nei lavori del

(1) Ved. J. DOUGLAS, *The general Geometry of Paths*. « *Annals of Mathem.* » (2), 29, 1928, pp. 143-168.

(2) Ved. J. DOUGLAS, *System of K -dimensional manifolds in an N -dimensional space*. « *Mathem. Annalen* », B. 105, 1931, pp. 707-733.

(3) Ved., anche per la bibliografia, L. BERWALD, *Parallelübertragung in allgemeinen Räumen*. « *Atti Congresso Matem. Bologna* », 1928, to. IV, pp. 263-270; *Über Finslersche*

Berwald, e poi, in forma più generale e completa, in quelli del Cartan, la geometrizzazione assume un aspetto più espressivo in quanto fa capo a una legge di trasporto dei vettori, atta a tenere il ruolo che il *trasporto parallelo* di Levi-Civita ha nella geometria riemanniana. Al Cartan è dovuta questa osservazione assai importante: che se da una legge di trasporto dei vettori, che dia luogo a proprietà per quanto è possibile analoghe a quelle delle connessioni lineari, vogliamo ricavare tutti gli invarianti del problema variazionale proposto, la legge di trasporto deve dare un procedimento pel passaggio non solo da un punto (x) di X_n a un punto infinitamente vicino: ma più in generale da un « elemento di appoggio » (x, p) ad un altro ad esso infinitamente vicino, $(x + dx, p + dp)$, per variazioni qualunque (infinitesime) delle x^i, p^i_α . L'elemento d'appoggio è costituito da un punto cui è associata una orientazione m -dimensionale per esso ($m = 1, 2$ nei casi considerati dal Cartan). La X_n vien dunque riguardata in realtà come una « varietà d'elementi ». Come una consimile veduta riesca utile anche pei sistemi (1.1) generali, vedremo nella Nota II.

Si comprende agevolmente come i sistemi (1.1) ricavati da problemi variazionali (anche se questi non siano soggetti a restrizioni) non debbano essere i più generali: la cosa *a priori* è prevedibile, ed è stata messa in evidenza da D. D. Kosambi⁽¹⁾. Questi ne è stato condotto a studiare, ma limitatamente al caso $m = 1$, i sistemi (1.1) in relazione alle trasformazioni (1.2) sulle x^i . Il Kosambi, guidato da vedute analitiche (ad es. dal proposito di porre sotto una forma normale invariante particolarmente semplice il sistema alle variazioni del sistema differenziale proposto) giunge a costruire una legge di trasporto (che egli chiama « *biparallelism* ») dei vettori da punto a punto: cui si collegano svariati tensori, invarianti per le (1.2) e le (1.6): non per le (1.3) più generali.

Il Cartan, applicando qui le sue vedute (accennate sopra), ha poi osservato⁽²⁾ che si può convenientemente generalizzare il trasporto introdotto dal Kosambi, in un trasporto *da elemento ad elemento*; e anzi, più esattamente, da punto a punto nello spazio $(2n + 1)$ -dimensionale delle u, x^i, p^i .

und verwandte Räume. « Comptes Rendus du 2^{me} Congrès des Math. des Pays Slaves ». Praha, 1934; T. DE DONDER, *Théorie invariante du calcul des variations*. Paris, Gauthier-Villars, 1931; L. KOSCHMIEDER, *Die neuere formale Variationsrechnung*. « Jahresber. Deut. Math. Ver. », B. 40, 1931, pp. 109-132; ed È. CARTAN, *Les espaces de Finsler*. « Exposés de Géométrie », II. Paris, Hermann, 1934; e *Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire*, ibid., I, 1933.

(1) Ved. D. D. KOSAMBI, *On the existence of a metric and the inverse variational problem*. « Bull. Acad. Sci. Allahabad », 2, 1932, pp. 17-28; *Géométrie différentielle et calcul des variations*. « Rendiconti Lincei » (6), 16, 1932, pp. 410-415; *Parallelism and Path-Spaces*. « Mathem. Zeitschrift », B. 37, 1933, pp. 608-618.

(2) Ved. È. CARTAN, *Observations sur le mémoire précédent*. « Mathem. Zeitschrift », B. 37, 1933, pp. 619-622.

Di più, il Cartan ha notato che la teoria può agevolmente estendersi allo studio degli invarianti di un sistema (1.1) di fronte a trasformazioni

$$(2.7) \quad u' = u, x^{i'} = x^i(u; x^1, \dots, x^n)$$

il che può dar luogo, ad es., ad applicazioni interessanti la Relatività, quando le x^i ($n=3$) ed u si interpretino quali coordinate *spaziali* e *temporale* nello spazio-tempo.

Infine: con le ricerche di Kosambi e Cartan si è incontrato W. Ślebodziński⁽¹⁾, il quale ha pure, indipendentemente, sviluppato una geometrizzazione dei sistemi (2.1) (i cui secondi membri non contengano le u) sia di fronte alle (2.7) che, in particolare, alle (1.2): fra l'altro risolvendo interessanti problemi *d'equivalenza*.

La mia ricerca, che veramente era in gran parte redatta fino dai primi mesi del 1934, quando non ero a conoscenza dei lavori di Ślebodziński, di Kosambi e Cartan, ha naturalmente dei punti di "contatto con questi, come pure con quelli di Douglas. Ragioni di spazio non mi consentono di precisare qui le relazioni fra la mia ricerca e i precedenti lavori che ho citato: lo farò nel più ampio lavoro già preannunziato, limitandomi nella presente esposizione (Nota II e III) a brevi cenni occasionali.

(1) Ved. W. ŚLEBODZIŃSKI, *Sur deux connections affines généralisées*. «Prace Matem. Fiz.», Varsavia, to. 43, pp. 167-205.

Matematica. — *Sulla curva di diramazione dei piani multipli.*

Nota di O. CHISINI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. ENRIQUES.

1. In due Note dal titolo: *Un teorema d'esistenza dei piani multipli*, presentate a questa Accademia nella seduta del 6 maggio 1934 (e inserite nei « Rendiconti » del maggio e del giugno) ho mostrato come si possa costruire una curva algebrica piana $\varphi(xy) = 0$, che sia curva di diramazione per un piano n -plo; inoltre, nella introduzione alla prima delle due Note, ho accennato alla mia persuasione che il procedimento potesse dare tutti i piani multipli. Per varie difficoltà solo ora ho potuto riprendere efficacemente l'argomento, pervenendo a qualche risultato significativo, anche se non ancora completo; precisamente ho riconosciuto che la costruzione indicata dà tutti i piani n -pli inerenti ad una superficie d'ordine n sprovvista di curva doppia e quelli relativi ad una superficie d'ordine $n + r$ avente come r -plo il punto all'infinito dell'asse z (ed essa pure sprovvista di curva doppia).

2. Prima di dimostrare l'assunto, che costituisce una proposizione inversa del teorema d'esistenza dato, conviene ricordare il teorema stesso. Ecco.

Una curva $\varphi(xy) = 0$, che sia di diramazione per un piano n -plo, si ottiene come segue.

Si assumano, successivamente, nel piano (x, y) le $n - 1$ curve C_1, C_2, \dots, C_{n-1} . Indichiamo genericamente con P un punto comune a due C successive, e con Q un punto comune a due C non successive. Ciascuna curva C sia contata due volte, cioè sia assunta come curva doppia, ma ciò sia fatto con l'avvertenza che essa abbia come punti di diramazione i punti in cui taglia la precedente e la seguente (ed inoltre altri eventuali punti di diramazione che non ci interessano). Indichiamo con $\bar{\varphi}$ la curva composta dalle C doppie (coi suddetti punti di diramazione). Si dia ora alla $\bar{\varphi}$ una variazione infinitesima, scelta in modo da conservare l'equivalenza (come numero di intersezioni con le polari) delle singolarità P e Q . Precisamente:

Ogni punto Q , intersezione di due C non consecutive, dia luogo a quattro punti doppi, con tangenti prossime a quelle delle C che si tagliano in Q .

Ogni punto P , intersezione di due C consecutive, dia luogo a tre cuspidi e a un punto di contatto con una tangente parallela all'asse y .

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1936.

Data alla $\bar{\varphi}$ una tale variazione infinitesima, si ottiene una curva φ che, al pari di ogni sua trasformata con una deformazione continua che ne mantenga nodi e cuspidi, è di diramazione per un piano n -plo; il quale così si costruisce.

Supposto l'asse y in posizione generica, si considerino i punti in cui esso taglia la curva φ : tali punti risultano a coppie prossimi alle intersezioni dello stesso asse con le singole curve C . Si costruisce allora la funzione algebrica $\chi = \chi(y)$, ad n rami, che abbia come punti di diramazione i valori y che competono alle suddette intersezioni, e precisamente si associerà ad un punto che sia prossimo alla curva C_i lo scambio $(i, i + 1)$, sicchè, essendo $n - 1$ le curve C_i , la χ risulta funzione ad n rami. Questa funzione χ può considerarsi corrispondere al parametro $x = 0$; facendo poi variare per continuità la x , e corrispondentemente i punti di diramazione y e la funzione $\chi(y)$, questa risulta definire una superficie $\chi = \chi(x, y)$, cioè un piano n -plo, che ha come curva di diramazione la φ considerata.

3. Vogliamo ora dimostrare che una superficie F , d'ordine n , che sia sprovvista di curva doppia e non passi per il punto improprio dell'asse z , dà luogo effettivamente ad un piano n -plo con una curva di diramazione φ del tipo indicato.

Per chiarezza considereremo il caso particolare $n = 4$, essendo esso del tutto significativo.

Scriviamo l'equazione della F nella forma

$$(1) \quad \lambda_0 \chi^4 + \lambda_1 \varphi_1(xy) \chi^3 + \lambda_2 \varphi_2(xy) \chi^2 + \lambda_3 \varphi_3(xy) \chi + \lambda_4 \varphi_4(xy) = 0,$$

dove le λ indicano dei coefficienti numerici e le φ_i sono forme, nelle x e y , d'ordine i .

La curva di diramazione φ ha un'equazione che si ottiene eliminando la χ fra la (1) e la sua derivata rispetto a χ , e che può essere scritta nella forma di determinante di Sylvester:

$$\begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 \varphi_1 & \lambda_2 \varphi_2 & \lambda_3 \varphi_3 & \lambda_4 \varphi_4 & 0 & 0 \\ 4\lambda_0 & 3\lambda_1 \varphi_1 & 2\lambda_2 \varphi_2 & \lambda_3 \varphi_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & \lambda_1 \varphi_1 & \lambda_2 \varphi_2 & \lambda_3 \varphi_3 & \lambda_4 \varphi_4 & 0 \\ 0 & 4\lambda_0 & 3\lambda_1 \varphi_1 & 2\lambda_2 \varphi_2 & \lambda_3 \varphi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \lambda_1 \varphi_1 & \lambda_2 \varphi_2 & \lambda_3 \varphi_3 & \lambda_4 \varphi_4 \\ 0 & 0 & 4\lambda_0 & 3\lambda_1 \varphi_1 & 2\lambda_2 \varphi_2 & \lambda_3 \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\lambda_0 & 3\lambda_1 \varphi_1 & 2\lambda_2 \varphi_2 & \lambda_3 \varphi_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Sottraggiamo ora da ciascuna linea di posto pari la precedente moltiplicata per un opportuno coefficiente numerico (4, 3, 2) in modo da an-

nullare in essa il termine che precede la diagonale principale, e cambiamo segno alla riga così modificata. Con ciò l'equazione della φ assume la forma più comoda:

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 \varphi_1 & \lambda_2 \varphi_2 & -\lambda_3 \varphi_3 & \lambda_4 \varphi_4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \varphi_1 & 2\lambda_2 \varphi_2 & 3\lambda_3 \varphi_3 & 4\lambda_4 \varphi_4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & \lambda_1 \varphi_1 & \lambda_2 \varphi_2 & \lambda_3 \varphi_3 & \lambda_4 \varphi_4 & 0 \\ 0 & -\lambda_0 & 0 & \lambda_2 \varphi_2 & 2\lambda_3 \varphi_3 & 3\lambda_4 \varphi_4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \lambda_1 \varphi_1 & \lambda_2 \varphi_2 & \lambda_3 \varphi_3 & \lambda_4 \varphi_4 \\ 0 & 0 & -2\lambda_0 & -\lambda_1 \varphi_1 & 0 & \lambda_3 \varphi_3 & 2\lambda_4 \varphi_4 \\ 0 & 0 & 0 & 4\lambda_0 & 3\lambda_1 \varphi_1 & 2\lambda_2 \varphi_2 & \lambda_3 \varphi_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Per la nostra dimostrazione dobbiamo riconoscere che:

a) al tendere a zero dei parametri $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$, la curva di diramazione φ si riduce alla somma delle tre curve $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, ciascuna contata due volte;

b) l'equazione (1), ove si faccia $x = 0$, definisce una funzione $\chi(y)$ a quattro rami, dotata di 12 punti di diramazione, che per valori piccoli dei parametri $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$, sono a coppie prossimi alle intersezioni della retta $x = 0$ con le curve $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, per modo che ad essi possono, corrispondentemente, essere attribuiti gli scambi (su χ)

$$(1, 2) \quad (2, 3) \quad (3, 4);$$

c) un punto P, comune a due curve doppie, φ_i , consecutive, è di diramazione per entrambe ed è limite di tre cuspidi, mentre un punto Q, comune a due φ_i non consecutive, è limite di quattro punti doppi della φ variabile.

4. Procediamo alla effettiva dimostrazione dei punti a), b), c), enunciati alla fine del numero precedente.

a) Per vedere come vari la φ rendendo successivamente nulli i parametri $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$, si indichi: con D_0 il determinante (2); con D'_1 quello che resta di D_0 sopprimendo la prima linea e la prima colonna, e con D_1 il determinante D'_1 in cui si ponga $\lambda_0 = 0$; con D'_2 quello che resta di D_1 sopprimendo in esso le prime due linee e due colonne, e con D_2 il determinante D'_2 in cui si ponga $\lambda_1 = 0$; con D'_3 quello che resta di D_2 sopprimendo in esso le prime due linee e due colonne, e con D_3 il determinante D'_3 in cui si ponga $\lambda_2 = 0$.

La semplice ispezione dei termini che compongono il determinante (2) mostra che:

$$D_0 = \lambda_0 D'_1 \quad \lim_{\lambda_0 \rightarrow 0} D'_1 = D_1$$

$$D_1 = \lambda_1^2 \varphi_1^2 D'_2 \quad \lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} D'_2 = D_2$$

$$D_2 = \lambda_2^3 \varphi_2^3 D'_3 \quad \lim_{\lambda_2 \rightarrow 0} D'_3 = D_3$$

$$D_3 = \lambda_3^2 \varphi_3^2.$$

Segue da queste relazioni che per valori piccoli di $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$, la φ è prossima all'insieme delle tre curve $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, ciascuna contata due volte.

b) Si consideri la curva Γ ottenuta segnando la superficie F col piano $x = 0$. Essa definisce la χ come una funzione, $\chi(y)$, a quattro rami, della variabile y , dotata di 12 punti di diramazione. Si faccia ora variare λ_0 , facendolo tendere a zero. Al limite la curva Γ viene a passare per il punto all'infinito, Z_∞ , dell'asse χ , col che la funzione $\chi(y)$ si riduce a tre rami, mentre due dei punti di diramazione convergono in un punto della retta φ_1 . Segue che ai detti punti di diramazione deve corrispondere (quando i relativi cappi siano consecutivi) un medesimo scambio, che possiamo indicare con $(1, 2)$, e gli scambi relativi ai punti di diramazione residui non dovranno operare più su una di queste due determinazioni, cioè, per fissare la nomenclatura, dovranno solo operare sulle determinazioni 2, 3, 4.

Facciamo ora variare il parametro λ_1 , facendolo tendere a zero. Al limite la curva Γ viene a passare doppiamente per Z_∞ , sicchè la funzione $\chi(y)$ si riduce a due sole determinazioni, mentre quattro punti di diramazione vengono a riunirsi a coppie in due punti della conica φ_2 . Segue che a ciascuna coppia di punti di diramazione (quando i relativi cappi siano consecutivi) deve corrispondere un medesimo scambio operante su di una delle tre determinazioni, per fissare le idee operante sulla 2. Siccome gli scambi residui devono poter portare ancora 3 in 4 e viceversa — nel nostro caso particolare sono tutti lo scambio $(3, 4)$ — spostando eventualmente la posizione di una coppia dei suddetti cappi, è possibile supporre che entrambe le coppie diano lo stesso scambio $(2, 3)$. Gli scambi residui opereranno solo su 3 e 4.

Se poi si fa tendere a zero il terzo parametro λ_2 , anche gli ultimi sei punti di diramazione finiranno col coincidere a coppie in tre punti della cubica φ_3 , mentre la Γ darà luogo ad una funzione monodroma.

Resta così dimostrato che, quando i parametri $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$, sono prossimi allo zero, i punti di diramazione della $\chi(y)$ sono: due prossimi ad un punto di φ_1 e dotati dello scambio $(1, 2)$; quattro prossimi, a coppie, a due punti di φ_2 e dotati dello scambio $(2, 3)$, sei prossimi, a coppie, a tre punti di φ_3 e dotati dello scambio $(3, 4)$.

c) Consideriamo un punto P comune alle due curve consecutive φ_1 e φ_2 ; e cominciamo a riconoscere che esso è di diramazione per la φ_2 doppia.

A tale scopo si ricordi che quando si sia posto $\lambda_0 = 0$, dalla φ variabile viene a staccarsi la φ_1 contata due volte e che la parte residua è rappresentata dall'equazione $D'_2 = 0$. Ora osserviamo che se nel determinante D'_2 poniamo $\varphi_1 = 0$, esso risulta divisibile per φ_2^2 , sicchè possiamo scrivere

$$D'_2 = A \cdot \varphi_1 + B \cdot \varphi_2^2$$

dove A e B sono due polinomi in x e y . Segue che la curva $D'_2 = 0$ è tangente in P alla φ_1 , e ciò qualunque sia il valore di λ_1 , sicchè al limite, quando per $\lambda_1 = 0$ dalla $D'_2 = 0$ si stacca la φ_2 doppia, questa ha come punto di diramazione il punto P in cui la $D'_2 = 0$ variabile presenta una tangente fissa diversa da quella di φ_2 .

Le due circostanze che P sia punto di diramazione per la φ_1 doppia e che sia limite di tre cuspidi della φ variabile, si riconoscono insieme. Si osservi che quando λ_0 si annulla, la superficie F viene a passare per Z_∞ , punto improprio dell'asse z , ed ha quivi come piano tangente il piano $\varphi_1(xy) = 0$ e come tangenti principali le rette che passano per i due punti P comuni alle curve φ_1 e φ_2 . Segue che la polare (rispetto ad F) del punto Z_∞ sega la F secondo una curva K che ha in Z_∞ un nodo e riesce tangente alle dette tangenti principali. Inoltre la superficie Φ , polare seconda (rispetto ad F) di Z_∞ , passa essa pure per Z_∞ , ed ha un contatto tripunto con le due tangenti principali (nel nostro caso particolare le contiene), sicchè delle intersezioni di Φ e K tre cadono in Z_∞ su' ciascun ramo di K . Segue che in P cadono, al limite, tre cuspidi della φ variabile. D'altra parte si ricordi che in P si ha un contatto della $D'_2 = 0$ con la φ_1 , sicchè, ove questa, considerata come curva doppia, non avesse in P un punto di diramazione, si troverebbe la singolarità in P equivalente a due tacodi, cioè in P si avrebbero 8 intersezioni della curva limite con la sua polare generica, mentre per il fatto di essere P limite di tre cuspidi tali intersezioni devono essere almeno 9. (A noi non interessa qui escludere, cosa non difficile, che in P la φ_1 doppia abbia più di un punto di diramazione).

In modo analogo si analizzerebbe un punto P comune alle due curve consecutive φ_2 e φ_3 .

Passiamo infine ad analizzare un punto Q comune a due φ_i non consecutive, cioè alla φ_1 e alla φ_3 , per mostrare che esso è limite di quattro punti doppi (nodi) della φ variabile.

Siano α e β l'ascissa e l'ordinata di Q . Indichiamo con \bar{y}_1 e con \bar{y}_3 le ordinate di due punti appartenenti, rispettivamente a φ_1 e a φ_3 , che siano prossimi a Q ed abbiano una medesima ascissa, α' , prossima ad α . Ciascuno di questi punti è limite di due punti, della φ variabile, aventi la medesima ascissa α' : pertanto sulla φ prossima ad essere degenerare (nelle tre curve doppie) possiamo considerare due coppie di punti le cui ordinate, che indichiamo con y_1 e y'_1 , y_3 e y'_3 , sono prossime a \bar{y}_1 e a \bar{y}_3 .

Consideriamo ora la funzione algebrica $y(x)$ definita dalla suddetta curva φ : dimostriamo che per un giro di x , che si muova in un campo abbastanza piccolo contenente α , non può accadere che si scambino fra loro uno degli y di indice 1 con uno degli y di indice 3, ad esempio y_1 con y_3 . Notiamo anzitutto che gli y con l'indice 1 sono punti di diramazione per la $\chi(y)$ che danno lo scambio (1, 2) e che quelli con l'indice 3 danno lo scambio (3, 4); poichè questi scambi sono fra loro permutabili non importa nulla l'ordine dei capi (appartenenti al piano della variabile complessa y) che danno queste diramazioni su χ .

Ora se il suddetto giro della variabile complessa x portasse y_1 in y_3 dovrebbero coincidere i relativi scambi su χ , e ciò per il teorema di invarianza di Enriques⁽¹⁾ che dà una condizione necessaria (e sufficiente) perchè una curva φ sia di diramazione per un piano multiplo.

Ciò posto, quando si faccia il passaggio (in un certo senso inverso di quelli fino ad ora considerati) dalla φ degenerare (nelle tre curve doppie) alla φ non degenerare, la singolarità Q si modifica, ma restano i quattro punti doppi che corrispondono alle intersezioni dei due rami descritti dalle y di indice 1 con i due rami descritti dalle y di indice 3.

5. L'estensione del risultato al caso di un piano n -plo dipendente da una superficie F d'ordine $n + r$ avente come r -plo il punto improprio dell'asse χ , non presenta difficoltà alcuna, potendosi ripetere esattamente le stesse considerazioni, di carattere sintetico o analitico, che qui abbiamo svolte. Naturalmente si suppone che la F non abbia curva doppia, nè propria nè infinitesima prossima al punto improprio dell'asse χ .

(1) Cfr. F. ENRIQUES, *Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione*. « Annali di Matematica », ser. IV, vol. I, p. 192 (anno 1923-24).

Matematica (Algebra). — *Su due nuove generalizzazioni del determinante di Vandermonde.* Nota di G. PALAMÀ, presentata ⁽¹⁾ dal Corresp. G. SCORZA.

Vari autori si sono serviti, in loro ricerche, dello sviluppo del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^{2|d} & a_2^{2|d} & \dots & a_n^{2|d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1|d} & a_2^{n-1|d} & \dots & a_n^{n-1|d} \end{vmatrix},$$

in cui come è noto è $a^{i|d} = a(a+d) \dots [a+(i-1)d]$.

Ora l'esame del determinante precedente suggerisce lo studio di determinanti più generali, con gli elementi uguali al prodotto dei termini successivi di una progressione aritmetica dell' r^{mo} ordine anzichè del primo.

In questa Nota studieremo siffatti determinanti e degli altri aventi stretta analogia con essi, con gli elementi cioè prodotti dei termini successivi di una medesima progressione geometrica dell' r^{mo} ordine.

Entrambi questi determinanti si riducono, in casi particolarissimi, a quello di Vandermonde.

I risultati a cui si perverrà saranno molto semplici e anzi, ciò che è notevole, lo sviluppo dei primi coinciderà perfettamente con quello del determinante di Vandermonde.

Mai da alcuno, per quel che mi consta, è stato intrapreso lo studio di tali determinanti.

1. Introduciamo il simbolo

$$b_i^{i|d_1, d_2, \dots, d_r} = b_1 \cdot b_2 \dots b_i,$$

in cui b_1, b_2, \dots, b_i sono i termini successivi di una progressione aritmetica d'ordine r tale che i primi termini delle $1^a, 2^a, \dots, r^{me}$ differenze di essa sono rispettivamente i numeri d_1, d_2, \dots, d_r .

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1936.

Si sa che

$$b_i = b_1 + \sum_j^r \binom{i-1}{j} d_j^{(1)}.$$

Consideriamo il determinante

$$(1) \quad V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & a_n \\ a_1^{2|d_1, d_2, \dots, d_r} & a_2^{2|d_1, d_2, \dots, d_r} & \dots & a_n^{2|d_1, d_2, \dots, d_r} & a_n^{2|d_1, d_2, \dots, d_r} \\ a_1^{3|d_1, d_2, \dots, d_r} & a_2^{3|d_1, d_2, \dots, d_r} & \dots & a_n^{3|d_1, d_2, \dots, d_r} & a_n^{3|d_1, d_2, \dots, d_r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1|d_1, d_2, \dots, d_r} & a_2^{n-1|d_1, d_2, \dots, d_r} & \dots & a_n^{n-1|d_1, d_2, \dots, d_r} & a_n^{n-1|d_1, d_2, \dots, d_r} \end{vmatrix}$$

che per $d_1 = d_2 = \dots = d_r = 0$ si riduce appunto a quello di Vandermonde. E quello che è notevole, lo sviluppo di (1), coincide con quello dello stesso determinante di Vandermonde.

Infatti sottraiamo dalla riga $(i+1)^a$ la riga i^a moltiplicata per $a_i + \sum_j^r \binom{i-1}{j} d_j$ a cominciare dall'ultima fino alla seconda. Abbiamo

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & \dots & a_n(a_n - a_1) & a_n(a_n - a_1) \\ 0 & a_2^{2|d_1, d_2, \dots, d_r} \cdot (a_2 - a_1) & \dots & a_n^{2|d_1, d_2, \dots, d_r} \cdot (a_n - a_1) & a_n^{2|d_1, d_2, \dots, d_r} \cdot (a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2|d_1, d_2, \dots, d_r} \cdot (a_2 - a_1) & \dots & a_n^{n-2|d_1, d_2, \dots, d_r} \cdot (a_n - a_1) & a_n^{n-2|d_1, d_2, \dots, d_r} \cdot (a_n - a_1) \end{vmatrix},$$

cioè

$$V = \prod_i^n (a_i - a_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_2 & a_2 & \dots & a_n & a_n \\ a_2^{2|d_1, d_2, \dots, d_r} & a_2^{2|d_1, d_2, \dots, d_r} & \dots & a_n^{2|d_1, d_2, \dots, d_r} & a_n^{2|d_1, d_2, \dots, d_r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_2^{n-2|d_1, d_2, \dots, d_r} & a_2^{n-2|d_1, d_2, \dots, d_r} & \dots & a_n^{n-2|d_1, d_2, \dots, d_r} & a_n^{n-2|d_1, d_2, \dots, d_r} \end{vmatrix}.$$

Poichè il determinante che figura in quest'ultima è dello stesso tipo di quello della (1), è

(1) Ved. A. FINZI, *Progressioni in Encicl. delle matematiche elementari*, I, 1930.

$$V = \prod_2^n (a_i - a_1) \cdot \prod_3^n (a_i - a_2) \cdots \prod_n^n (a_i - a_{n-1}),$$

cioè

$$V = \prod_2^n \prod_s^n (a_i - a_{s-1}).$$

2. Nel caso in cui a_i sono i termini della stessa progressione di ordine r con $a_1 = d_1 = d_2 = \cdots = d_r = 1$ e $r \leq n-1$, risulta

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad \cdots, \quad a_s = 1 + \sum_{i=1}^{s-1} \binom{s-1}{i} = 2^{s-1}, \quad \cdots, \quad a_n = 2^{n-1},$$

$$a_s^{i/l_1, l_2, \dots, l_r} = 2^{i-1} \cdot (2-1 + 2^{s-1}) \cdot (2^2-1 + 2^{s-1}) \cdots (2^{i-1}-1 + 2^{s-1}),$$

e

$$V = \prod_2^n \prod_s^n (2^{i-1} - 2^{s-2}) = \prod_2^n 2^{(s-2)(n-s+1)} \cdot \prod_1^{n-s+1} (2^i - 1),$$

ma

$$\prod_2^n 2^{(s-2)(n-s+1)} = 2^{\binom{n}{3}},$$

quindi

$$V = 2^{\binom{n}{3}} \cdot \prod_2^n \prod_1^{n-s+1} (2^i - 1).$$

Possiamo allora scrivere

$$\left| \begin{array}{ll} 1 & 1 \dots \dots \dots 1 \\ 1 & 2 \dots \dots \dots 2 \\ 1 \cdot 2 & 2(2-1+2) \dots \dots \dots 2 \\ 1 \cdot 2 \cdot 2^2 & 2(2-1+2)(2^2-1+2) \dots \dots \dots 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 \cdot 2 \cdot 2^2 \dots 2^{n-2} & 2 \cdot (2-1+2)(2^2-1+2) \dots (2^{n-2}-1+2) \end{array} \right\} =$$

$$\left| \begin{array}{l} \dots \dots \dots 1 \\ \dots \dots \dots 2^{n-1} \\ \dots \dots \dots 2^{n-1} \cdot (2-1+2^{n-1}) \\ \dots \dots \dots 2^{n-1} \cdot (2-1+2^{n-1}) \cdot (2^2-1+2^{n-1}) \\ \vdots \\ 2^{n-1} \cdot (2-1+2^{n-1}) \dots (2^{n-2}-1+2^{n-1}) \end{array} \right|$$

$$= 2^{\binom{n}{2}} \prod_2^n \prod_1^{n-s+1} (2^i - 1).$$

Se nella stessa ipotesi per gli a_i , è ancora $a_r = 1$, $r \geq n - 1$, ma $d_i = (m - 1)^i$, risulta invece

$$a_i = 1 + \sum_j^{i-1} \binom{i-1}{j} (m - 1)^j = m^{i-1},$$

$$a_i^{i/d_1, d_2, \dots, d_r} = m^{i-1} \cdot (m - 1 + m^{s-1}) \cdot (m^2 - 1 + m^{s-1}) \dots (m^{i-1} - 1 + m^{s-1}),$$

e

$$V = \prod_2^n \prod_s^n (m^{i-1} - m^{s-2}) = m^{\binom{n}{2}} \prod_2^n \prod_1^{n-s+1} (m^i - 1).$$

3. Qualora a_1, a_2, \dots, a_n siano i termini successivi della detta progressione aritmetica d'ordine r , lo sviluppo di V si presenta sotto la forma

$$V = \prod_2^n \prod_s^n \sum_j^r \left[\binom{i-1}{j} - \binom{s-2}{j} \right] d_j$$

che per $d_1 = d$, $d_2 = d_3 = \dots = d_r = 0$, diventa

$$V = d^{\binom{n}{2}} \cdot \prod_2^n \prod_s^n (i - s + 1) = d^{\binom{n}{2}} \cdot \prod_1^{n-1} i!;$$

e se moltiplichiamo la $2^a, 3^a, \dots, n^a$ colonna di (1), scritto nell'ipotesi in esame, per $a_1^{1/d}, a_1^{2/d}, \dots, a_1^{n-1/d}$ rispettivamente, si ha un determinante di Hankel che, indicato con H , è dato da

$$H = d^{\binom{n}{2}} \cdot \prod_1^{n-1} a_1^{i/d} \cdot i! \quad (3).$$

4. Poniamo ora

$$b_i^{1/q_1, q_2, \dots, q_r} = b_1 \cdot b_2 \dots b_i$$

in cui b_1, b_2, \dots, b_i sono i termini di una progressione geometrica per quoziente dell' r^{mo} ordine, avente per primi termini delle progressioni dedotte per quoziente da essa, rispettivamente q_1, q_2, \dots, q_r .

Si tenga presente che

$$b_i = b_1 \cdot \prod_j^r q_j^{\binom{i-1}{j}} \quad (2)$$

(1) Ved. STUDNICKA, Über eine neue Art von Derivationsdeterminanten. «Monat. für Mat. und Phys.», X, p. 338, 1899.

(2) Ved. A. FINZI, loc. cit., p. 360.

e consideriamo il determinante

$$(2) \quad w = \begin{vmatrix} I & & I & \dots & I \\ a_1 & & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^{2/q_1, q_2, \dots, q_r} & & a_2^{2/q_1, q_2, \dots, q_r} & \dots & a_n^{2/q_1, q_2, \dots, q_r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1/q_1, q_2, \dots, q_r} & & a_2^{n-1/q_1, q_2, \dots, q_r} & \dots & a_n^{n-1/q_1, q_2, \dots, q_r} \end{vmatrix}.$$

È

$$(3) \quad w = \prod_{i=1}^r q_i^{\binom{n}{i+2}} \cdot \prod_{s=2}^n \prod_{i=1}^s (a_i - a_{s-1}).$$

Anche w si riduce al determinante di Vandermonde per $q_1 = q_2 = \dots = q_r = 1$.

Dimostriamo la (3).

Sottraendo dalla $(i+1)^a$ riga del determinante (2) la i^a moltiplicata per $a_1 \cdot \prod_{j=1}^r q_j^{\binom{i-1}{j}}$, a cominciare dall'ultima fino alla seconda, si ricava

$$w = \begin{vmatrix} I & & I & \dots & I \\ 0 & a_2 - a_1 & & & a_n - a_1 \\ 0 & a_2 q_1 \cdot (a_2 - a_1) & & & a_n q_1 \cdot (a_n - a_1) \\ 0 & a_2^{2/q_1, q_2, \dots, q_r} \cdot q_1^2 q_2^{\binom{2}{2}} (a_2 - a_1) & \dots & & a_n^{2/q_1, q_2, \dots, q_r} \cdot q_1^2 q_2^{\binom{2}{2}} (a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2/q_1, q_2, \dots, q_r} \cdot \prod_{i=1}^r q_i^{\binom{n-2}{i}} \cdot (a_2 - a_1) \dots a_n^{n-2/q_1, q_2, \dots, q_r} \cdot \prod_{i=1}^r q_i^{\binom{n-2}{i}} \cdot (a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

Ponendo

$$a_i q_i = a_{i,i} \quad , \quad q_i \cdot q_{i+1} = q_{i,i+1} \quad , \quad \text{essendo} \quad i = 1, 2, \dots, r-1,$$

la precedente può scriversi

$$w = \prod_{s=2}^n (a_i - a_1) \cdot \begin{vmatrix} I & \dots & I \\ a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{1,2}^{2/q_{1,1}, q_{1,2}, \dots, q_{1,r-1}, q_r} & \dots & a_{1,n}^{2/q_{1,1}, q_{1,2}, \dots, q_{1,r-1}, q_r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,2}^{n-2/q_{1,1}, q_{1,2}, \dots, q_{1,r-1}, q_r} & \dots & a_{1,n}^{n-2/q_{1,1}, q_{1,2}, \dots, q_{1,r-1}, q_r} \end{vmatrix}.$$

Poichè quest'ultimo determinante è dello stesso tipo del determinante della (2), si ha

$$(4) \quad w = \prod_2^n (a_i - a_1) \cdot \prod_3^n (a_{1,i} - a_{1,2}) \cdot \prod_4^n (a_{2,i} - a_{2,3}) \cdots \\ \cdots \prod_n^n (a_{n-2,i} - a_{n-2,n-1}).$$

Tenuto presente che

$$a_{2,i} = a_{1,i} q_{1,1} = a_i q_1 \cdot q_1 q_2 = a_i q_1^2 q_2,$$

e

$$q_{2,i} = q_{1,i} q_{1,i+1} = q_i q_{i+1} \cdot q_{i+1} \cdot q_{i+2} = q_i q_{i+1}^2 \cdot q_{i+2}$$

e in generale quindi

$$a_{n-2,i} = a_i q_i^{\binom{n-2}{1}} \cdot q_2^{\binom{n-2}{2}} \cdots q_r^{\binom{n-2}{r}},$$

lo sviluppo (4) può scriversi

$$w = \prod_2^n (a_i - a_1) \cdot q_1^{n-2} \prod_3^n (a_i - a_2) \cdot (q_1^2 \cdot q_2)^{n-3} \cdot \prod_4^n (a_i - a_3) \cdots \\ \cdots \left[q_1^{\binom{n-2}{1}} \cdot q_2^{\binom{n-2}{2}} \cdots q_r^{\binom{n-2}{r}} \right]^{n-(n-1)} \cdot \prod_n^n (a_i - a_{n-1}).$$

L'esponente di q_i nella precedente è

$$\binom{i}{i} (n-i-1) + \binom{i+1}{i} (n-i-2) + \cdots + \binom{n-2}{i} [n-(n-1)] = \\ = \left[\binom{i}{i} + \binom{i+1}{i} + \cdots + \binom{n-2}{i} \right] n - \frac{1}{i!} [1^{\overline{i+1}} + 2^{\overline{i+1}} + \cdots + (n-i-1)^{\overline{i+1}}].$$

Ma

$$\sum_j^{n-i-1} j^{\overline{i+1}} = \frac{(n-i-1)^{\overline{i+2}}}{i+2} \quad (1)$$

quindi quell'esponente possiamo scriverlo:

$$n \cdot \binom{n-1}{i+1} - \frac{1}{i!} \cdot \frac{(n-i-1)^{\overline{i+2}}}{i+2} = \frac{n^{\overline{i+2}}}{(i+1)!} - \frac{n^{\overline{i+2}}}{i! (i+2)!} = \frac{n^{\overline{i+2}}}{(i+2)!} = \binom{n}{i+2}.$$

(1) Ved. CAPELLI, *Ist. di Anal. Alg.*, p. 231, 1891.

E quindi la (3) è dimostrata.

5. Se a_i sono i termini successivi della stessa progressione geometrica con $a_1 = 1$, $q_j = q^{(m-1)^j}$, $r \equiv n-1$, si ricava

$$\begin{aligned} a_s &= q^{m^s-1-1} \\ a^i q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_r &= q^{m^s-1-1} \cdot (q^{m^s-1-1} \cdot q^{m-1}) \cdot (q^{m^s-1-1} \cdot q^{m^2-1}) \cdot \dots \\ &\dots (q^{m^s-1-1} \cdot q^{m^{i-1}-1}) = q^{im^s-1 + \frac{m^i-m}{m-1}-2i+1}, \\ \prod_i q_j^2 \binom{n}{j+2} &= q^2 \binom{n}{3}^{(m-1)} \cdot q^2 \binom{n}{4}^{(m-1)^2} \dots q^2 \binom{n}{r}^{(m-1)^{n-2}} = \\ &= q^2 \frac{m^n-1-n(m-1)-\binom{n}{2}(m-1)^2}{(m-1)^2}, \\ \prod_2^n \prod_s^n \prod_i^r \left[q^{\binom{i-1}{j}-\binom{s-2}{j}-1} \right] &= \prod_2^n \prod_s^n \prod_i^r (q^{m^i-1-m^s-2}-1). \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} w = |a_{i+1,s}| &= \left| q^{im^s-1 + \frac{m^i-m}{m-1}-2i+1} \right| = q^2 \cdot \frac{m^n-1-n(m-1)-\binom{n}{2}(m-1)^2}{(m-1)^2} \\ &\cdot \prod_2^n \prod_s^n \prod_i^r (q^{m^i-1-m^s-2}-1). \end{aligned}$$

6. Se a_1, a_2, \dots, a_n sono i termini successivi della stessa progressione geometrica di ordine r , essendo sempre q_1, q_2, \dots, q_r i primi elementi rispettivamente della $1^a, 2^a, \dots, r^a$ progressione dedotte per quoziente dalla data, poichè

$$\begin{aligned} \prod_2^n \prod_s^n (a_i - a_{s-1}) &= a_1^{\binom{n}{2}} \prod_2^n \prod_s^n \left(\prod_i^r q_j^{\binom{i-1}{j}} - \prod_i^r q_j^{\binom{s-2}{j}} \right) = \\ &= a_1^{\binom{n}{2}} \prod_2^n \prod_i^r q_j^{\binom{s-2}{j}(n-s+1)} \cdot \prod_s^n \left(q_i^{\binom{i-1}{j}-\binom{s-2}{j}} - 1 \right) \end{aligned}$$

ed essendo l'esponente di q_j nell'ultima dato da

$$\binom{j}{j}(n-j-1) + \binom{j+1}{j}(n-j-2) + \dots + \binom{n-2}{j}[n-(n-1)] = \binom{n}{j+2},$$

risulta

$$w = a_1^{\binom{n}{2}} \prod_i^r q_j^2 \binom{n}{j+2} \cdot \prod_2^n \prod_s^n \prod_i^r \left[q_j^{\binom{i-1}{j}-\binom{s-2}{j}} - 1 \right].$$

Qualora fosse $q_2 = q_3 = \dots = q_r = 1$ e quindi a_i fossero i termini successivi di una progressione geometrica del 1° ordine, moltiplicando la 2^a , 3^a , \dots , n^a colonna di (2), scritto tenendo conto dell'ipotesi che ora consideriamo, rispettivamente per

$$a_1^{1/q_1}, \quad a_1^{2/q_1}, \dots, a_1^{n-1/q_1},$$

si ottiene un determinante di Hankel, i cui elementi generatori formano una progressione geometrica del 2° ordine. Indicando con K il valore di questo determinante di Hankel, è

$$K = a_1^{\binom{n}{2}} \cdot q_1^2 \binom{n}{3} \cdot \prod_i^{n-1} a_1^{i/q_1} \cdot \prod_2^n \prod_s^n \left[q_1^{\binom{i-1}{1}} - \binom{i-2}{1} - 1 \right].$$

Ma

$$\prod_2^n \prod_s^n (q_1^{i-s+1} - 1) = \prod_i^{n-1} (q_1^i - 1)^{n-i},$$

c

$$\prod_i^{n-1} a_1^{i/q_1} = \prod_i^{n-1} a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 \dots a_1 q_1^{i-1} = \prod_i^{n-1} a_1^i q_1^{\binom{i}{2}} = a_1^{\binom{n}{2}} \cdot q_1^{\binom{n}{3}},$$

quindi

$$K = a_1^2 \binom{n}{2} q_1^3 \binom{n}{3} \prod_i^{n-1} (q_1^i - 1)^{n-i} \quad (1).$$

Matematica. — *Trasporti non lineari: geometria di un sistema di equazioni alle derivate parziali del 2° ordine.* — II. *Le proprietà intrinseche del sistema.* Nota di ENEA BORTOLOTTI, presentata dal Corrisp. E. BOMPIANI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Trasporti non lineari: geometria di un sistema di equazioni alle derivate parziali del 2° ordine.* — III. *Altri operatori differenziali intrinseci. Le proprietà descrittive del sistema.* Nota di ENEA BORTOLOTTI, presentata dal Corrisp. E. BOMPIANI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica (Idrodinamica). — *Vortice libero regolarizzatore nel problema della lamina*. Nota di B. CALDONAZZO, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

La velocità di una corrente traslocircolatoria che investe una lamina rettilinea diviene in generale infinita negli estremi, per il fatto che essi sono salienti cuspidati. Solo per un particolare valore della circolazione C della corrente, in funzione del valore V della velocità all'infinito, dell'angolo β di quest'ultima con la lamina e della lunghezza $2l$ di questa, si può rendere finita in uno, ma soltanto in uno degli estremi.

È stato dimostrato recentemente ⁽²⁾ dal Cisotti come si possa regolarizzare il moto anche nell'altro estremo, col sovrapporre alla corrente il moto dovuto ad un vortice, di intensità C_1 , fisso in un punto interno al campo del moto, oppure il moto dovuto ad una sorgente aperta nel centro di uno dei bordi della lamina. Nel caso di un vortice regolarizzatore, ed è su questo che intendo richiamare l'attenzione, la sua intensità C_1 e quella C della circolazione della corrente, risultano completamente determinate, oltre che da V , l e β , dalla posizione del vortice. Se questo non è preventivamente supposto fisso, esso in generale si muove nella corrente, il suo moto risultando composto di quello dovuto alla corrente traslocircolatoria con quello autoindotto dal vortice su se stesso. Ne segue che i valori di C e C_1 che regolarizzano il moto, in quanto dipendono dalla posizione del vortice, dovrebbero variare al muoversi di questo. Ma C e C_1 devono restare costanti, perchè per ipotesi sul liquido non agiscono forze di massa, circostanza questa che vale più generalmente con forze di massa conservative, di potenziale uniforme. Perciò se il vortice regolarizzatore è libero, esso deve occupare una posizione in cui la sua velocità si annulla.

In questa breve Nota ricerco appunto se esistono e sotto quali condizioni posizioni di arresto per un vortice libero regolarizzatore. Le conclusioni a cui giungo sono le seguenti. È necessario anzitutto che la corrente all'infinito sia parallela alla lamina; sono allora possibili posizioni di arresto i punti dell'asse della lamina, e le circolazioni C e C_1 risultano determinate

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1936.

(2) U. CISOTTI, *Sulla regolarizzazione idrodinamica degli estremi di una lamina rettilinea*. « Mem. Pontif. Acad. Scientiarum », ser. III, vol. II, 1935. Mancando la circolazione il moto può venir regolarizzato mediante un secondo vortice, cfr. G. PERETTI, *Regolarizzazione degli estremi di una lamina rettilinea mediante coppie di vortici*. « Acta Pontif. Acad. Scientiarum », annus LXXXVIII, sess. VII, 1935.

dalla distanza del vortice dalla lamina, oltre che da V e da l . Le azioni dinamiche si riducono alla spinta di Kutta-Joukowski applicata nel centro della lamina. Tutte le posizioni di arresto sono però posizioni di equilibrio instabile, per cui in esse il vortice ha solo un arresto istantaneo e per conseguenza altrettanto istantanea risulta la regolarizzazione con un vortice libero.

Moto del liquido e moto del vortice. — Ricorrendo alla nota rappresentazione conforme del piano del moto tagliato dalla lamina rettilinea, di lunghezza $2l$, sul piano ζ forato dal cerchio $|\zeta| \leq 1$,

$$(1) \quad z = \frac{l}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right),$$

avendo posto con ciò l'origine delle $z = x + iy$ nel centro della lamina e la lamina stessa sull'asse reale x , sia $j = ae^{i\alpha}$, $a > 1$, il punto del piano forato immagine del punto del piano z in cui è situato il vortice regolarizzatore. La velocità del liquido dovuta alla corrente traslocircolatoria ed al vortice è (1)

$$(2) \quad w(\zeta) = \left\{ \frac{C_1}{\pi i l} \left(\frac{1}{\zeta - j} - \frac{1}{\zeta - j'} \right) + \frac{C}{\pi i l \zeta} + V(e^{-i\beta} - e^{i\beta} \zeta^{-2}) \right\} \frac{\zeta^2}{\zeta^2 - 1},$$

dove $j' = a^{-1}e^{i\alpha}$ è l'immagine reciproca di j rispetto alla circonferenza $|\zeta| = 1$.

La velocità del vortice è

$$(3) \quad w_0 = \left\{ \frac{C_1}{\pi i l} \frac{1 - a^2 j^2}{(a^2 - 1)(j^2 - 1)} j + \frac{C}{\pi i l j} + V(e^{-i\beta} - e^{i\beta} j^{-2}) \right\} \frac{j^2}{j^2 - 1};$$

La parte di questa velocità che proviene dagli ultimi due termini tra le $\{ \}$ si ottiene senz'altro dai termini corrispondenti della (2), facendovi $\zeta = j$ e costituisce la velocità che il vortice possiede per essere trasportato dalla corrente traslocircolatoria; l'altra parte che dipende da C_1 non si può dedurre allo stesso modo dal termine analogo della (2), che diventerebbe infinito, è la velocità indotta dal vortice su se stesso per la presenza dell'ostacolo (2).

(1) U. CISOTTI, loc. cit., p. 61, avendo scritto ora w in luogo di W e V in luogo di $2V/l$.

(2) Il termine in C_1 di w_0 si può ottenere ad es. dall'ultima formula a piedi pagina del N. 14 della mia Nota *Sui moti liquidi piani con vortice libero*. «Rendiconti Circolo Matematico di Palermo», to. LV, 1931, nella quale si faccia $\lambda = l/2$, $\zeta_0 = j$, $\rho_0 = a$, $C = C_1$.

Regolarizzazione col vortice libero in quiete. — Se si impone che la $w(\zeta)$ resti finita negli estremi della lamina, cioè per $\zeta = \pm 1$, si trovano le relazioni stabilite dal Cisotti (loc. cit., form. 16):

$$(4) \quad \begin{cases} C = \pi l V \left(a + \frac{1}{a} \right) \frac{\sin \beta}{\cos \alpha}, \\ C_1 = \pi l V \frac{a^4 + 1 - 2a^2 \cos 2\alpha}{a(a^2 - 1)} \frac{\sin \beta}{\cos \alpha}. \end{cases}$$

Imponendo ulteriormente che sia nulla la velocità del vortice, dalla (3) per le (4) seguono le due equazioni

$$\begin{aligned} 2a^2 \sin \alpha \sin \beta &= (a^2 - 1)^2 \cos(\alpha - \beta), \\ \frac{2a^2 \sin^2 \alpha \sin \beta}{\cos \alpha} &= (a^2 - 1)^2 \sin(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Essendo $a > 1$, si dimostra senza difficoltà che le eventuali soluzioni di questo sistema esistono solo per $\sin \beta = 0$, ciò che porta di conseguenza $\cos \alpha = 0$. Senza perdere in generalità, possiamo porre $\beta = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (corrente asintotica parallela alla lamina nel senso delle x positive). Però diventano ora indeterminati il primo membro della seconda equazione ed i secondi membri delle (4). Si ponga allora $\beta = 0$ ed $\alpha = \frac{\pi}{2}$ nelle (2) e (3). Si trova quindi che è $w_0 = 0$ per ogni $j = ia$ e che il moto è regolarizzato negli estremi quando al posto delle (4) si ha

$$(4') \quad \begin{cases} C = -\pi l V \frac{(a^4 - 1)(a^2 - 1)}{2a^3}, \\ C_1 = -\pi l V \frac{(a^4 - 1)(a^2 + 1)}{2a^3}. \end{cases}$$

Dopo ciò la velocità (2) del liquido si può scrivere

$$(5) \quad w(\zeta) = V + \frac{C}{\pi i l} \frac{a\zeta}{(\zeta - ia)(a\zeta - i)}.$$

Si riconosce facilmente che in punti simmetrici rispetto all'asse della lamina, ai quali nel piano rappresentativo ζ per la (1) corrispondono immagini simmetriche rispetto all'asse delle ordinate, la velocità w assume valori coniugati. Ne segue che le linee di corrente sono simmetriche ri-

petto all'asse della lamina. Negli estremi la velocità assume lo stesso valore finito

$$\frac{4a^2 - a^4 - 1}{2a^2} V = \left(1 - \frac{2b^2}{l^2}\right) V,$$

dove b è la quota del vortice sulla lamina, come segue dalla (1). Gli zeri di $w(\zeta)$ al crescere di a dal valore 1 al valore $(1 + \sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3}})/2$, e quindi al crescere di b da 0 al valore $l\sqrt{\sqrt{3}/2}$, dal centro del bordo superiore della lamina, dove coincidono, sdoppiandosi descrivono il bordo superiore e quindi quello inferiore, fino a coincidere nel centro inferiore, passando per gli estremi per $b = l/\sqrt{2}$. Allontanandosi ancora il vortice al di sopra della quota $l\sqrt{\sqrt{3}/2}$, i due zeri coincidenti descrivono l'asse delle y negative.

Azioni dinamiche. — La risultante delle azioni dinamiche sulla lamina si può valutare colla formula del Blasius

$$R_y + iR_x = -\frac{i}{2} \rho \int w^2 d\zeta,$$

ρ densità del liquido, integrando sul contorno della lamina. Tenuto conto di (1) e (5) si trova che detta risultante si riduce alla sola spinta di Kutta-Joukowski $R_y = -\rho VC$. Il momento delle azioni dinamiche, rispetto al centro della lamina è nullo. Infatti la rilevata simmetria del moto rispetto all'asse delle y importa la stessa simmetria per le pressioni dinamiche, per cui il centro della lamina è anche il centro di pressione.

Introducendo nella (4') l'altezza b del vortice, che per la (1) è legata ad a ed l dalla relazione

$$al = b + \sqrt{b^2 + l^2},$$

si ottiene

$$C = -4\pi V b l^{-2} \sqrt{b^2 + l^2}, \quad C_x = -4\pi V b l^{-2} (b^2 + l^2).$$

Si ottiene quindi in particolare

$$R_y = 4\pi\rho V^2 b^2 l^{-2} \sqrt{b^2 + l^2},$$

positiva, per cui la spinta è diretta verso il vortice.

Instabilità del vortice. — La velocità (3) del vortice, in un generico punto χ del piano del moto, individuato da una ζ di modulo r , essendo ora $\beta = 0$, tenuto conto delle espressioni di C e C_1 ora stabilite, assume la forma

$$w_0 = V + 4iV \frac{h^2 + l^2}{l^3} \frac{h(1 - r^2\zeta^2)}{(r^2 - 1)(\zeta^2 - 1)} + \sqrt{h^2 + l^2} \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1}.$$

Come w , anche w_0 in punti simmetrici rispetto all'asse della lamina assume valori coniugati. Le possibili traiettorie del vortice sono quindi esse pure simmetriche rispetto allo stesso asse. Su quella che passa per la posizione $\chi = ih$ di equilibrio consideriamo due punti equidistanti da questa posizione. In essi le componenti delle velocità secondo x sono eguali, quelle secondo y sono eguali ed opposte. Perciò il vortice, se spostato a monte della posizione di equilibrio tende a tornarvi, spostato a valle se ne allontana definitivamente. Quindi in $\chi = ih$ il vortice ha un arresto istantaneo e l'equilibrio vi è instabile ⁽¹⁾.

(1) Nel caso in cui la lamina è investita normalmente da una corrente puramente traslatoria, il moto può essere regolarizzato mediante una coppia di vortici; se questi sono liberi anche in questo caso (H. VILLAT, *Leçons sur la théorie des tourbillons*, p. 182) la posizione di equilibrio della coppia è sempre instabile.

Meccanica. — *Irrotazionalità asintotica di ogni corrente stazionaria di fluido perfetto soggetto a forze conservative.* Nota di G. LAMPARIELLO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Si consideri un fluido perfetto, anche comprimibile, soggetto a forze conservative.

Supponiamo che esso riempi tutto lo spazio S , a connessione lineare semplice, esterno ad una o più superficie chiuse, e sia animato da moto stazionario, traslatorio all'infinito (corrente traslatoria).

Sia \mathbf{v} il vettore che definisce il campo delle velocità delle particelle fluide.

Poichè, per ipotesi, il moto ha carattere asintoticamente traslatorio, se r è la distanza dall'origine O del generico punto $P(x_1, x_2, x_3)$ di S , si ha

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{v} = \mathbf{v}_0,$$

essendo \mathbf{v}_0 un vettore costante non nullo.

Ci proponiamo qui di approfondire l'indagine del comportamento del moto al tendere di r all' ∞ , ciò che è lo stesso, trattando $\frac{1}{r}$ come infinitesimo principale.

L'ipotesi ora specificata è che, a meno di infinitesimi, il moto si riduce ad una corrente traslatoria.

Ma tale non è a rigore ed è allora interessante ricercare quale sia l'andamento generale del divario da quello stato elementare di moto, divario che, per ipotesi, va attenuandosi per $r \rightarrow \infty$.

Per raggiungere lo scopo, sarà necessario e sufficiente di discutere il termine principale di $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ (ammesso che un tale termine esista). Dimosteremo che

TEOREMA. — Se la differenza $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ ammette una decomposizione del tipo

$$(1) \quad \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \mathbf{w} + \mathbf{w}^*,$$

essendo

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{u}}{r^m}, \quad m > 1,$$

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1936.

u analitico sulla superficie sferica σ col centro in O e raggio unitario e

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^m w^* = 0,$$

il moto del fluido è asintoticamente irrotazionale.

In modo preciso, esiste ed è unica una funzione armonica Φ , nulla all' ∞ , tale che

$$(2) \quad w = \text{grad } \Phi.$$

Il potenziale asintotico di velocità Φ è semiregolare ⁽¹⁾ all'infinito, ammette cioè una rappresentazione del tipo

$$\Phi = \frac{f(\theta, \varphi)}{r^{m-1}},$$

essendo $f(\theta, \varphi)$ una funzione analitica (indipendente da r) delle coordinate polari θ, φ del generico punto Q di σ .

Se $m = 2$, Φ è del tipo

$$\Phi = \frac{f(\theta, \varphi)}{r}$$

ed $f(\theta, \varphi)$ è funzione armonica delle variabili

$$\varphi, \quad \zeta = \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta, \quad 0 \leq \theta < \pi.$$

2. Per la dimostrazione, giova premettere il seguente

LEMMA. — Se v_0 è un vettore costante e $w(P)$ un vettore posizionale, nullo all' ∞ , di ordine > 1 , tale che

$$(3) \quad \operatorname{rot} \{ \operatorname{rot} w \wedge v_0 \} = 0,$$

- 1) il derivato di w nella direzione di v_0 è irrotazionale;
- 2) esiste ed è unica una funzione Φ , nulla all' ∞ , tale che

$$w = \text{grad } \Phi.$$

Scegliamo gli assi cartesiani (ortogonali) in modo che la direzione e il verso di v_0 siano quelli dell'asse x , orientato positivamente.

Poniamo per brevità

$$\omega = \operatorname{rot} w, \quad \Omega = \operatorname{rot} w \wedge v_0.$$

(1) Cfr. G. LAMPARIELLO, *Comportamento all'infinito di usali funzioni del posto*. « Rend. Lincei », ser. 6^a, vol. XXII, 1935, p. 557.

Allora, essendo $\omega_i (i = 1, 2, 3)$ le componenti di ω , quelle di Ω sono

$$\Omega_1 = v_0 \omega_2, \quad \Omega_2 = -v_0 \omega_1, \quad \Omega_3 = 0.$$

Se quindi i, j, k sono i versori fondamentali, si ha

$$\text{rot } \Omega = v_0 \left\{ \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} i + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} j - \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \right) k \right\}.$$

Ma $\text{rot } w$ è solenoidale, tale cioè che

$$\text{div rot } w = \sum_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} = 0,$$

dunque

$$\text{rot } \Omega = v_0 \frac{\partial \omega}{\partial x_3} = v_0 \frac{\partial}{\partial x_3} \text{rot } w.$$

Segue, per l'ipotesi fatta, poichè $v_0 \neq 0$, che

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \text{rot } w = 0.$$

Essendo il rotore invertibile con la derivazione parziale, concludiamo che

$$(4) \quad \text{rot } \frac{\partial w}{\partial x_3} = 0,$$

cioè il vettore derivato di w rispetto ad x_3 è irrotazionale.

Essendo gli operatori div , rot invarianti rispetto ad un cambiamento di assi, resta dimostrata la prima affermazione contenuta nel Lemma, la quale è valida anche se w non si annulla all' ∞ .

Per dimostrare la seconda parte del Lemma, osserviamo che dalla (4) segue l'esistenza di infinite funzioni $\Phi^* + c$, essendo c una costante arbitraria, tali che

$$\frac{\partial w}{\partial x_3} = \text{grad } (\Phi^* + c),$$

la Φ^* essendo caratterizzata dal suo valore in un punto P_0 prefissato a piacere.

Quando, come nel caso attuale, si tratta di un vettore che si annulla all' ∞ di ordine > 1 , si può anche assumere P_0 a distanza infinita ⁽¹⁾, ossia ritenere

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi^* = 0.$$

(1) Cfr. G. LAMPARIELLO, Nota cit.

Consideriamo ora la funzione

$$\Phi = - \int_{x_3}^{\infty} \Phi^* (x_1, x_2, \xi) d\xi.$$

Questa è l'unica funzione, nulla all' ∞ , talè che

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = \Phi^*.$$

È allora subito visto che

$$w = \text{grad } \Phi.$$

Basta infatti considerare l'integrale

$$w = - \int_{x_3}^{\infty} \text{grad } \Phi^* d\xi,$$

le cui componenti sono

$$\begin{aligned} w_1 &= - \int_{x_3}^{\infty} \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_1} d\xi, & w_2 &= - \int_{x_3}^{\infty} \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_2} d\xi, \\ w_3 &= - \int_{x_3}^{\infty} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \xi} d\xi = \Phi^* = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Queste sono le derivate rispetto alle x di Φ e l'asserto è dimostrato.

3. Ciò posto, consideriamo l'equazione idrodinamica fondamentale ⁽¹⁾

$$(5) \quad a = \text{grad } (U - P),$$

nella quale, come è noto, a è l'accelerazione assoluta della generica particella fluida, U è il potenziale delle forze di massa e

$$P = \int \frac{dp}{\rho},$$

essendo p e ρ rispettivamente la pressione e la densità del fluido nel punto P .

Si sa che, per i moti stazionari, si ha

$$(6) \quad a = \text{rot } v \wedge v + \text{grad } \frac{1}{2} v^2$$

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, « Compendio di meccanica razionale », vol. 2°. Bologna, Zanichelli.

ed allora la (5) assume la forma

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = \operatorname{grad} (U - P - \frac{1}{2} v^2).$$

Ne segue, applicando il rotore ad ambo i membri, che

$$(7) \quad \operatorname{rot} \{ \operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} \} = 0.$$

Conformemente alle ipotesi dell'enunciato del teorema (n. 1), ammettiamo che \mathbf{w}^* , di ordine $> m$, soddisfi alle condizioni (specificate nella Nota cit. di questi « Rend. ») per cui si possa affermare che le sue derivate parziali del 1° e 2° ordine siano rispettivamente di ordini maggiori di $m + 1$ ed $m + 2$.

Con queste precisazioni di comportamento all' ∞ , possiamo affermare che $\operatorname{rot} \mathbf{w}$ è di ordine $m + 1$ e $\operatorname{rot} \mathbf{w}^*$ di ordine $> m + 1$.

Dunque, i termini principali di $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ e $\operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}$ sono rispettivamente $\operatorname{rot} \mathbf{w}$ e $\operatorname{rot} \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}_0$; ne segue che il termine principale del primo membro di (7) è $\operatorname{rot} \{ \operatorname{rot} \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}_0 \}$.

Ma allora segue asintoticamente la (3) ed è applicabile il Lemma del n. prec.

4. Le seguenti considerazioni mostrano che il potenziale asintotico di velocità Φ è una funzione armonica e giustificano le proprietà enunciate al n. 1, nel caso $m = 2$.

L'equazione di continuità per i moti stazionari è

$$(8) \quad \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Se si ammette che

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho = \rho_\infty,$$

essendo ρ_∞ costante non nulla, la differenza $\rho \mathbf{v} - \rho_\infty \mathbf{v}_0$ è infinitesima con $\frac{1}{r}$ e il suo termine principale è $\rho_\infty \mathbf{w}$.

Ne segue che il termine principale di $\operatorname{div} (\rho \mathbf{v})$ è $\rho_\infty \operatorname{div} \mathbf{w}$ e quindi dalla (8) segue, asintoticamente

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 0.$$

Dunque, in virtù di (2), Φ soddisfa all'equazione di Laplace

$$\Delta_2 \Phi = 0.$$

Il potenziale asintotico Φ è infinitesimo con $\frac{1}{r}$ di ordine $m - 1$ ed è semiregolare all' ∞ nel senso specificato nella nostra Nota citata.

Esso è rappresentabile nella forma

$$\Phi = \frac{f(\theta, \varphi)}{r^m - 1},$$

essendo f una funzione analitica dei coseni α_i ($i = 1, 2, 3$) della generica direzione di S o, ciò che è lo stesso, del punto Q di σ .

Se $m = 2$, Φ è del tipo

$$(9) \quad \Phi = \frac{f(\theta, \varphi)}{r}.$$

Sia allora la variabile ζ legata a θ dalla relazione ⁽¹⁾:

$$(10) \quad \zeta = \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta.$$

L'equazione di Laplace nelle variabili r, θ, φ è

$$(11) \quad \Delta_2 \Phi \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) = 0.$$

Ponendo per Φ l'espressione (9), si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Ma, per la (10) è

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} = \frac{\partial f}{\partial \theta} \sin \theta, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right),$$

dunque

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0$$

e la f è armonica nelle due variabili ζ, φ .

Così, nel caso $m = 2$, la ricerca dei potenziali asintotici nello spazio è ricondotta all'equazione di Laplace in due variabili.

(1) Se denotiamo con Γ l'operatore

$$\Gamma = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right),$$

si ha

$$\Delta_2 \Phi = \frac{1}{r^3 \sin^2 \theta} \Gamma f.$$

Si riconosce che Γ è l'operatore di Laplace per la proiezione di Mercator dei punti della sfera riferiti a coordinate polari sul piano di proiezione.

5. Possiamo ora domandarci se il teorema del n. 1 valga anche per i fluidi viscosi.

Mostreremo che, in generale, esso non sussiste.

Per rendersene conto, basterà analizzare la classica soluzione di Oseen⁽¹⁾.

Intanto osserviamo che, dall'equazione fondamentale per i fluidi viscosi incompressibili, soggetti a forze conservative

$$(12) \quad \rho \mathbf{a} = \rho \operatorname{grad} U - \operatorname{grad} p - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}$$

(μ coefficiente di viscosità) segue, tenendo conto di (6) e applicando il rotore ad ambo i membri, che

$$(13) \quad \operatorname{rot} \{ \operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} + \nu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} \} = 0,$$

con $\mu = \nu \rho$.

Ammettendo di poter rappresentare \mathbf{v} nel modo espresso nell'enunciato del teorema del n. 1 e con le specificazioni relative ai vettori \mathbf{w} e \mathbf{w}^* , ne seguirebbe l'irrotazionalità asintotica, perchè il termine principale della condizione (13) di compatibilità cinematica è quello stesso che si avrebbe se fosse $\nu = 0$.

Ma le ipotesi che \mathbf{w} sia di ordine $m > 1$ e che il

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^m \mathbf{w} = \mathbf{u}$$

sia analitico su σ , necessarie per l'esistenza del potenziale asintotico sono incompatibili con la soluzione di Oseen.

Prima di porre in evidenza questa circostanza, conviene osservare che non si potrebbe trarre partito dalla soluzione di Stokes⁽²⁾, per la eventuale constatazione della irrotazionalità, perchè la detta soluzione prescinde dal termine d'inerzia $\rho \mathbf{a}$ che implica il termine di ordine minimo nella rappresentazione di \mathbf{v} .

Invece, seguendo Oseen, poniamo nella (12)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)$$

e nell'ipotesi di assenza di forze di massa, trascuriamo i termini di 2° ordine rispetto a $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$.

Poichè, per i moti stazionari, si ha

$$\mathbf{a} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} v_i,$$

(1) Cfr. H. LAMB, *Hydrodynamics*, sixth ed., 1932, pp. 610-611. Cambridge, University Press.

(2) Cfr. H. LAMB, loc. cit., pp. 602-603.

si è condotti all'equazione

$$(12') \quad v_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta_2 \mathbf{v},$$

dove $\Delta_2 \mathbf{v}$ rappresenta il vettore ⁽¹⁾ di componenti $\Delta_2 v_i$ ($i = 1, 2, 3$) ed x denota, per semplicità di scrittura, l'asse che, per ipotesi, ha la stessa direzione e lo stesso verso del vettore costante \mathbf{v}_0 .

Oseen trova per \mathbf{v} la seguente espressione

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - \psi \mathbf{i} + \frac{1}{2k} \text{grad } \psi - \text{grad } \Phi,$$

essendo \mathbf{i} il versore dell'asse x , $v_0 = 2k\nu$, Φ una funzione armonica del tipo

$$\Phi = \sum_0^\infty a_n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{1}{r}$$

e

$$\psi = \frac{a}{r} e^{-k(r-x)},$$

(le a sono costanti).

Posto

$$\mathbf{w} = -\psi \mathbf{i},$$

si riconosce che non sussiste la irrotazionalità di \mathbf{w} .

Si ha

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \psi = \lim_{r \rightarrow \infty} a e^{-k(1-\alpha)r} = \begin{cases} a & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } -1 \leq \alpha < 1. \end{cases}$$

Dunque \mathbf{w} è infinitesimo di primo ordine con $\frac{1}{r}$, ma il vettore

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \mathbf{w} = \mathbf{u}$$

ammette un'unica componente, non identicamente nulla, che è discontinua su σ .

(1) Si ricordi che, in generale, si ha

$$\Delta_2 \mathbf{v} = -\text{grad div } \mathbf{v} - \text{rot rot } \mathbf{v}.$$

Se \mathbf{v} è solenoidale, si ha

$$\Delta_2 \mathbf{v} = -\text{rot rot } \mathbf{v}.$$

Meccanica. — *Seconda forma delle equazioni della turbolenza nell'ipotesi di una direzione di trasporto.* Nota di G. D. MATTIOLI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una precedente Nota inserita in questi « Rendiconti » ⁽²⁾ ho iniziato la sistematizzazione delle mie ricerche nel campo della teoria della turbolenza, ed in particolare ho ivi indicato la forma che le equazioni indefinite della teoria assumono nel caso (isotropo) in cui il trasporto turbolento di masse abbia intensità costante in tutte le direzioni attorno ad ogni punto. Le equazioni procedenti da questa ipotesi sono dunque, in particolare, invarianti per una rotazione degli assi.

Ora, per quanto esistano osservazioni sperimentali che convaliderebbero questa ipotesi *nei riguardi cinematici* ⁽³⁾, non si può *a priori* affermare — nè le esperienze dicono alcunchè in proposito — che a questa isotropia cinematica faccia riscontro una isotropia dinamica. Ciò può benissimo darsi che la velocità media d'agitazione turbolenta sia costante per tutte le direzioni attorno ad un punto, mentre non sia tale il processo dinamico caratteristico del fenomeno turbolento, cioè il trasporto da ogni punto nella regione intorno di quantità e di momento di quantità di moto. Infatti siffatto trasporto è conseguenza di una disgregazione della massa fluida, e questa disgregazione avviene plausibilmente con probabilità (si tratta certo di un fatto statistico) diverse secondo la direzione istantanea della perturbazione del moto medio espressa dalle u', v', w' , atteso che il campo cinematico del moto medio è, anche rapidamente, variabile attorno ad ogni punto.

In questa Nota indico quindi una seconda forma, logicamente possibile, per le equazioni della turbolenza in relazione alla seguente ipotesi: esiste per ogni punto una direzione privilegiata secondo cui solamente avviene il trasporto di quantità e di momento di quantità di moto.

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1936.

(2) *Sforzi interni nei mezzi turbolenti ed equazioni generali della turbolenza.* « Rend. Lincei », vol. XXII, 1935, p. 49.

(3) Si è osservato che i valori massimi delle velocità d'agitazione turbolenta u', v', w' , sono, in ogni punto della massa turbolenta, eguali; tranne che nelle immediate vicinanze delle pareti. È quindi costante il massimo del modulo della velocità d'agitazione per tutte le direzioni attorno ad un punto. [A. FAGE, « Proc. Roy. Soc. A. », 135, 1932, pp. 656, 828].

I. SECONDA FORMA DELLE EQUAZIONI DELLA TURBOLENZA.

Ammettiamo dunque che per ogni punto esista una direzione s secondo la quale solamente si operi il trasporto turbolento. Vedremo poi quale potrà essere la sua definizione intrinseca.

Come equazioni indefinite valgono ancora le (8), (9) della Nota citata (che sarà nel seguito citata: I); basterà solamente assegnare le nuove espressioni dei vettori t_x, t_y, t_z , rappresentanti gli sforzi interni, e delle quantità $\frac{\partial \lambda^2}{\partial x}$ ecc., in relazione al modificato criterio di agitazione turbolenta.

Caratterizziamo la direzione di trasporto con un versore $s \equiv s_1$, a cui associamo altre due direzioni s_2, s_3 che particolarizzeremo poi, in modo da avere in ogni punto una terna triortogonale congruente a quella degli assi x, y, z . Segue poi, evidentemente, la possibilità di considerare una terna di congruenze ortogonali.

Allo scopo di realizzare una scrittura concisa, indichiamo con t_i , ($i = x, y, z$), gli sforzi relativi agli elementi superficiali paralleli ai piani coordinati $y\lambda, \dots$; e con t_β , ($\beta = 1, 2, 3$), quelli relativi alla terna s_1, s_2, s_3 . Più generalmente gli indici greci si riferiranno sempre a quest'ultima. Siano $\alpha_{i\beta}$ i coseni direttori della direzione s_β rispetto all'asse i ($i = x, y, z$); allora, come è noto dalla statica dei sistemi continui,

$$(I) \quad t_i = \alpha_{i\beta} t_\beta \quad ; \quad i = x, y, z \quad ; \quad \beta = 1, 2, 3,$$

dove conveniamo di sopprimere il segno di sommatorio, precisando che quando un indice è ripetuto due volte s'intenda di sommare su di esso. Come si è detto sopra, basterà assegnare le espressioni dei t_β ; quindi i t_i determinati dalle (I) sostituiti nella (8, I) daranno a questa equazione la sua nuova forma.

I vettori t_i sono stati posti uguali alla somma di tre termini

$$t_i = \tau_i + \nu_i + \sigma_i$$

dove: τ_i è il componente proveniente dal trasporto di quantità di moto; ν_i è quello viscoso (i corrispondenti tensori di entrambi sono simmetrici); σ_i proviene dal momento di massa M (il tensore σ_{ij} è emisimmetrico). Nella Nota I, τ_i e ν_i erano conglobati nell'unico vettore τ_i , in quanto la loro definizione era analoga; ciò che invece non sarà attualmente.

Occupiamoci intanto di τ_i . Si calcola elementarmente⁽¹⁾ che l'eccesso di quantità di moto che attraversa nel tempo uno l'unità di superficie pa-

(1) *Ricerche sulla meccanica dei moti fluidi turbolenti.* « Rend. Sem. Matem. di Padova », vol. IV, 1933, p. 67.

rallela a $s_2 s_3$ nel verso negativo della direzione privilegiata di trasporto s_1 ,
 è $= \rho \varepsilon \frac{dv}{ds_1}$, s_1 essendo l'arco lungo le linee di s_1 .

A questo trasporto di quantità di moto corrisponde quindi lo sforzo sulla faccia positiva $s_2 s_3$,

$$(2) \quad \tau_1 = \rho \varepsilon \frac{dv}{ds_1},$$

che assumiamo come completa espressione del vettore τ_1 . In questa affermazione si precisa l'ipotesi del trasporto nella sola direzione s_1 . Gli altri due vettori τ_2, τ_3 corrispondono a direzioni secondo cui il trasporto dinamico è nullo: essi contengono quindi solamente le azioni tangenziali alle relative faccie richiamate da τ_1 in conseguenza della coerenza del mezzo, e determinate dalla condizione che sia nullo il momento degli sforzi agenti su un elemento di massa. Porremo dunque ($\tau_{\alpha\beta}$ componenti di τ_α su s_β):

$$(3) \quad \tau_{21} = \tau_{12} \quad ; \quad \tau_{31} = \tau_{13} \quad ; \quad \tau_{22} = \tau_{33} = \tau_{23} = \tau_{32} = 0,$$

che, con le (2), completano la definizione dei τ_β .

Noto subito che la definizione ora adottata per i τ_β implica, in generale, una modificazione della definizione corrente di pressione, quale media degli sforzi normali; i quali, considerata a parte la pressione, hanno una somma nulla. Attualmente invece, siccome τ_{11} potrà essere $\neq 0$, mentre si è posto $\tau_{22} = \tau_{33} = 0$, sarà $\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} \neq 0$, e quindi pure $t_{11} + t_{22} + t_{33} \neq 0$, atteso che nei riguardi di v_β e σ_β la condizione ordinaria sarà soddisfatta. Volendo, si potrebbe in più modi ritrovare la definizione abituale di pressione; ad es. ponendo anche $\tau_{11} = 0$; oppure sottraendo ai $\tau_{\beta\beta}$ ora definiti un terzo del valore che per τ_{11} risulta dalla (2). Non è possibile dare *a priori* una preferenza ad una di queste definizioni, anche perchè la pressione nel caso turbolento aspetta ancora la sua definizione (sono note agli sperimentatori le difficoltà di misurarla). D'altronde, nella trattazione dei problemi particolari sarà generalmente necessario ricorrere ad approssimazioni che riducano trattabili le equazioni generali; e siffatte approssimazioni condurranno in particolare a trascurare τ_{11} quando non sia già nullo esattamente. Se non altro per motivi di semplicità, ritengo quindi di lasciar sussistere questa anomalia rispetto alle posizioni abituali; che potrebbe del resto anche non essere tale, ma corrispondere ad una realtà fisica.

Come sarà detto più innanzi, assumeremo la direzione di trasporto normale alla velocità v del moto medio. Assumendo allora s_2 tangente a v , calcoliamo le componenti $\tau_{\alpha\beta}$ dei vettori τ_α secondo la terna s_1, s_2, s_3 .

Siano i_i i versori relativi agli assi x, y, z ; allora $s_\beta = \alpha_{i\beta} i_i$, e quindi $i_i = \alpha_{i\beta} s_\beta$, mentre $v = v s_2$, cioè $v = v \alpha_{i2} i_i$. Si ricava, i versori i_i essendo costanti,

$$\frac{dv}{ds_1} = \frac{d(v \alpha_{i2})}{ds_1} \alpha_{i\beta} s_\beta$$

da cui, richiamando le identità tra i coseni direttori, scendono subito le componenti richieste

$$(4) \quad \tau_{11} = \rho \varepsilon v \frac{d\alpha_{i2}}{ds_1} \alpha_{i1} \quad ; \quad \tau_{12} = \tau_{21} = \rho \varepsilon \frac{dv}{ds_1} \quad ; \quad \tau_{13} = \tau_{31} = \rho \varepsilon v \frac{d\alpha_{i2}}{ds_1} \alpha_{i3}.$$

Si ha poi $\tau_\beta = \tau_{\beta\alpha} s_\alpha = \tau_{\beta\alpha} \alpha_{j\alpha} \hat{e}_j$; e quindi per le (1)

$$(5) \quad \tau_i = \tau_{\beta\alpha} \alpha_{j\alpha} \alpha_{i\beta} \hat{e}_j$$

che forniscono subito le componenti τ_{ij} degli sforzi da introdurre nelle (8, I).

Passiamo ora alle componenti di v_i , σ_i , per le quali conserviamo le definizioni adottate nella Nota I. Poniamo quindi ancora

$$(6) \quad v_{xx} = \rho v \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \quad ; \quad v_{xy} = v_{yz} = \rho v \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

ed analoghe;

$$(7) \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0 \quad ; \quad \sigma_{xy} = -\sigma_{yz} = \frac{M_x}{2} \quad \text{e due analoghe};$$

dove M_x, M_y, M_z sono le componenti del momento di massa esercitato dal sistema dei girostati sul fluido, per il quale vale ancora la posizione (10, I) che ora preciseremo nei riguardi del vettore di turbolenza ψ . Le (8, I) si scriveranno, in conclusione, ponendo ivi $t_i = \tau_i + v_i + \sigma_i$.

Passiamo quindi a considerare l'equazione (9, I) del momento di rotazione.

Attraverso l'unità d'area ortogonale alla direzione di trasporto s_1 passa un eccesso di quantità $\rho \lambda^2 \omega$ nel verso negativo di s_1 uguale a $\rho \varepsilon \frac{d\lambda^2 \omega}{ds_1}$; per cui le faccie parallele ai piani coordinati yz ecc. sono attraversate, per unità d'area e di tempo, in eccesso nel verso negativo corrispondente, dalle quantità $\rho \varepsilon \frac{d\lambda^2 \omega}{ds_1} \alpha_{i1}$ di grandezza $\rho \lambda^2 \omega$ (α_{i1} essendo i coseni della direzione di trasporto rispetto agli assi), che sostituiscono nella (9, I) rispettivamente le quantità $\rho \varepsilon \frac{\partial \lambda^2 \omega}{\partial x}$, Questa equazione diventa dunque

$$(8) \quad \rho \frac{d\lambda^2 \omega}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \varepsilon \frac{d\lambda^2 \omega}{ds_1} \alpha_{x1} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \varepsilon \frac{d\lambda^2 \omega}{ds_1} \alpha_{y1} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \varepsilon \frac{d\lambda^2 \omega}{ds_1} \alpha_{z1} \right) - \mathbf{M}.$$

È chiaro che le equazioni così modificate potranno essere trasferite facilmente con referenza alla terna di congruenze associate a s_1, s_2, s_3 ; ciò che, quando questa costituisca una terna coordinata, semplificherebbe notevolmente la scrittura delle equazioni in tali coordinate. Ometto, per brevità, questo semplice calcolo formale; anche perchè, nei problemi che vale la pena di trattare, particolarmente semplici nei riguardi delle limitazioni geometriche del campo, converrà procedere direttamente alla costruzione delle equazioni in base ai criteri sopra espressi.

2. DEFINIZIONE DELLA DIREZIONE DI TRASPORTO.

La determinazione delle modalità della disgregazione, circostanza base del fenomeno turbolento, è una questione di stabilità; aggravata dalla necessità di considerare perturbazioni finite e da un punto di vista statistico. È noto che il metodo classico delle piccole perturbazioni condusse sempre a risultati negativi, cioè a *non* riconoscere la formazione di turbolenza. Quando, e se, questo problema sarà risolto, potrà risultare convalidato: o il criterio isotropo della prima forma della teoria, o quello della direzione privilegiata di trasporto della seconda; che schematizzano i casi estremi tra gli infiniti possibili *a priori*. Per il momento non si può far altro che ragionare in linea di plausibilità.

Ora, è appunto plausibile che un elemento si disgreghi dalla massa con maggiore probabilità quando, in seguito ad un impulso che esso riceve, sia sollecitato a spostarsi nella direzione di massima rapidità di variazione del campo cinematico; e si può ritenere che questa direzione è, all'incirca, ortogonale alla velocità del moto medio. Assumeremo dunque s ortogonale a v . Per determinarla completamente occorre un altro dato; che può essere suggerito da condizioni di simmetria del campo del moto, quando ve ne siano. Ad es. per i tubi circolari, tale direzione sarà quella del raggio; e per i canali quella ortogonale alle pareti.

Da un punto di vista più generale, la definizione di s può essere completata considerando il vortice ω . Un filetto vorticoso ha certo maggiori probabilità di disgregarsi per una perturbazione ortogonale ad esso, che, esaltando nell'intorno perturbato la velocità, può dar facilmente luogo a pressioni nulle o negative, e quindi alla disgregazione. Si può quindi tentare la seguente definizione intrinseca della direzione di trasporto s : *essa è in ogni punto ortogonale sia alla velocità media v che al vortice medio ω .*

Nei casi semplici (tubi circolari, canali ecc.) la s , pure compatibilmente con la precedente definizione, ha una determinazione assegnabile *a priori*: prima cioè di integrare le equazioni. Nei tipi di problemi più complessi, il tener conto *esattamente* della definizione di s , condurrebbe presto a complicazioni formali insormontabili. Converrà quindi in pratica proce-

dere a delle approssimazioni: quella che potrà forse essere adottata in certi casi, è questa.

Siccome in effetti le manifestazioni turbolente interessano uno strato di piccolo spessore adiacente alle pareti, la congruenza delle linee s potrà essere fatta coincidere con quella delle normali alla parete in tutta la regione influenzata da quella parete. Si ritrova così la direzione del vettore di turbolenza d'attrito ψ definita nella Nota I.

Nei riguardi teorici possiamo ora precisare ψ così: ψ è un vettore tangente a s , diretto dalla parete verso la massa fluida, di modulo $= \chi v^*$ costante lungo ogni linea s ; essendo v^* il valore di $\sqrt{\frac{t_0}{\rho}}$ nel punto della parete da cui parte la particolare linea s che passa per il punto considerato, e χ la costante universale di turbolenza.

3. OSSERVAZIONE FINALE.

Nel caso dei canali rettilinei le due forme della teoria coincidono; sono diverse le equazioni che si traggono nel caso dei tubi circolari e dei canali ricurvi. Per i tubi si ha corrispondenza con la realtà fisica per le equazioni dedotte dalla seconda forma (che sono quelle da me considerate in precedenti pubblicazioni); quelle ricavate dalla prima forma sono nettamente in disaccordo. Non ho ancora trattato il caso dei canali ricurvi (in particolare il caso Couette), ma già da una prima ispezione che porta sulla espressione della tensione tangenziale, sembra ancora che valga la seconda teoria.

Meccanica. — *Equazione energetica della turbolenza e condizioni d'integrazione delle equazioni indefinite.* Nota di G. D. MATTIOLI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

La questione che ho trovato più difficile a definire soddisfacentemente nelle mie ricerche sul problema della turbolenza è stato quello di precisare le condizioni al contorno (o agli estremi) atte a individuare in ogni problema l'integrale corrispondente, ed in modo che questo s'accordi con la realtà fisica.

Nella Nota *Sopra l'influenza della viscosità del fluido nei regimi turbolenti* (« Acc. Torino », vol. 70, 1935) ho proposto una prima soluzione di questo problema, almeno limitatamente al caso dei tubi; che però manca di generalità, perchè contiene ancora, in fondo, degli aggiustamenti empirici relativi al particolare problema di efflusso considerato. Mi sembra ora di poter affermare che queste deficienze dovevano necessariamente manifestarsi, perchè in quella Nota, guidato da un criterio di successive approssimazioni — per così dire — ho intenzionalmente trascurato l'azione del momento di massa **M** proveniente dagli elementi vorticosi (girostatì, come li ho brevemente chiamati) nella presunzione — del resto valida a distanza dalle pareti — che la sua influenza sia quantitativamente piccola. Nell'immediata vicinanza delle pareti non è invece così: il momento **M** dà luogo a sforzi (asimmetrici) dello stesso ordine di grandezza di quelli prodotti dal trasporto di quantità di moto. È chiaro, quindi, che una formulazione delle condizioni di parete non può essere ottenuta se non considerando essenzialmente anche **M**; vale a dire che la teoria, come l'ho proposta, deve essere, in questo riguardo, considerata nella sua completezza senza amputazioni che sono legittime (in sede di approssimazione) solo oltre una certa distanza dalle pareti.

Tra le condizioni al contorno avevo introdotto, per necessità empirica, uno strisciamento, Δ , del fluido alle pareti; cioè avevo ammesso che la velocità nei punti delle superficie che delimitano la massa turbolenta fosse diversa da zero. La equazione energetica, che qui costruirò, indicherà che la considerazione di siffatto strisciamento è necessaria nei riguardi teorici; per cui cessa di sussistere il carattere empirico che, finora, gli si doveva attribuire.

Le condizioni alle pareti che determinano univocamente l'integrale in tutto il campo del moto comprendono, oltre l'assegnazione della velocità

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1936.

(lo strisciamento ora detto, per il quale varrà ancora la precedente determinazione sia pur modificata quantitativamente), quella delle derivate della velocità, prima e seconda, lungo la direzione di trasporto. Mentre sembra possibile fare un'affermazione valida in ogni caso riguardo alla derivata prima, non è possibile assegnare la derivata seconda nei punti delle pareti *indipendentemente dalla forma del campo*. Riferiamoci infatti ai casi semplici dei tubi e canali: le equazioni di secondo ordine cui si giunge contengono una costante d'integrazione cui si deve attribuire in ciascuno dei due casi un valore opportuno per ottenere le curve sperimentali, e tale che nei due problemi menzionati la derivata seconda della velocità risulta diversa alla parete. La determinazione non empirica di siffatta costante (che in generale diverrà una funzione di una o due variabili), e quindi la precisa formulazione delle complessive condizioni d'integrazione, dipende assai probabilmente dalla soluzione del problema di stabilità che ho prospettato nella Nota precedente; che è, in fondo, il problema della disgregazione, e quindi della formazione di turbolenza.

I. — EQUAZIONE ENERGETICA.

Riprendiamo l'equazione (8.I) ⁽¹⁾

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho \mathbf{F} + \frac{\partial \mathbf{t}_i}{\partial x_i} - \text{grad } p,$$

dove, per brevità, scriviamo x_i per x, y, z , e s'intenda di sommare sull'indice ripetuto due volte. Per \mathbf{t}_i valgono le determinazioni indicate in I e II secondo che si considera la prima o la seconda forma della teoria.

Moltiplicando scalarmente per \mathbf{v} risulta

$$\frac{\rho}{2} \frac{dv^2}{dt} = \rho \mathbf{F} \times \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{t}_i \times \mathbf{v}) - \mathbf{t}_i \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} - \text{grad } p \times \mathbf{v},$$

che integriamo in una regione S limitata dalla superficie Σ . Trasformando in superficiali due integrali di volume, nell'ipotesi $\rho = \text{cost}$, risulta facilmente

$$(I) \quad \frac{d}{dt} \iiint_S \frac{\rho}{2} v^2 dS = \iiint_S \rho \mathbf{F} \times \mathbf{v} dS + \iint_{\Sigma} p \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma - \\ - \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{t}_i \alpha_i d\sigma - \iiint_S \mathbf{t}_i \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} dS;$$

(1) *Sforzi interni nei mezzi turbolenti ed equazioni generali della turbolenza*. « Rend. Lincei », vol. XXII, 1935, p. 49. (Sarà citata I); *Seconda forma delle equazioni della turbolenza nell'ipotesi di una direzione di trasporto*. « Rend. Lincei », questo stesso vol., p. 49. (Sarà citata II).

dove \mathbf{n} , di coseni direttori α_i , è la normale *interna* alla Σ , cioè diretta verso il campo del moto.

Si ha intanto $\alpha_i \mathbf{t}_i = -\mathbf{t}_0$, denotando con \mathbf{t}_0 lo sforzo interno relativo agli elementi superficiali del fluido tangente a Σ , e sulla faccia appoggiata a Σ .

Consideriamo poi il termine

$$(2) \quad \mathbf{t}_i \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} = (\mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i) \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} + \boldsymbol{\sigma}_i \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i},$$

nel quale isoliamo la parte proveniente dagli sforzi asimmetrici $\boldsymbol{\sigma}_i$. L'integrale

$$(3) \quad \Phi_i = \iiint_S (\mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i) \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} dS$$

generalizza al caso turbolento la nota *funzione di dissipazione* del caso viscoso; e rappresenta l'energia dissipata entro la massa — ad esclusione cioè di eventuali dissipazioni alle pareti — in conseguenza dell'agitazione turbolento-viscoso e per quanto dipende dal trasporto di quantità di moto. Si ricava infatti che Φ_i ha — nella prima forma della teoria — l'espressione

$$\Phi_i = \iiint_S \rho (\varepsilon + \nu) \{ 2 (a^2 + b^2 + c^2) + e^2 + f^2 + g^2 \} dS$$

con a, b, \dots, g componenti di deformazione (cfr. le espressioni di $\mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i$ della Nota I, ivi conglobati in \mathbf{r}_i), che è la forma classica della funzione di dissipazione. Ometto, per brevità, analoga espressione di Φ_i nella seconda teoria.

Sviluppando poi l'ultimo termine della (2), ad es. passando attraverso le componenti di \mathbf{v} e di $\boldsymbol{\sigma}_i$ indicate in I e II, si trova che

$$\boldsymbol{\sigma}_i \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} = -\frac{1}{2} \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} \rho \lambda^2 \psi_i \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial x_i} \times \boldsymbol{\omega} = \frac{\rho}{4} \lambda^2 \psi \frac{d\boldsymbol{\omega}^2}{ds_i}$$

avendo posto $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$, e adottato per il momento \mathbf{M} la definizione precisata in II, per la quale il vettore ψ_i è tangente alla linea di trasporto \mathbf{s}_i , che supponiamo orientata dalla parete verso l'interno. In conclusione l'equazione (I) diviene

$$(4) \quad \frac{d}{dt} \iiint_S \frac{\rho}{2} v^2 dS = \iiint_S \rho \mathbf{F} \times \mathbf{v} dS + \iint_{\Sigma} p \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma - \Phi_i + \\ + \iint_{\Sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{t}_0 d\sigma - \frac{1}{4} \iiint_S \lambda^2 \psi \frac{d\boldsymbol{\omega}^2}{ds_i} dS;$$

nella quale: i primi due termini del secondo membro rappresentano il lavoro fatto sul fluido dalle forze di massa e dalla pressione; il terzo termine l'energia dissipata per trasporto di quantità di moto; e l'ultimo termine dà il lavoro eseguito dagli elementi girostatici sulla massa fluida quando sono da questa assorbiti. Esamineremo più innanzi il termine rimanente.

Riprendiamo ora la seconda equazione (8, II)

$$(5) \quad \rho \frac{d\lambda^2 \omega}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \varepsilon \frac{d\lambda^2 \omega}{ds_1} \alpha_{i1} \right) - \mathbf{M}.$$

Il calcolo che segue può essere farlo anche a partire dalla (9, I) della prima teoria. Lo sviluppo per la seconda che ritengo sia quella esatta; avvertendo però che le particolari conclusioni cui si arriverà sono le stesse nei due casi; a parte l'espressione della funzione di dissipazione.

Moltiplicando la (5) scalarmente per ω , tenendo presente che $\rho = \text{cost.}$ che α_{i1} sono i coseni direttori della direzione di trasporto di cui indichiamo con \mathbf{s}_1 il versore tangente, e che λ^2 è costante lungo s_1 , risulta

$$\frac{1}{2} \rho \frac{d\lambda^2 \omega^2}{dt} = \frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varepsilon \alpha_{i1} \frac{d\lambda^2 \omega^2}{ds_1} \right) - \rho \lambda^2 \varepsilon \left(\frac{d\omega}{ds_1} \right)^2 + \frac{\rho}{2} \psi \lambda^2 \frac{d\omega^2}{ds_1};$$

ed integrando in S, dopo un'integrazione parziale,

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \iiint_S \frac{1}{2} \rho \lambda^2 \omega^2 dS = - \iint_{\Sigma} \frac{\rho}{2} \varepsilon \lambda^2 \frac{d\omega^2}{ds_1} \mathbf{s}_1 \times \mathbf{n} d\sigma - \\ - \iiint_S \rho \varepsilon \lambda^2 \left(\frac{d\omega}{ds_1} \right)^2 dS + \iiint_S \frac{\rho}{2} \lambda^2 \psi \frac{d\omega^2}{ds_1} dS.$$

Finora non sappiamo quale sia l'energia da attribuire, per unità di volume, al sistema di girostatici disseminati in S; ma che sarà certamente $= k \frac{1}{2} \rho \lambda^2 \omega^2$, con k numero puro da determinare, per analogia con la forza viva di un solido rotante. Ora, l'ultimo termine della (6), cambiato in segno, deve rappresentare, per la sua origine, il lavoro eseguito dai girostatici sul fluido nella fase di assorbimento. Nulla si può dire *a priori* sulle modalità di questo fenomeno; se cioè avviene senza o con dissipazione d'energia. È probabile che se dissipazione c'è, questa sia una frazione piccola dell'energia meccanica ceduta: ammettiamo pertanto che si tratti di un fatto meccanico puro, senza dissipazione (questa ipotesi è del resto rivedibile senza che le conclusioni che seguono restino qualitativamente alterate).

Segue allora che si deve assumere $k = \frac{1}{2}$, in quanto i due ultimi termini di (4) e (6) (moltiplicata per k) sono allora la stessa quantità (con segni

opposti). Moltiplicando dunque (6) per $\frac{1}{2}$ e sommando alla (4) otteniamo l'equazione energetica complessiva

$$(7) \quad \frac{d}{dt} \iiint_S \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{\rho \lambda^2 \omega^2}{4} \right) dS = \iiint_S \rho \mathbf{F} \times \mathbf{v} dS + \iint_{\Sigma} p \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma - \Phi + \\ + \iint_{\Sigma} \left(\mathbf{v} \times \mathbf{t}_0 - \frac{\rho}{4} \epsilon \lambda^2 \frac{d\omega^2}{ds_1} \mathbf{s}_1 \times \mathbf{n} \right) d\sigma;$$

avendo posto

$$(8) \quad \Phi = \Phi_1 + \iiint_S \frac{\rho}{2} \epsilon \lambda^2 \left(\frac{d\omega}{ds_1} \right)^2 dS,$$

che rappresenta la funzione di dissipazione (nella massa) globale.

Veniamo ad interpretare l'ultimo termine della (7), nel caso di turbolenza d'attrito in cui sono presenti cioè delle pareti rigide. Estendiamo il campo S fino a tutte o parte di siffatte pareti, e sia Σ' la porzione di Σ coincidente con esse; Σ'' la rimanente. Il prodotto $-\mathbf{v} \times \mathbf{t}_0$ rappresenta, per unità di superficie e di tempo, il lavoro del fluido sull'ambiente esterno a Σ : perciò su Σ'' (superficie tracciata entro la massa) esprime l'interazione tra massa in S ed esterna, e può quindi avere un segno qualunque; mentre sui punti di Σ' deve invece rappresentare l'energia ceduta per la realizzazione dei fenomeni di parete, che sono: cessione di quantità di moto da parte delle particelle che sbattono contro la parete, produzione di vorticità e conseguente incremento di energia girostatica. Entrambe queste manifestazioni esigono dispendio d'energia: per cui sui punti di Σ' dovrà essere $-\mathbf{v} \times \mathbf{t}_0 > 0$, ciò che in particolare esige che sia $\mathbf{v} \neq 0$. *Ed ecco come appare la necessità di ammettere uno strisciamento alla parete.*

È ovvio poi attribuire a

$$(9) \quad -\frac{\rho}{4} \epsilon \lambda^2 \frac{d\omega^2}{ds} \mathbf{s}_1$$

il significato di *flusso* di energia girostatica. Infatti questa è prodotta sia alle pareti che entro la massa all'atto della disgregazione, e si diffonde nel fluido dove sarà dissipata (secondo termine dell'espressione di Φ) secondo la direzione di trasporto \mathbf{s} ; e d'altronde il coefficiente numerico nella (9) è l'eccesso di siffatta energia che attraversa gli elementi superficiali ortogonali ad \mathbf{s} nel verso di \mathbf{s} . Sui punti di Σ' , il verso di \mathbf{s} proveniente dalla parete, si tratta dunque di una quantità essenzialmente positiva. Globalmente, in ogni caso, l'integrale superficiale di (7) esteso a Σ' in quanto contiene anche l'energia dissipata per urto alle pareti deve essere negativo; e, cambiato di segno, costituisce quindi un termine aggiuntivo alla funzione di dissipazione.

2. - CONDIZIONI AL CONTORNO PER L'INTEGRAZIONE.

Non si possono evidentemente fissare *a priori*; occorre piuttosto analizzare alcuni casi semplici alla luce dei fatti sperimentali, e procurare di ritrovarli nell'integrale corrispondente, dal quale si ricaveranno le condizioni agli estremi. Sarebbe desiderabile certamente che queste ammettessero una formulazione costante, indipendente dalla forma del campo. Ma le cose non vanno esattamente così; e certo necessariamente, perchè come si è detto nell'introduzione, manca ancora la soluzione del problema di stabilità — o meglio di instabilità — in cui s'identifica quello della disgregazione, e nel quale la forma del campo interviene certo essenzialmente. Ignorando ancora siffatta soluzione, nel caso dei tubi e canali, una costante d'integrazione (che risulta in una prima integrazione della seconda equazione) deve per ora essere determinata empiricamente. Per il resto valgono delle condizioni alla parete per l'integrale che ammettono una formulazione costante.

Intanto, come ho ripetuto più volte, per il modulo ψ del vettore di turbolenza d'attrito vale la posizione

$$\psi = \chi v^* \quad , \quad v^* = \sqrt{\frac{t_0}{\rho}} \quad ,$$

con $\chi = 0.406$, *costante universale di turbolenza d'attrito*, t_0 essendo lo sforzo, tangenziale, alla parete. Inoltre ψ è assunto costante lungo ogni linea di trasporto in tutta la regione influenzata dalla parete.

La considerazione della legge empirica di Prandtl, secondo cui, presso le pareti, il rapporto $\frac{v}{v^*}$ è una funzione universale di $y \frac{v^*}{\nu}$ (y = distanza normale dalla parete, ν viscosità cinematica) ci porta a porre

$$\lambda^2 = 2\beta \frac{\nu^2}{\chi v^{*2}}$$

con β numero puro, *seconda costante universale di turbolenza*, per la quale dalle prime valutazioni risulta un valore prossimo a 5.

Con queste posizioni la legge di Prandtl si ritrova, esattamente nel caso di un gradiente di pressione nullo nel verso di v (trascinamento turbolento operato da superficie mobili), altrimenti con grande approssimazione nella regione presso le pareti (con questa limitazione è stata del resto verificata sperimentalmente).

Dopo ciò risultano in buon accordo con la realtà fisica gli integrali delle equazioni generali (seconda forma) determinati con le seguenti condizioni alla parete:

$$v = v^* \Delta, \Delta = \text{strisciamento adimensionale} = 7.30,$$

$$\frac{dv}{dn} = \frac{v^{*2}}{\nu}.$$

È plausibile che queste ultime condizioni abbiano (o meglio si possa attribuire loro) un carattere universale; ciò che del resto si vedrà considerando ulteriori casi di turbolenza d'attrito. Nel caso di *turbolenza libera*, $\psi = 0$, e alle condizioni sulle pareti si sostituiscono condizioni all'infinito che portano ad esigere l'annullarsi degli sforzi.

Meccanica. — *Sulle equazioni del moto vibratorio di un ponte percorso da carichi inerti e molleggiati.* Nota di G. KRALL, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Limiti per le vibrazioni di un ponte qualunque percorso da carichi mobili con velocità uniforme.* Nota di G. KRALL, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Una nuova funzione di corrente per lo studio del moto rotazionale dei gas.* Nota di L. CROCCO, presentata dal Socio A. CROCCO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Idraulica. — *Sul tracciamento dei profili di correnti liquide permanenti gradualmente varie.* Nota di G. NEBBIA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. GIORDANI.

1. Il tracciamento dei profili longitudinali di correnti permanenti gradualmente varie, che assai spesso si richiede in problemi di rigurgito, salvo alcuni casi di alvei prismatici a sezione trasversale di definita configurazione geometrica, si esegue operando sulla espressione differenziale del moto permanente gradualmente vario trasformata opportunamente in modo da farvi comparire in forma esplicita le coordinate che si assumono per la rappresentazione della curva che si cerca. procedimenti che ne risultano sono nel caso generale laboriosissimi, e talvolta praticamente inapplicabili. Scopo della presente Nota è di segnalare sinteticamente un metodo, che verrà ampiamente illustrato in più opportuna sede, assai più semplice e che può trovare pratica applicazione quale che sia la configurazione dell'alveo e la natura della corrente liquida, nell'ambito del moto permanente e gradualmente vario.

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1936.

2. L'equazione del moto permanente gradualmente vario per correnti libere può scriversi:

$$(1) \quad -\frac{d}{ds} \left(\chi + h + \frac{\alpha V^2}{2g} \right) = J$$

in cui indichiamo con χ l'ordinata rispetto ad una orizzontale generica del punto più depresso del contorno della sezione di ascissa s ; con h la profondità della corrente valutata rispetto allo stesso punto; con α , V , g , rispettivamente il coefficiente correttivo della potenza cinetica, la velocità media, e l'accelerazione di gravità; con J infine la dissipazione unitaria di carico per attrito, per la quale, col criterio di approssimazione comunemente accetto, adotteremo le leggi del moto uniforme.

Il termine $\chi + h + \frac{\alpha V^2}{2g}$ rappresenta l'energia totale specifica, riferita cioè all'unità di peso, che la corrente nella sezione s possiede rispetto all'orizzontale di riferimento, e la linea, che ha per ordinate precisamente i valori $\chi + h + \frac{\alpha V^2}{2g}$ e per ascisse i corrispondenti valori di s , è detta linea dell'energia. Il primo membro di (1) rappresenta adunque la pendenza I della linea dell'energia. La (1) si può scrivere sinteticamente:

$$(2) \quad I = J.$$

Poniamo ancora:

$$(3) \quad H = h + \frac{\alpha V^2}{2g}$$

od anche, introducendo la portata Q e l'area ω della sezione bagnata:

$$(4) \quad H = h + \frac{\alpha Q^2}{2g \omega^2}.$$

Ad H , che misura l'energia specifica totale valutata rispetto al punto più depresso della sezione, si dà nome di carico totale.

Assumiamo per J una qualsiasi delle numerose espressioni proposte; tanto per fissare le idee e per semplificare le espressioni, scegliamo una formula monomia $J = K R^\beta V^2$.

Sostituendo in (2), tenuto conto di (3) si deduce:

$$(5) \quad I = K' R^\beta (H - h)$$

in cui R è il raggio medio e $K' = \frac{2gK}{\alpha}$ è un coefficiente, non puramente numerico che, a parità di liquido, di temperatura, di α ecc., dipende solo dalla scabrosità delle pareti e dall'unità di misura lineare adottata.

3. Consideriamo un tronco di corrente, compreso tra le sezioni o ed 1, sezioni di nota configurazione. Sia Δs la lunghezza del tronco, di cui è dato il profilo del fondo dell'alveo e la natura delle pareti, e supponiamo ancora che le caratteristiche del tronco, finito ma sufficientemente breve, consentano di valutare le corrispondenti perdite di carico in base ai valori medi del tronco. Siano infine dati gli elementi del moto nella sezione o, cioè

$$H_o, h_o, Q.$$

La (4), che contiene ω funzione di h , non si presta in generale ad essere risolta rispetto ad h ; ammettiamo tuttavia che ci riesca di trovare un metodo, e chiariremo in seguito quale esso sia, che ci consenta di ricavare in modo molto semplice da (4) h quando siano dati H e Q .

In tali ipotesi, sostituendo in (5) gli elementi relativi alla sezione o, si calcola un valore I_o , che attribuiremo all'intero tronco Δs ; essendo noto il profilo del fondo ed H_o , si valuta senza difficoltà H_1 , da cui a mezzo di (4) si risale ad h_1 . In una seconda approssimazione potremo sostituire in (5) gli elementi medi $\frac{R_o + R_1}{2}$ e $\frac{1}{4}(\sqrt{H_o - h_o} + \sqrt{H_1 - h_1})^2$, con che ricaveremo un valore medio I_{o-1} , da cui si valutano nuovi valori H_1 ed h_1 , più approssimati del carico totale e della profondità massima nella sezione 1. E si può eventualmente continuare, per successive approssimazioni o per falsa posizione, sino a raggiungere quel grado di approssimazione che si desidera; ma in generale risultano sufficienti pochi tentativi. Determinata comunque la profondità h_1 , resta individuato il profilo della corrente nel tratto o — 1.

Il metodo seguito conduce adunque ad operare, con il solito procedimento delle successive approssimazioni, sulla relazione (5) anziché sull'espressione differenziale del profilo della corrente, la quale è sempre di molto più complessa di (5).

4. Resta però a vedere come (4) si presti a fornire in modo semplice i valori di h corrispondenti ad assegnati valori di H e di Q .

E nell'esaminare questo lato della questione, che è poi anche quello di maggior peso, considereremo separatamente il caso di una sezione per cui valga una relazione monomia del tipo:

$$(6) \quad \omega = b h^n$$

e quello di una sezione generica che non risponda ad una relazione del tipo (6).

Al primo caso si riconducono le sezioni rettangolari, $n = 1$, le sezioni a sponde paraboliche, $n = 1.5$, quelle triangolari, $n = 2$, e, in via di approssimazione, la gran parte delle sezioni di alvei naturali o di canali in terra; nel secondo rientrano tutte le altre sezioni di definita configurazione

geometrica (circolari, trapezie, ovoidali ecc.) e in genere le sezioni di alvei naturali od artificiali per cui non ci riesca di trovare una relazione del tipo (6) di sufficiente approssimazione.

5. Per una sezione adunque per cui valga (6), posto $q = \frac{Q}{b}$, (4) può assumere la forma:

$$(4') \quad (H - h) h^{2n} = \frac{\alpha q^2}{2g}.$$

Convenzionalmente chiameremo q portata unitaria. Chiamiamo H_q il carico totale minimo compatibile con una data portata unitaria q , e sia h_q la corrispondente profondità. Ponendo, nella derivata di (4') rispetto ad h , $\frac{\partial H}{\partial h} = 0$, si ricava, per q costante:

$$(7) \quad h_q = \sqrt[2n+1]{\frac{n\alpha}{g} q^2}$$

$$(8) \quad H_q = \frac{2n+1}{2n} h_q = \frac{2n+1}{2n} \sqrt[2n+1]{\frac{n\alpha}{g} q^2}.$$

Risulta anche agevolmente che q è la massima portata unitaria compatibile col carico H_q .

In generale, se in una sezione il deflusso avviene sotto il carico minimo compatibile con la data portata, la corrente si dice ivi allo stato critico e la profondità critica separa le correnti lente ($h > h_q$) dalle correnti veloci ($h < h_q$).

Assegnato uno dei tre elementi H , h , q , restano definiti gli altri che a quello corrispondono in uno stato critico. Per evitare confusioni chiameremo:

$H_q; h_q; q$ gli elementi di uno stato critico di data portata q .
 $H_h; h; q_h$ quelli corrispondenti ad uno stato critico di data profondità h .
 $H; h_H; q_H$ quelli relativi allo stato critico di assegnato carico totale H .

Tra gli elementi di ciascuna delle tre terne precedenti sussistono, con gli opportuni cambiamenti di indici, le relazioni (7) ed (8).

Ciò posto, dividendo (4') per $\frac{\alpha q^2}{2g}$, per h^{2n+1} o per H^{2n+1} si ricava:

$$(9) \quad \left[\frac{H}{\left(\frac{\alpha q^2}{2g} \right)^{\frac{1}{2n+1}}} - \frac{h}{\left(\frac{\alpha q^2}{2g} \right)^{\frac{1}{2n+1}}} \right] \left[\frac{h}{\left(\frac{\alpha q^2}{2g} \right)^{\frac{1}{2n+1}}} \right]^{2n} = 1$$

$$(10) \quad 2n \left(\frac{H}{b} - 1 \right) = \left(\frac{q}{q_b} \right)^2$$

$$(11) \quad 2n \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^{2n+1} \left(1 - \frac{b}{H} \right) \left(\frac{b}{H} \right)^{2n} = \left(\frac{q}{q_H} \right)^2.$$

Ciascuna delle precedenti può considerarsi come una relazione tra due variabili adimensionali e può pertanto, nel campo che interessa il problema fisico, essere rappresentata con una curva piana, valevole quale che sia il valore assoluto delle grandezze in gioco, la quale consente una semplice soluzione del problema propostoci: determinazione di b quando siano dati H e Q o, ciò che è equivalente, H e q , e la natura, lenta o veloce, della corrente.

La (11) offre il vantaggio di avere coordinate variabili tra 0 ed 1, e le calcolazioni occorrenti per determinare i rapporti $\frac{q}{q_H}$ possono essere semplificate con l'uso della curva adimensionale

$$(12) \quad \frac{q_{H'}}{q_{H''}} = \left(\frac{H'}{H''} \right)^{\frac{2n+1}{2}} = \left(\frac{b_{H'}}{b_{H''}} \right)^{\frac{2n+1}{2}}$$

che ha per coordinate i rapporti tra le grandezze omologhe di due generici stati critici, di carichi totali H' ed H'' .

Le relazioni (12) si ottengono agevolmente dalle (8) scritte per due carichi H' ed H'' .

Se si osserva ancora che $\frac{q}{q_H}$ rappresenta il rapporto tra la portata in atto e la massima compatibile a parità di carico, così che acquista all'incirca il significato di un rendimento; e che $1 - \frac{b}{H}$ è l'aliquota dell'energia specifica totale che si riscontra allo stato cinetico, mentre $\frac{b}{H}$ è quella che si riscontra allo stato potenziale ed ha pertanto spiccata analogia col grado di reazione di una turbina idraulica, alla (11) si può dare la seguente interpretazione:

In una sezione, per cui sussista una espressione monomia tra le aree bagnate e le corrispondenti profondità massime, il rendimento del deflusso dipende unicamente dal grado di reazione della corrente nella sezione e dall'esponente della relazione monomia.

Ricorrendo ad una unità di misura ausiliaria H_* , dividendo (4') per H_*^{2n+1} , tenendo presenti le (8) si ricava:

$$(13) \quad 2n \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^{2n+1} \left(\frac{H}{H_*} - \frac{b}{H_*} \right) \left(\frac{b}{H_*} \right)^{2n} = \left(\frac{q}{q_{H_*}} \right)^2.$$

La quale, ove si attribuisca ad $\frac{H}{H_*}$ una serie di valori compresi tra 0 ed 1, dà luogo ad una serie di curve, cioè ad un abaco, che consente ulteriori semplificazioni nelle risoluzioni numeriche del problema propostoci.

Analogamente (11) e (12) possono fornire abachi ordinando le curve rispetto alla variabile n .

Questi ultimi abachi possono riuscire particolarmente utili per problemi riguardanti alvei naturali, e praticamente basta limitare il campo di variazione di n tra 1 e 2.

6. Nel caso infine di una sezione di forma generica, data la sezione, sapremo sempre determinare il valore di ω corrispondente ad un dato h , anche se ci manchi il significato esplicito del legame f della relazione $\omega = f(h)$. La (4) può quindi ancora intendersi come una relazione tra le tre variabili indipendenti H, h, Q .

Si individui, tra tutte le sezioni di una data forma e pertanto geometricamente simili, una di data grandezza a mezzo di un parametro lineare caratteristico D . Assumiamo una unità di misura ausiliaria H_* , legata al parametro D dalla relazione $H_* = aD$, in cui a è una costante che va stabilita per ciascuna forma di sezione in base ad opportuni criteri. Nella sezione di data forma e di assegnata grandezza consideriamo una particolare condizione di movimento cui corrispondano i valori H_*, h_*, ω_*, Q_* che soddisfino (4), e poniamo:

$$(14) \quad H_* = k \frac{Q_*^2}{2g\omega_*^2}$$

in cui k risulta un numero puro.

Dividendo (4) per (14) si ha:

$$(15) \quad k \left(\frac{H}{H_*} - \frac{h}{H_*} \right) \left(\frac{\omega}{\omega_*} \right)^2 = \left(\frac{Q}{Q_*} \right)^2.$$

L'introduzione dell'unità ausiliaria H_* ci ha consentito adunque di dedurre da (4) la (15) cioè una relazione adimensionale, che è pertanto valevole quali che siano i valori assoluti delle grandezze in gioco, e può dar luogo ad una rappresentazione grafica in tutto analoga a quella esaminata per (13), per rispetto alla quale presenta l'unica differenza nel fatto che l'unità di misura ausiliaria H_* non può essere assunta ad arbitrio, ma risulta definita quando sia fissato a ed assegnata la grandezza della sezione.

Se si assume per a il più grande valore che può interessare nei problemi pratici, e per la condizione di moto definita da (14) quella che dà luogo alla maggiore portata possibile sotto il carico H_* , le coordinate dell'abaco impostato su (15) potranno contenersi ancora tra 0 ed 1.

Un abaco così costruito risulta valevole per tutte le sezioni di una stessa forma, cioè geometricamente simili; e fornisce direttamente, in corrispondenza di carichi e portate valutati rispettivamente nelle unità ausiliarie H. e Q., le profondità corrispondenti nell'unità H..

I passaggi dalle unità ausiliarie alle unità pratiche, ed i passaggi inversi, possono essere agevolati dall'uso di rappresentazioni grafiche delle relazioni:

$$\frac{D'}{D''} = \frac{H'}{H''} = \left(\frac{\omega'}{\omega''} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{Q'}{Q''} \right)^{\frac{2}{5}}$$

che legano i rapporti tra le grandezze omologhe di due condizioni di movimento cinematicamente simili, e che si deducono in base a ben noti criteri di similitudine cinematica.

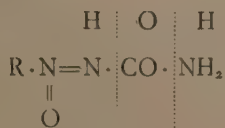
Per semplificare anche le calcolazioni, da eseguire su (5), conviene corredare gli abachi delle curve $\frac{R}{H} = f\left(\frac{b}{H}\right)$ o delle equivalenti $\frac{R}{D} = f\left(\frac{b}{D}\right)$ che sono caratteristiche di ciascuna forma di sezione.

Chimica. — *Sopra i derivati azossicarbonici*⁽¹⁾. Nota di E. JOLLES, presentata⁽²⁾ dal Socio G. PELLIZZARI.

Come è noto gli eteri azossicarbonici descritti da Pieroni⁽³⁾, possono dare luogo, per azione degli alcali, alla duplice reazione: a) di copulazione con previa formazione del diazoidrato normale; b) di scissione nel corrispondente nitroarile e ammoniacca, secondo lo schema:



Ancora non si è riusciti ad operare un'analogia scissione per i corrispondenti derivati amidici, ai quali viene assegnata una struttura identica a quella degli eteri carbonici suddetti⁽⁴⁾. In questo caso si ha solo la formazione del diazoidrato normale:



(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica della R. Università di Firenze.

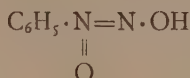
(2) Nella seduta del 5 gennaio 1936.

(3) « Gazz. », 54, 162 (1924).

(4) A. ANGELI, « R. A. L. », 26, 1° sem., 207 (1917).

il cui riscontro in questa reazione ebbe importanti ripercussioni nel campo degli studi sulla costituzione dei diazocomposti ⁽¹⁾.

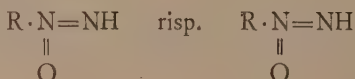
Tale diverso comportamento delle due serie di derivati, degli azossietteri da una parte e delle amidi dall'altra, non è stato ancora soddisfacentemente spiegato, nè la soluzione del quesito affrontata in pieno. Tuttavia è degna di nota l'osservazione fatta in proposito da Angeli ⁽²⁾ che cioè la nitrosofenilidrossilamina:



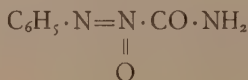
che si può ottenere dall'idrossilamina e dal nitrobenzolo, non si scinde per azione di agenti saponificanti nei due componenti che l'hanno formata.

Un contributo sperimentale in merito a tale questione che tante polemiche ha suscitato nel passato, era realmente desiderato ed è quindi con molto interesse che ho letto nell'ultimo fascicolo della « Gazzetta » ⁽³⁾ quanto Oddo e Indovina rilevano in tale senso.

Gli AA. predetti dopo avere tra l'altro confutato le argomentazioni di Angeli per l'adozione delle formule da quest'ultimo proposte per i diazoidrati e diazotati normali:



premettono che una delle basi sperimentali più salienti in favore del punto di vista di Angeli è costituita dal fatto che la fenilazossicarbonamide fornisce, per azione degli alcali, il diazoidrato normale. D'altra parte rilevando che a differenza degli azossietteri ed in analogia agli stessi diazoidrati, non si è mai verificata la formazione del nitrobenzolo dall'amide predetta, mettono in dubbio la costituzione che Angeli ha assegnato a questa ultima ed ammettono che in essa l'ossigeno anzichè all'azoto fenilico è unito a quello carbonilico, come nella formula riportata appresso:



Conformemente alla nota legge dell'azione protettiva che il gruppo

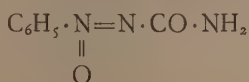


(1) Cfr. le numerose pubblicazioni comparse in seguito da diverse parti.

(2) « R. A. L. », 31, 1° sem., 286 (1922).

(3) « Gazz. », 65, 1117, 1122 e 1124 (1935).

esercita sul nucleo aromatico ad esso unito, rispetto ai reagenti sostituenti ⁽¹⁾, l'isomero predetto sarebbe suscettibile di sostituzioni, mentre l'altro



non dovrebbe venire attaccato.

In relazione a tale norma, gli AA. succitati credono di convalidare la loro supposizione con alcune esperienze preliminari e precisamente sottopongono all'azione del bromo la fenilazossicarbonamide di Angeli, pervenendo, a seconda delle condizioni in cui operano, a quattro distinti prodotti. Così, con acqua di bromo a freddo separano un composto a p. f. 102/103° che ritengono prodotto di addizione. Operando invece a caldo, notano la separazione spontanea di un prodotto color arancione contenente bromo, a p. f. 220°, mentre dalle acque madri decolorate con SO₂ estraggono con etere un composto bianco che cristallizzato dall'acqua sotto forma di aghi bianchi, esenti da bromo, fonde a 142° con svolgimento di bollicine gassose, torna a solidificare per raffreddamento per poi rifondere ripetutamente a 136° e suppongono trattarsi dell'acido fenilazossicarbonico non ancora conosciuto. Infine separano dalle acque madri eteree di estrazione un composto a p. f. 75° che non copula con β = naftolo ed asseriscono che tutto ciò dimostra quanto sia affrettata la decisione presa da Angeli sulla costituzione dell'azossicarbonamide e le sue relazioni con quella dei diazocomposti.

Malgrado le proprie esperienze, testè riassunte, G. Oddo e R. Indovina ammettono più tardi, con evidente contraddizione, che anche se al composto di Angeli competesse la costituzione da quest'ultimo assegnata, deve avere luogo, in seguito all'azione degli alcali, una trasposizione dell'ossigeno dal primo azoto al secondo, prima che si liberi il diazoidrato normale. Senza spiegare perchè la stessa trasposizione non possa avere luogo anche per gli azossietteri, gli AA. predetti credono di chiarire in questo modo l'interessante quesito da me in prima pagina illustrato.

Avendo io tre anni or sono ⁽²⁾ stabilito la posizione dell'atomo di ossigeno nell'assetto molecolare di alcune azossicarbonilidi, ho ritenuto opportuno nonchè doveroso prendere immediata posizione nei riguardi dei risultati sperimentali conseguiti da Oddo e Indovina, soprattutto a causa dell'importante ripercussione che i predetti risultati potrebbero avere. Tanto più ciò s'imponeva, in quanto, nonostante il carattere preliminare delle esperienze suddescritte, gli AA. non si sono limitati alla sola descrizione ma hanno anticipato degli apprezzamenti senza alcuna riserva dando, a chi legge, l'impressione di fatti effettivamente dimostrati. Vedremo in seguito come tali apprezzamenti sono completamente errati.

(1) ANGELI, « Gazz. », 46 (1916).

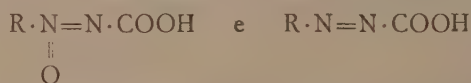
(2) « Gazz. », 62, 588 (1932).

Disponendo di una piccolissima quantità della fenilazossicarbonamide (gr. 0.95) ho ripetuto le esperienze di Oddo e Indovina ed ho potuto così separare tutti i quattro prodotti surrammentati.

Sbattendo l'azossiamide con dell'acqua di bromo a freddo, si ottiene un composto il quale non purificato fonde a $107/110^{\circ}$ (Oddo e Indovina p. f. 103°). Concordemente con gli AA. predetti ho notato che quest'ultimo, con acqua a caldo, svolge l'alogeno con separazione a freddo di un prodotto bianco che ho potuto identificare per la sostanza di partenza.

Il prodotto a p. f. 142° , che anch'io ottenni mediante estrazione eterea dalle acque madri bromiche, dopo avere operato per 3 ore a caldo, e che Oddo e Indovina ritengono essere verosimilmente l'acido azossicarbonico non ancora conosciuto, mi è risultato dopo una sola cristallizzazione dall'acqua (p. f. $149/150^{\circ}$) il prodotto di partenza inalterato. La reazione nettamente acida notata da Oddo e Indovina per tale prodotto, è dovuta senza dubbio a tracce di acido minerale preesistente o formantesi dalle impurezze di bromo contenuto nel prodotto greggio. In nessun'altra condizione non ho potuto ottenere dalle acque madri un prodotto diverso.

D'altronde gli acidi azossicarbonici, al pari di quelli azocarbonici:



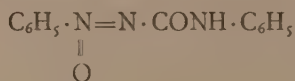
sono noti come molto instabili ed era soprattutto questa circostanza che mi ha suggerito di ripetere le esperienze di Oddo e Indovina.

Il prodotto a p. f. 75° e quello a 220° che dopo purificazione da alcool si presenta sotto forma di belle tavole lucenti color arancione, contenenti bromo, a p. f. 247° , non copulano con β = naftolo in soluzione alcalina e quindi non presentano interesse per la quistione in esame.

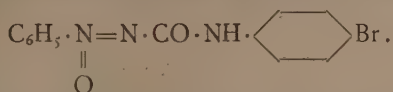
Tutto ciò dimostra che non era affrettata la decisione presa da Angeli nell'assegnare la costituzione alla fenilazossicarbonamide, ma bensì affrettati sono gli apprezzamenti che altri hanno fatto in merito. Si deve pure co-

statutare che la legge dell'azione protettiva del gruppo $\begin{array}{c} \text{—N=} \\ \parallel \\ \text{O} \end{array}$ nei confronti degli agenti sostituenti, è stata finora sempre confermata e nemmeno in un caso solo, si ebbero risultati contrari a quelli previsti.

Non posso egualmente accettare la spiegazione che Oddo e Indovina danno circa la mancata reazione, a secco, del bromo con la fenilazossicarbonamide. Essi suppongono che ciò possa essere attribuito, forse, all'insolubilità reciproca dei due reagenti. In una esperienza appositamente eseguita ho potuto stabilire che l'azossicomposto seguente, da me preparato:



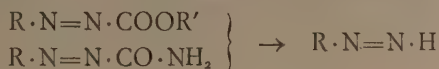
avente le stesse caratteristiche di insolubilità della fenilazossicarbonamide, per azione diretta del bromo (2 Mol.) dà il seguente monobromoderivato:



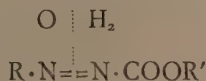
Nel caso invece del corrispondente azoderivato, mancando l'azione protettiva dell'ossigeno, si perviene al tribromoderivato seguente:



Tornando alla questione della scissione alcalina degli eteri azossicarbonici e delle corrispondenti amidi, occorre tenere presente che i relativi azocomposti, danno per opera degli alcali, la corrispondente arildiimmide:

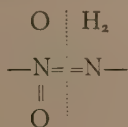


mentre poteva attendersi che almeno per gli eteri carbonici, si verificasse la scissione:

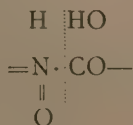


analoga a quella che negli azossiderivati conduce al nitrobenzolo.

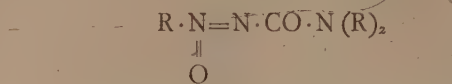
Le considerazioni suesposte ed i risultati sperimentali finora conseguiti portano pertanto a concludere che la scissione riscontrata per gli azossietteri, in nitrobenzolo ed ammoniaca, avviene con una velocità infinitamente grande di fronte alla velocità di formazione del diazoidrato, mentre nel caso delle amidi avverrebbe l'inverso. Rimane tuttavia inspiegabile come a causa della presenza dell'atomo di ossigeno, avente posizione identica nelle due serie di derivati, la funzione eterea rispettivamente amidica sia in grado di determinare la rottura del legame, nel primo caso, tra i due atomi di azoto:



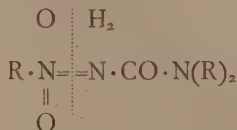
nel secondo, tra l'azoto e carbonio:



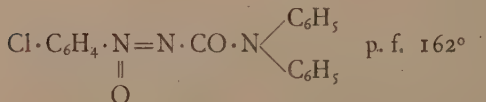
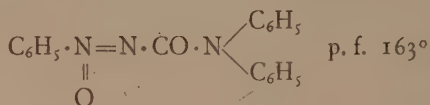
Per stabilire entro quali limiti la funzione amidica determina con preferenza la nota scissione, ho voluto esaminare alcuni derivati amidici bisostituiti, non ancora conosciuti:



Non potevasi *a priori* escludere che questi ultimi potessero dare luogo al nitrobenzolo ed alla corrispondente urea:



Furono esaminati la trifenilazossicarbonamide e la p. clorofenilazossidifenilcarbonamide:



In nessuna condizione è stata riscontrata con tali composti, la scissione predetta.

I dati sperimentali del presente lavoro e la descrizione dei derivati amidici summenzionati, assieme ad alcune osservazioni fatte durante la sintesi di questi ultimi, saranno riportati in un altro periodico.

Chimica biologica. — *Sul metabolismo glucidico della ghiandola mammaria in vitro* ⁽¹⁾. Nota di C. ANTONIANI e A. SPIGA CLERICI, presentata ⁽²⁾ dal Socio P. RONDONI.

Lo studio *in vitro* del metabolismo glucidico della ghiandola mammaria ha già portato a qualche risultato nei riguardi della differenza di comportamento che intercede tra l'organo in riposo e l'organo attivo. H. K. Barrenschcen e N. Alders ⁽³⁾ hanno riscontrato che la mammella funzionante è più ricca di combinazioni fosforate organiche, possiede una più attiva glicolisi ed è la sola in grado di manifestarla anche in atmosfera di O_2 . R. Tateyama ⁽⁴⁾ misurando la quantità di aldeide acetica che si forma nei due casi ne ha trovato quantità maggiori nella mammella in attività di secrezione, il che attesta per altra via la più intensa attività glicolitica di questa rispetto alla ghiandola non secernente. Per quanto riguarda le combinazioni fosforate organiche è da segnalarsi una constatazione discorde da parte di W. Borst ⁽⁵⁾ il quale trova più fosforo organico nell'organo virginale.

Segnaliamo qui una nuova fondamentale diversità di comportamento tra ghiandola mammaria in funzione e ghiandola inattiva (virginale). Essa riguarda la facoltà di trasformazione dell'acido fosfoglicerico in acido piruvico e acido fosforico, trasformazione che è determinata, come è noto, da un complesso enzimatico presente in molti organi e tessuti sia animali che vegetali ⁽⁶⁾ e che ha assunto in questi ultimi tempi particolare significato per il numero assai grande di processi biochimici a cui sembra doversi collegare.

Noi abbiamo constatato che il tessuto mammario in attività di secrezione è in grado di trasformare l'acido fosfoglicerico in acido piruvico con liberazione contemporanea di fosforo inorganico. Tale facoltà di trasformazione manca per contro nell'organo non ancora in lattazione, nel qual caso, per quanto abbiamo sin qui osservato, il processo si limita alla semplice idrolisi dell'estere fosforico di partenza.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia animale della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 5 gennaio 1936.

(3) «Bio. Z.», 252, 97, 1932.

(4) «Bio. Z.», 163, 297, 1925.

(5) «Zeitschr. f. Physiol. Chem.», 212, 126, 1932.

(6) Vedasi letteratura nella Nota di C. ANTONIANI pubblicata in questi «Rendiconti», vol. XXI, ser. 6^a (1935), p. 192.

K. Lohmann e O. Meyerhof⁽¹⁾ hanno dimostrato che la trasformazione enzimatica dell'acido fosfoglicerico in acido piruvico e acido fosforico non è determinata da un solo fermento, ma richiede la presenza di un intero sistema coenzimatico: acido adenilpirofosforico e un sale magnesiaco. In assenza dell'uno o dell'altro o di entrambi i cofermenti la defosforilizzazione non ha luogo, avviene però una trasposizione intermolecolare che porta alla formazione di acido fosfopiruvico. La formazione di quest'ultimo rappresenta un passaggio obbligato nella trasformazione dell'acido fosfoglicerico in acido piruvico e acido fosforico.

L'intero sistema enzimatico capace di questa interessante trasformazione è quindi presente, in base ai fatti da noi accertati, nel tessuto mammario fuzionante. Manca per contro nell'organo non ancora in lattazione. Il fatto che anche il tessuto mammario di organo inattivo dia luogo a liberazione di acido fosforico dall'acido fosfoglicerico; dimostra come anche questo estere sia suscettibile del processo generale di saponificazione fosfatasica ed è una nuova prova del diverso indirizzo che può essere assunto dal metabolismo glucidico in dipendenza del processo di defosforilizzazione.

Ciò che resta a chiarire è se il sistema enzimatico di Lohmann e Meyerhof, di cui la comparsa nella ghiandola mammaria appare qui in relazione con la lattogenesi, interferisca o meno nel processo di formazione dello zucchero di latte. Sul qual fatto ci riserviamo di ritornare.

PARTE SPERIMENTALE.

Le varie prove vennero eseguite su mammelle bovine di soggetti diversi, prelevate subito dopo l'abbattimento dell'animale e tosto messe in esperienza. Nel caso delle mammelle in lattazione l'organo finemente triturato veniva dapprima sottoposto a lavaggio con acqua distillata, a freddo, sino a eliminazione completa degli zuccheri riduttori, presenti nella notevole quantità di latte contenuta dall'organo. Questi veniva quindi asciugato su carta bibula e previa addizione del 10 % di sabbia di quarzo veniva ulteriormente sminuzzato in mortaio.

Le mammelle non in lattazione erano organi virginali, di vitelle. Per esse non fu praticato alcun lavaggio preliminare. Dopo averle private della massima quantità possibile di grasso e di connettivo, venivano esse pure finemente sminuzzate.

L'acido fosfoglicerico venne impiegato in forma di sale sodico, preparato dal corrispondente sale di bario. La soluzione di fosfoglicerato sodico, parzialmente neutralizzata con NaOH (pH = 6,6) conteneva mg. 1,96 di P. totale per centimetro cubico, pari a mg. 11.76 di acido fosfoglicerico.

(1) « Bio. Z. », 273, 60, 1934.

Dosaggio dell'acido fosforico, caratterizzazione e dosaggio dell'acido piruvico vennero eseguiti coi procedimenti ormai abituali, pei quali si rimanda al già citato lavoro di uno di noi sull'argomento.

Prove enzimatiche.

Ghiandole mammarie in lattazione.

Esperienza n. 1.

a) organo gr. 20 (contenuto acqueo gr. 17,9) + cc. 25 soluzione fosfoglicerato + cc. 5 toluolo.

b) organo gr. 20 + cc. 25 H₂O + cc. 5 toluolo T. = 37°C.

Defosforilizzazione:

dopo 15 ore	21,8 %
» 39 »	29,8 %
» 87 »	34,3 %

Quantità totale di acido piruvico formatosi: mg. 35. Rendimento approssimativo rispetto alla quantità totale di acido fosfoglicerico in esperienza 25 %; rispetto alla frazione defosforilata 85 %.

Esperienza n. 2.

a) organo gr. 20 (contenuto acqueo gr. 16,7) + cc. 25 soluzione fosfoglicerato + cc. 5 toluolo.

b) organo gr. 20 + cc. 25 H₂O + cc. 5 toluolo T. = 35°C.

Defosforilizzazione:

dopo 16 ore	35,1 %
» 39 »	42,9 %
» 45 »	44,9 %

Quantità totale di acido piruvico formatosi: mg. 40. Rendimento approssimativo rispetto alla quantità totale di acido fosfoglicerico in esperienza 28 %; rispetto alla frazione defosforilata 65 %.

Ghiandole mammarie non in lattazione.

Esperienza n. 1.

a) organo gr. 10 (contenuto acqueo gr. 2,4) + cc. 25 soluzione fosfoglicerato + cc. 5 toluolo.

b) organo gr. 10 + cc. 25 H₂O + cc. 5 toluolo T. = 37°C.

Defosforilizzazione:

dopo 14 ore	25,3 %
» 38 »	39,1 %
» 62 »	45,7 %

Reazione dell'acido piruvico *negativa*.

Esperienza n. 2.

a) organo gr. 10 (contenuto acqueo gr. 3,0) + cc. 20 soluzione fosfoglicerato + cc. 5 toluolo.

b) organo gr. 10 + cc. 20 H₂O + cc. 5 toluolo T. = 35°C.

Defosforilizzazione:

dopo 16 ore	32,5 %
» 45 »	41,5 %

Reazione dell'acido piruvico *negativa*.

Esperienza n. 3.

a) organo gr. 10 (contenuto acqueo gr. 4,6) + cc. 20 soluzione fosfoglicerato + cc. 5 toluolo.

b) gr. 10 organo + cc. 20 H₂O + cc. 5 toluolo. T. = 35°C.

Defosforilizzazione:

dopo 16 ore	25,7 %
» 38 »	28,5 %
» 87 »	26,4 %

Reazione dell'acido piruvico *negativa*.

Esperienza n. 4.

a) organo gr. 10 (contenuto acqueo gr. 2,6) + cc. 20 soluzione fosfoglicerato + cc. 5 toluolo.

b) organo gr. 10 + cc. 20 H₂O + cc. 5 toluolo. T. = 35°C.

Defosforilizzazione:

dopo 16 ore	20,5 %
» 38 »	24,6 %
» 87 »	22,0 %

Reazione dell'acido piruvico *negativa*.

Dall'andamento della defosforilizzazione nelle esperienze n. 3 e n. 4 apparirebbe, dopo un certo tempo, un inizio di ricombinazione organica del fosforo.

L'acido fosfoglicerico utilizzato per queste esperienze ci fu cortesemente fornito dal prof. C. Neuberg, che vivamente ringraziamo.

Petrografia. — *Sopra una vogesite del Ginepro (Isola d'Elba)*⁽¹⁾. Nota di M. FENOGLIO, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. A. STELLA.

In un recente studio sui giacimenti ferriiferi dell'isola d'Elba, lo Stella⁽³⁾, parlando dei numerosi filoni granitici, che attraversano gli « scisti gneissici »⁽⁴⁾, costituenti la parte inferiore della formazione scistoso-cristallina presiluriana, largamente rappresentata nella parte orientale dell'isola, accenna con brevità alla differenziazione di questi, nella zona Calamita-Ginepro, non solo in senso leucocratico, aplitico e pegmatitico, del resto già nota, ma anche in senso melanocratico, lamprofirico, sino allora non osservata. Infatti nè il Lotti⁽⁵⁾, che sin dal 1886 aveva messo in evidenza questo imponente apparato filoniano granitico, nè più tardi l'Aloisi⁽⁶⁾ e il Manasse⁽⁷⁾, che fecero rispettivamente oggetto di accurate ed importanti ricerche petrografiche i filoni granitici, che affiorano nelle zone Fosso di Mar di Carvisi-Longone e Monte Arco, fanno cenno di sorta a filoni lamprofirici.

Avendo l'esame microscopico preliminare permesso allo Stella di ascrivere la roccia, costituente i filoni lamprofirici in parola, « al tipo delle vogesiti », egli la ritenne degna di ulteriore studio petrografico dettagliato completo⁽⁸⁾, poichè l'interessante tipo litologico viene segnalato per la prima volta nell'isola d'Elba.

Il sistema filoniano granitico, al quale appartiene la nostra roccia, affiora nella zona in cui venne costruita la nuova rotabile, che conduce dalla vecchia miniera di Calamita alla nuova miniera del Ginepro. Ed è in grazia dei tagli di questa nuova strada che lo Stella ebbe agio di osservare come tale importante apparato filoniano « si riveli alquanto complesso e differen-

(1) Lavoro eseguito negli Istituti di Mineralogia e Petrografia delle RR. Università di Torino e di Messina.

(2) Nella seduta del 5 gennaio 1936.

(3) A. STELLA, *Nuovi studi sui giacimenti ferriiferi dell'isola d'Elba*. « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. LII, 1934, p. 367.

(4) B. LOTTI, *Descrizione geologica dell'isola d'Elba*. « Memorie descrittive della Carta Geologica d'Italia », vol. II, p. 7. Roma, 1886.

(5) Id., loc. cit., p. 147.

(6) P. ALOISI, *Rocce granitiche negli scisti della parte orientale dell'isola d'Elba*. « Memorie Soc. Toscana Sc. Nat. », vol. XXVI, 1910, p. 3.

(7) E. MANASSE, *Ricerche petrografiche e mineralogiche sul Monte Arco*. « Memorie Soc. Toscana Sc. Nat. », vol. XXVIII, 1912, p. 118.

(8) Mi è gradito ringraziare vivamente il prof. Stella per aver voluto cedermi in istudio la vogesite elbana da lui raccolta.

ziato, poichè oltre lo sviluppo dei filoni leucocratici aplitici e pegmatitici sempre tormaliniferi, si hanno anche filoni melanocratici di tipo lamprofirico ». In questi ultimi furono appunto raccolti dallo Stella i campioni di roccia da me studiati, e precisamente nei filoni « che si incontrano lungo la strada poco prima di giungere alla casa del Ginepro ».

La vogesite del Ginepro, leggermente laminata, tenace, di colore grigio-verde scuro, macroscopicamente appare regolarmente granulare, a grana assai minuta, lucente, con elementi femici in proporzione decisamente maggiore degli elementi salici e di dimensioni uguali a quelle dei primi.

All'esame microscopico è facile rilevare che nella roccia, a struttura autotritomorfa (panidiomorfa di Rosenbusch), gli elementi femici sono essenzialmente rappresentati da anfibolo orneblendico, costituente indubbiamente predominante, mentre gli elementi salici sono dati da feldspati: ortoclasio e plagioclasio, che vi figurano subordinati rispetto all'anfibolo.

Fra gli elementi accessori tiene il primo posto la titanite, mentre è piuttosto rara la ematite.

L'orneblenda si presenta in granuli irregolari e non infrequentemente in piccoli individui prismatici, con evidenti tracce di sfaldatura secondo {110}; rarissimamente si notano sezioni trasversali con tracce di sfaldatura formanti il caratteristico reticolato a maglia romba.

Ha forte pleocroismo:

α = giallo-verdolino

β = verde

γ = verde-azzurro,

con il seguente schema di assorbimento:

$$\gamma > \beta > \alpha.$$

La direzione di estinzione è positiva, inclinata rispetto all'allungamento; le misure dell'angolo di estinzione diedero come massimo:

$$c: \gamma = 19^\circ.$$

Per tutti questi caratteri il nostro anfibolo è da ascriversi all'orneblenda comune.

Fu pure notato qualche raro e piccolo individuo di orneblenda bruna basaltica, identificabile per il suo caratteristico pleocroismo:

α = giallo-verdolino

β = marrone

γ = marrone scuro,

con assorbimento:

$$\gamma \geq \beta > \alpha$$

e per il valore dell'angolo di estinzione:

$$c: \gamma = 8^\circ$$

minore di quello dell'orneblenda verde (19°), testè descritta.

Il feldspato, in massima parte ortoclasio, si presenta in granuli irregolari; è fresco, incolore, e lo si riconosce subito per la mancanza di rilievo, e per gli indici di rifrazione più bassi di quelli del balsamo (Kollolith: $n = 1,535$).

Il plagioclasio è anch'esso fresco e per lo più si presenta in granuli irregolari od in individui cristallini, generalmente non molto grandi, e geminati secondo la legge dell'albite, raramente secondo la legge albite-periclino.

Alcune misure nella zona normale a {010} hanno dato valori massimi non superiori a $+25^\circ$, mentre con l'aiuto del piatto di Fedorow ho determinato:

$$+2V = 81^\circ.$$

A questi valori corrisponde un plagioclasio di tipo labradoritico della composizione *Ab*55 *An*45.

Degli elementi accessori, come poc'anzi fu detto, è notevolmente abbondante la titanite, in granuli quanto mai irregolari, brunici, e riconoscibile immediatamente per il suo alto potere rifrangente e per la birifrazione enorme.

La ematite si presenta in squamette, identificabili per la lucentezza semimetallica e per il loro colore rosso-giallo.

L'analisi della roccia ha dato i seguenti risultati:

SiO ₂	46.61	0.776
TiO ₂	2.26	0.028
ZrO ₂	ass.	—
Al ₂ O ₃	12.23	0.120
Cr ₂ O ₃	tracce	—
Fe ₂ O ₃	2.32	0.015
FeO	9.79	0.136
MnO	tracce	—
MgO	8.59	0.213
NiO	ass.	—
CoO	ass.	—
CaO	12.96	0.231
SrO	n. d.	—
BaO	tracce	—

K ₂ O	1.65	0.018
Na ₂ O	2.31	0.037
H ₂ O—	0.12	
H ₂ O+	1.41	
P ₂ O ₅	0.03	
S	0.05	
Somma	100.33	
— O = S	0.01	
	100.32	
Peso specifico	3.078	

Da questi dati analitici per la rappresentazione diagrammatica di Niggli si calcolano i seguenti valori:

si = 100.1	al = 15.5	
ti = 3.6	fm = 48.9	k = 0.33
	c = 28.5	mg = 0.56
	alk = 7.1	c/fm = 0.58

La composizione chimica della nostra roccia corrisponde assai bene a quella di una vogesite.

È noto che le vogesiti, pur costituendo un gruppo di rocce assai esiguo, presentano tuttavia una composizione che oscilla entro limiti notevolmente ampi, come ci si persuade facilmente, esaminando il diagramma delle variazioni di composizione, costruito da Niggli⁽¹⁾. I limiti, entro cui può variare la composizione di questa roccia, quali si ricavano da questo diagramma, sono i seguenti:

si	90	190
al	15	37
fm	52	30
c	26	13
alk	7	20
Somma	100	100

(1) P. NIGGLI, *Gesteins und Mineralprovinzen*, Bd I, p. 330. Berlin, 1923.

I valori, calcolati per la formula magmatica della vogesite elbana, evidentemente nell'insieme trovano posto nel diagramma di Niggli, ad eccezione del valore di c (28.5), che è leggermente superiore a quello del diagramma ($c = 26$). Questo valore, leggermente alto, trova plausibile spiegazione nella diagnosi microscopica della roccia, che ha messo in evidenza, quale componente accessorio notevolmente abbondante, la titanite. La frequenza di questo minerale spiega, oltrechè il tenore un po' elevato in ossido di calcio, anche l'elevato tenore in biossido di titanio (2.26 %). Del resto lo stesso Niggli⁽¹⁾, nella prefazione al diagramma testè ricordato, ammette che il limite superiore di c possa arrivare sino a 30.

Si potrebbe ancora aggiungere che anche i valori di k , mg , c/fm sono compresi entro i limiti dati da Niggli per le vogesiti.

È poi non privo d'interesse il mettere in evidenza la sensibile analogia di composizione chimica e mineralogica della vogesite elbana con due vogesiti di Apishapa (Colorado), descritte da Cross⁽²⁾, ed esse pure legate a rocce granitiche come la nostra.

Per comodità di confronto riporto nella tabella che segue con i risultati dell'analisi della vogesite del Ginepro (I) quelli delle due vogesiti in questione: vogesite orneblendica (II) e vogesite augitica (III):

	I	II	III
SiO ₂	46.61	43.49	44.31
TiO ₂	2.26	2.10	2.10
ZrO ₂	ass.	—	—
Al ₂ O ₃	12.23	12.76	14.10
Cr ₂ O ₃	tracce	—	—
Fe ₂ O ₃	2.32	5.92	4.75
FeO	9.79	5.18	6.02
MnO	tracce	0.10	0.18
MgO	8.59	9.23	7.80
NiO	ass.	—	—
CoO	ass.	—	—
CaO	12.96	10.54	9.66
SrO	n. d.	0.12	0.10
BaO	tracce	0.13	0.10
K ₂ O	1.65	2.53	2.83
Na ₂ O	2.31	2.40	3.74

(1) P. NIGGLI, op. cit., p. 331.

(2) W. CROSS, *Dike rocks of the Apishapa Quadrangle, Colorado U. S. «Geological Survey»*, P. P. 90-C, 1914, pp. 21 e 24.

H ₂ O—	0.12	1.86	0.88
H ₂ O+	1.41	3.05	3.29
P ₂ O ₅	0.03	0.75	0.53
S	0.05	0.11	0.10
Somma	100.33	100.27	100.49
—O = S	0.01	0.02	0.02
	<u>100.32</u>	<u>100.25</u>	<u>100.47</u>

Dall'esame della tabella appare evidente la discreta corrispondenza di composizione fra la vogesite del Ginepro e le due vogesiti di Apishapa, corrispondenza che risulta anche maggiormente palese, confrontando le rispettive formule magmatiche di Niggli:

	<u>si</u>	<u>ti</u>	<u>al</u>	<u>fm</u>	<u>c</u>	<u>alk</u>	<u>k</u>	<u>mg</u>	<u>c/fm</u>
I	100.1	3.6	15.5	48.9	28.5	7.1	0.33	0.56	0.58
II	96.0	3.4	16.5	50.0	25.0	8.5	0.41	0.61	0.50
III	99.0	3.5	18.5	46.0	23.5	12.0	0.33	0.57	0.15

Concludendo, tanto i risultati dello studio microscopico della roccia filoniana lamprofirica del Ginepro, quanto quelli dello studio chimico consentono di ascriverla al gruppo delle vogesiti, e, tenuto conto che l'anfibolo orneblendico è di gran lunga il componente essenziale più abbondante, la nostra roccia è da ritenersi una « vogesite orneblendica ». Questo accertamento è non privo d'interesse, diremo, generale, per la conoscenza petrografico-geologica dell'isola d'Elba, poichè, per quanto io sappia, è la prima volta che viene documentata in quella regione la presenza di filoni granitici differenziati anche in senso melanocratico, lamprofirico, costituiti da vogesite orneblendica.

Botanica. — *Il cribro primario organizzatore del cambio secondario.* Nota di ALBINA MESSERI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. NEGRI.

Il tessuto cambiale è un meristema di natura speciale e differisce dai meristemi embrionali per caratteristiche morfologiche e funzionali.

Caratteristiche morfologiche: le cellule cambiali hanno un citoplasma assai vacuolizzato, un nucleo non molto voluminoso, sempre più o meno spostato verso una parete cellulare, possono essere a sezione longitudinale rettangolare o affusata, più o meno allungate, come gli elementi conduttori a cui danno origine. Questi caratteri basterebbero per considerare questo meristema un tessuto *sui generis* e altamente specializzato.

Caratteristiche funzionali: le cellule si dividono attivamente in *senso tangenziale* e danno origine a file di cellule, esternamente ed internamente ad esse, seriate e a sezione trasversa rettangolare, trasformabili in tessuti altamente specializzati. Oltre questo tipo caratteristico di divisione, le cellule cambiali si dividono o in senso trasversale più o meno obliquo, o in senso longitudinale radiale, a seconda dei gruppi di piante che consideriamo; con questi due ultimi tipi di divisione si viene ad aumentare il raggio dell'anello cambiale.

Bailey (1919-1920-1923) ha recentemente studiato, in maniera molto esatta, questo meristema dal punto di vista istologico e citologico, e proprio da queste sue ricerche risalta quanto sia speciale questo tipo di tessuto embrionale.

Il problema di cui mi occupo in questa breve Nota è lo studio della prima differenziazione del cambio nelle giovani plantule e dell'organizzatore di questo tessuto.

Haberlandt (1914), nel suo trattato, accenna già che il cambio nella radice delle Gimnosperme e delle Dicotiledoni si origina, in un primo momento, sotto il fascio cribroso: *Tangential division starts on the inner side of the leptome strands and then extends laterally through the conducting parenchyma as far as the outer ends of the hadrome plates* (p. 651).

Per quello che riguarda il cambio che si origina nella stele del fusto, l'A. dice che tale cambio può essere un meristema primario o secondario, può cioè derivare da un anello procambiale continuo che si è conservato

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1936.

tale fino dall'apice vegetativo, ma in cui «... the interfascicular strips of procambial tissue comprises three or four layers of cells, which are arranged quite irregularly... and not in the radial rows characteristic of a typical cambium » (p. 649-650) oppure può derivare, parte da un meristema iniziale e parte da un ritorno di un parenchima allo stato meristemale: « in this case, tangential divisions appear in the medullary rays close to the margins of the strips of fascicular cambium; the rays thus becoming gradually bridged by strips of secondary meristems » (p. 650).

Lo studio delle plantule di Conifere è molto interessante a questo riguardo.

Una plantula di *Pseudotsuga Douglasii* (Lindl.) Carr. assai giovane (Messeri 1935), presenta la radichetta tutta formata da tessuti primari e senza nessun accenno alla differenziazione di cambio. Nell'ipocotile dove i fasci conduttori sono ancora in posizione alterna, il cambio comincia già a differenziarsi.

Ogni fascio cribroso, formato da cribro precursore, è fiancheggiato internamente, verso il midollo centrale, da cellule parenchimatiche giovani, a sezione poligonale, a citoplasma assai vacuolizzato, nucleo piccolo e spostato verso una parete; gli intercellulari, assai piccoli cominciano già a comparire fra una cellula e l'altra. A questo livello, dove gli elementi cribrosi e legnosi sono ben differenziati, si osserva, nel parenchima sottostante il cribro, una fila di cellule che si sono divise tangenzialmente. Dalla fig. 1, che riproduce a forte ingrandimento questa zona, si può dedurre facilmente che le cellule in questione, prima della loro divisione, avevano una forma poligonale come le altre del midollo. Esse conservano ancora il loro aspetto primitivo, ma si presentano come attraversate da un setto più o meno continuo, corrispondente alla membrana formatasi in seguito alla divisione tangenziale.

In uno stadio leggermente più inoltrato di tale differenziazione (fig. 2) questa sorta di unità morfologica, rappresentata dalle due cellule figlie della cellula parenchimatica interessata in questa divisione, si è persa, e ciascuna cellula figlia ha acquistato una fisionomia propria, in particolare la cellula più vicina al cribro ha ispessito la sua membrana e si sta trasformando in elemento cribroso, mentre la più interna conserva i caratteri già descritti e ripete la divisione tangenziale.

La zona di cellule interessate in questa divisione è più o meno estesa, e, già in un primo tempo, non si limita ad un solo strato di cellule generatrici (fig. 3).

Mentre le prime cellule che risultano da tale divisione verso l'esterno, non si ridividono ancora, perchè vanno incontro ad una rapidissima differenziazione in elementi cribrosi, internamente nessuna onda di differenziazione corrispondente agisce sulle nuove cellule formate, trasformandole in tessuti definitivi, perchè non sono a contatto col legno primario (Messeri 1935).

Coll'estendersi del cribro in un anello continuo, all'apice dell'ipocotile, anche questa zona cambiale si estende in maniera che non abbiamo mai, in questo caso, del cambio interfascicolare; il cambio si è differenziato tutto in corrispondenza del cribro primario.

Lo studio del cambio interfascicolare e della sua differenziazione attraverso ai raggi midollari, che separano un fascio dall'altro nel fusto, non è possibile nelle plantule di Conifere dove tutti i tessuti primari sono esigui e quindi anche i raggi midollari primari sono formati da poche cellule; non solo, ma in esse il cribro tende a formare una sifonostele continua nell'ipocotile e quindi il cambio può spesso differenziarsi in cerchio completo, tutto alle dipendenze del cribro. Il primo fatto rende malagevole, come si comprende, l'osservazione; il secondo, quando si verifichi, la rende impossibile per ragioni ovvie.

La sezione del fusto di una Dicotiledone a grandi raggi midollari può servire allo scopo di studiare la differenziazione di questo meristema nelle zone della stele dove manca il cribro (in particolare nei raggi midollari del fusto).

Prendiamo in considerazione il fusto giovane di *Aristolochia Sipho* d'Hérit, la cui struttura anatomica è riprodotta in molti trattati.

La sezione trasversa in esame mostra una stele con 12 fasci cribro-legnosi sovrapposti; fra legno e cribro di ciascun fascio è già differenziata una zona multiseriata di cambio; i raggi midollari sono ampi.

Osservando un raggio midollare fra i due fasci che lo limitano (fig. 4), vediamo che le bande di tessuto cambiale interfascicolare si estendono già nel parenchima del raggio, le cui cellule, ancora conservanti la loro forma caratteristica, si presentano attraversate da sottili membrane, come se fossero tagliate in porzioni, ciascuna delle quali non ha ancora assunto una fisionomia propria. Tale fenomeno procede evidentemente dalle cellule cambiali del fascio e si propaga a cellule contigue le une alle altre. Lo strato di cellule interessate in questa speciale divisione diminuisce di spessore, via via che ci si allontana dal cambio del fascio.

Che lo stimolo a questa speciale divisione proceda nella maniera descritta risulta particolarmente chiaro nella fig. 4. In essa infatti sono riprodotti due fasci che invece di essere disposti perfettamente nel cerchio dei fasci della stele, sono leggermente spostati l'uno rispetto all'altro: nella stessa maniera sono spostati e non coincidenti i ponti di cambio che si irradiano da essi e si inoltrano nel parenchima del raggio.

Risulta così che il meristema interfascicolare di *Aristolochia Sipho* si forma dalle cellule parenchimatiche del raggio per divisioni in tutto paragonabili a quelle che avvengono nelle cellule parenchimatiche contigue al fascio cribroso ipocotilare di *Pseudotsuga Douglasi*; e che tale tipo di divisione si propaga da cellula a cellula, senza intervalli, in direzione tangenziale rispetto

alla stele. Il tessuto cambiale non nasce quindi mai isolatamente, in un punto lontano dal cribro se almeno non è collegato ad esso da altro tessuto cambiale.

Da tutti i dati di fatto da me osservati e descritti in questa breve Nota, risulta dunque che il cribro è l'organizzatore del cambio (Messeri 1935).

Pacini, in un suo lavoro sulla tecnica d'innesto del Gelso (1935), osserva che il cambio, distaccato dal cribro durante l'innesto, perde la sua proprietà di funzionare come tale e da questo conclude che il cribro è necessario perchè non si esaurisca la funzionalità del cambio. L'A. si riferisce, per sostenere la sua ipotesi, alle classiche esperienze di Haberlandt sui *Wundhormonen* e *Teilunghormonen* (1913), in cui si dimostra che una porzione di tessuto cribroso, messa a contatto con un parenchima, è capace di far insorgere nel parenchima stesso un cambiforme. Haberlandt pensa che una vera e propria secrezione interna del tessuto cribroso provochi questa speciale divisione nel parenchima.

Il Pacini, usufruendo degli innesti per interpretare questo fenomeno, conclude: « I fatti da me osservati non mi permettono di dire se questa sorta di secrezione interna proveniente dal cribro sia necessaria all'insorgere del cambio da un tessuto definitivo; mi permettono però di affermare che la connessione anatomica del cribro col cambio è necessaria alla conservazione di quest'ultimo. Staccato dal cribro il cambio esaurisce le sue iniziali, cessa quindi di esistere come cambio, trasformandosi tutto in un tessuto definitivo, come se fosse interrotta la normale catena morfogenetica ».

Le osservazioni da me fatte e riportate in questa Nota mi permettono di estendere il concetto espresso dal Pacini e di affermare che: questa sorta di secrezione interna proveniente dal cribro — o comunque la presenza del cribro — è necessaria anche alla differenziazione dei primi elementi cambiali da un tessuto definitivo. E non solo ciò abbiamo veduto chiaramente nell'ipocotile delle Conifere (fig. 1 e 2); ma abbiamo anche veduto che, per l'organizzazione del cambio interfascicolare, è necessaria una connessione anatomica perfetta col cambio fascicolare, il quale a sua volta non si sarebbe organizzato senza la presenza del cribro (fig. 4).

Da quanto abbiamo precedentemente detto e riferendoci anche alle osservazioni della precedente Nota (Messeri, 1935), possiamo concludere:

1° che il cribro primario è l'organizzatore del cribro secondario: cioè dirige verso la definitiva differenziazione in elementi cribrosi le cellule indifferenziate prodotte dall'attività del cambio verso l'esterno;

2° che il legno primario è l'organizzatore del legno secondario (Messeri 1935); non solo, ma che il legno secondario già differenziato è l'organizzatore del nuovo legno secondario, cioè dirige verso la definitiva differenziazione in elementi legnosi le cellule indifferenziate prodotte dall'attività verso l'interno della stele, del meristema cambiale. Ciò è stato dimostrato chiaramente da Pacini, con l'esperienza che la pratica dell'innesto viene a

mettere in luce nel gelso, in cui si vede che il tessuto prodotto dal cambio tende verso una differenziazione di tipo parenchimatoide quando è tolta la sua connessione col legno secondario;

3° che, mentre gli organizzatori dei due tessuti secondari definitivi si trovano nei tessuti omonimi secondari o primari, soltanto il cribro è sede dell'organizzatore del cambio secondario, cioè è il tessuto che ne promuove il primo apparire nella plantula.

BIBLIOGRAFIA.

- J. W. BAILEY, 1919, *Phenomena of cell division in the cambium of arborescent Gymnosperms and their cytological significance*. («Proceedings of the Nat. Ac. of Sciences of the U. S. A.», vol. V, n. 7, pp. 283-285).
- Id., 1920, *The cambium and its derivative tissues. II. Size variations of cambial initials in Gymnosperms and Angiosperms*. («American Journal of Botany», vol. VII, n. 9, pp. 355-367).
- Id., 1920, *The cambium and its derivative tissues. III. A reconnaissance of cytological phenomena in the cambium*. («American Journal of Botany», vol. VII, n. 10, pp. 417-434, Plts. XXVI, XXVII, XXVIII, XXIX).
- Id., 1923, *The cambium and its derivative tissues. IV. The increase in girth of the cambium*. («American Journal of Botany», vol. X, n. 11, pp. 499-509, Plt. XXXVI).
- G. HABERLANDT, 1913, *Zur Physiologie der Zellteilung. I*. («Sitzber. d. Preuss. Akad. d. Wiss.», Bd. XV, p. 318).
- Id., 1914, *Physiological Plant Anatomy*. (Transl. by M. Drummond; Macmillan and CO. London).
- A. MESSERI, 1935, *Del potere organizzatore del legno e del cribro primari*. («Rendiconti della Reale Acc. Naz. dei Lincei», Classe di Scienze Fisiche Matematiche e Naturali, vol. XXI, ser. 6ª, 1º sem., pp. 600-605).
- Id., 1935, *Ricerche sulla morfologia della plantula delle Conifere - Le Pinaceae -*. («Nuovo Gior. Bot. It.», nuova serie, vol. XLII, pp. 267-363, tav. IX).
- A. PACINI, 1935, *Le basi istologiche e istogenetiche della particolare tecnica d'innesto del Gelso*. («Nuovo Giorn. Bot. It.», nuova serie, vol. XLII, pp. 403-435, tav. XV).

Biologia vegetale. — *Contributo alla cariologia del genere « Calendula » L.* ⁽¹⁾. Nota di G. NEGODI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. E. CARANO.

Sul genere *Calendula* (Tubiflorae, Calenduleae), assai ricco di specie, le nostre conoscenze per merito di Tulasne (1855), Hofmeister (1858), Guignard (1882), Billings (1901), Carano (1915), Dahlgren (1920 e 1924), vertono soprattutto sulle particolarità del sacco embrionale, sullo sviluppo dell'embrione e dell'endosperma, specialmente di *Cal. arvensis* e *Cal. officinalis* ma pure della *Cal. microcephala* e *Cal. tripterocarpa*.

Per quanto riguarda la cariologia del genere non ci è noto che il reperto di Lundegårdh (1909) su *Cal. officinalis* in cui riscontrò $n = 14$. Precedentemente Rosenberg (1904) avrebbe riscontrato in una *Cal. sp.* non determinata $n = 16$.

Onde cercare di contribuire alla definizione dell'assetto nucleare delle numerose entità sistematiche del genere e circoscrivere i problemi inerenti alla loro origine furono condotte delle ricerche sulle seguenti entità, ottenute in coltura da semi provenienti da Istituti Botanici.

1° — *Cal. arvensis* L. (forma *micrantha*) a capolini mediocri pauciflori ma in pianta non nana, annua, rispondente del tutto a questa entità sistematica.

2° — *Cal. aegyptiaca* Desf., forma ad assi esili, foglie lineari allungate, brevi, ispide, capolini non grandi ma a ligule molto sviluppate lunghe quasi quanto le forme *officinalis*, gialle intense mentre i fiori del disco si presentano rosso bruni. Anche questa forma si presentò come annua.

3° — *Cal. officinalis* L. *subsp. fulgida* Raf. — Pianta alta *perenne* vischiosa a foglie grandi ovate-allungate, sinuate a capolini grandi del diametro di 4-5 cm. a disco plurifloro giallo e con le ligule pur esse giallo-croce, più numerose che nella specie precedente pur essendo i capolini non doppi.

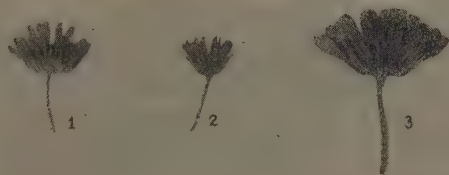
4° — *Cal. suffruticosa* Vahl. — Pianta suffrutescente, alta ramificata, in basso legnosa, *perenne*, a foglie ispide lanceolate, verde scuro, a capolini del diam. di 3 cm. circa, meno grandi della *Cal. fulgida* ma a ligule grandi ed espanse, sebbene un po' meno numerose, gialle intense, fiori nel disco dello stesso colore.

Tutte queste forme furono fissate alla stessa ora e con lo stesso fissativo (Carnoy diluito). Il computo dei cromosomi si fece nelle fasi di diacinesi

(1) Lavoro eseguito nella R. Università di Modena.

(2) Nella seduta del 5 gennaio 1936.

e nella anafase della divisione eterotipica ed omeotipica. La valutazione del diametro nucleare fu fatta nella fase di synapsis. In tutte le forme la microsporogenesi decorre regolarmente.



SPIEGAZIONE DELLE FIGURE.

1. *Cal. aegyptiaca*.
2. *Cal. arvensis*.
3. *Cal. fulgida*.

Figure ridotte ad un po' meno della metà del naturale (9 : 5).

	Diametro nucleare in synapsis in μ		Num. cromosomi aploide
	nucleo	nucleolo	
<i>Cal. arvensis</i>	10,8	3,6	18
<i>Cal. aegyptiaca</i>	7,2	1,8	7
<i>Cal. fulgida</i>	9	3,2	14
<i>Cal. suffruticosa</i>	9-10,8	2,7-3,2	14

Risulta da questi reperti come nel genere vi siano specie a diverso numero di cromosomi a cui corrispondono variati volumi del nucleo, i quali sono proporzionalmente più grandi quanto maggiore è il numero dei cromosomi. Particolarmente evidenti sono queste diversità tra le forme diploidi e tetraploidi.

Il fatto saliente è che oltre a specie a numero cromosomico aploide $n = 14$ proprio a *officinalis-fulgida*, entità macrocefala pluriligulata, a ligule grandi, con uno sviluppo somatico notevole e con tendenza alla perennità, numero che si riscontra pure nella *Cal. suffruticosa*, vi sono specie aploidi a $n = 7$ finora definite dalla *aegyptiaca* la quale presenta capolini più piccoli, esili, con minor numero di ligule pur essendo queste più grandi che nella specie *arvensis* e come a questi caratteri si connetta un portamento somatico

più esile e più rustico, un concludere più rapido del ciclo vegetativo e il suo carattere di annualità. Si dimostra quindi l'esistenza nell'ambito del genere *Calendula*, di specie diploidi e specie tetraploidi esattamente tali e l'esistenza di una prima serie col numero cardine $n = 7$, finora riscontrato in una sola entità.

Il reperto relativo a *Cal. arvensis* (da me riscontrato in una forma che si presenta normalmente fertile e con tutti i caratteri di questa specie sistematica) dimostra però come vi possano essere nell'ambito di questo genere specie annue, relativamente microcefale a ligule meno numerose che nelle specie del gruppo *Cal. officinalis* pur avendo un numero di cromosomi superiore a quello delle specie tetraploidi della serie a valore cardine $n = 7$.

Il valore osservato, $n = 18$, si manifesta dispoloide in confronto a quello della serie 7 e 14. Forse esistono nello stesso gruppo della collettiva *Cal. arvensis*, anche forme di questa serie, ma allo stato $n = 9$, se vale l'analogia con quanto si è riscontrato per i valori dell'altra serie.

È da ricordare ancora che nel 1904 Rosenberg avrebbe riscontrato in una specie di *Calendula* non determinata il valore $n = 16$. Se questo valore è esatto, indicherebbe la possibilità di esistenza di un maggior numero di forme dispoloidi nell'ambito di questo genere estremamente polimorfo, nel quale, in molti casi, è oltremodo arduo segnare i limiti fra le entità affini. Ciò potrà essere definito con ulteriori indagini.

Il diverso numero dei cromosomi nelle cariocinesi somatiche e riduzionali trova riscontro anche nell'assetto del nucleo allo stato di riposo.

Il nucleo in questa fase presenta nel genere *Calendula* di solito uno o due nucleoli non molto ingrossati e numerosi cromocentri di grandezza variabile ma per lo più ben distinti. Il numero dei cromocentri è pure variabile nelle cellule dello stesso individuo, tuttavia nelle specie tetraploidi a $n = 14$, è assai più rilevante che nelle specie diploidi ($n = 7$) e così pure nella specie a $n = 18$. Però il loro numero non corrisponde al numero dei cromosomi somatici, essendo inferiore e per la diversa grandezza dei singoli cromocentri e per le diversità di numero nelle varie cellule, non esattamente definibile. I nuclei delle specie di questo genere non entrano perciò nel tipo a procromosomi quale è stato riscontrato talora in altri gruppi, ma in quello a numerosi cromocentri di grandezza variabile il cui numero aumenta con lo stato tetraploide.

Nei diploidi essi sono generalmente 5-8, nei tetraploidi o nella specie a $n = 18$ il loro numero varia da 15 a 20 però vi sono oscillazioni notevoli anche in questi valori. Si può dire che il numero dei cromocentri nelle cellule somatiche allo stato di riposo è più vicino al numero dei cromosomi (aploide) dello stato gametico che al numero somatico pur essendo di solito superiore a questo di qualche unità.

BIBLIOGRAFIA.

H. LUNDEGÅRDH, *Ueber Reduktionsteilung in den Pollenmutterzellen einiger dicotylen Pflanzen*. « Svensk Bot. Tidskrift », Bd. III, S. 78-124, 1909.

C. ROSENBERG, *Ueber die Individualität der Chromosomen in Pflanzenreich*. « Flora », Bd. 93, S. 251-259, 1904.

G. TISCHLER, *Allgemeine Pflanzenkariologie*. S. 575, 1926.

Biologia vegetale. — *Sopra alcuni dati embriologici di « Sapium sebiferum » (L.) Roxb.* Nota di MARIA VENTURA, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. E. CARANO.

Il *Sapium sebiferum* (L.) Roxb., albero della famiglia delle Euforbiacee, originario della Cina e del Giappone e coltivato diffusamente anche fuori della sua patria, in primavera produce infiorescenze composte spiciformi formate di molti fiori staminiferi verso l'alto e pochi fiori carpelliferi alla base dell'infiorescenza. I fiori carpelliferi, con perianzio poco sviluppato, presentano uno stilo che termina con tre stimmi lunghi e sottili che si rovesciano in fuori. A maturanza una sola delle tre logge dell'ovario è fertile, mentre nelle altre due gli ovuli vanno a male.

Poichè nel nostro Orto Botanico questa pianta fiorisce e fruttifica normalmente, mi è sembrato opportuno seguirne lo studio embriologico.

Generalmente vi è una sola cellula madre delle macrospore, ma con relativa frequenza se ne possono trovare due che si sviluppano contemporaneamente. La cellula madre si divide e i due nuclei della diade, quando entrano in divisione, dispongono i loro fusi cariocinetici su uno stesso asse longitudinale, cosicchè le quattro macrospore che hanno origine da essi sono disposte in fila; talvolta invece il fuso superiore è orizzontale, quello inferiore verticale, e allora le macrospore sono a croce. Eccezionalmente la cellula superiore della diade non si divide e si hanno quindi tre sole macrospore.

La macrospora inferiore schiaccia le altre e si sviluppa nel suo interno il gametofito femminile; eccezionalmente le due centrali vengono schiacciate per prime.

Il sacco embrionale ingrandendosi comprime anche alcune cellule circostanti della nucella che finiscono con l'andare a male, ma non assume grandi dimensioni e anche allo stato adulto occupa poco spazio all'apice nucellare.

Il suo nucleo primario si divide una prima volta formando lo stadio binucleato del sacco, in seguito a divisioni successive di questi due nuclei si ha lo stadio tetranucleato e poi quello ottonucleato normale, con quattro nuclei al polo micropilare e quattro a quello calazale. In seguito si diffe-

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1936.

renziano le sinergidi, l'oosfera, i nuclei polari e le antipodi le quali si disorganizzano prestissimo. I nuclei polari si saldano in un nucleo secondario in vicinanza dell'oosfera.

Non ho potuto sorprendere l'atto fecondativo. Il nucleo secondario inizia la segmentazione prima dell'oosfera e forma un albume nucleare che dapprima è molto scarso. In seguito si divide anche l'oosfera per formare l'embrione che in frutti non ancora completamente maturi è piccolo e mostra già ben sviluppati i due cotiledoni.

In *Sapium sebiferum* si riscontrano frequentemente delle anomalie che possono riguardare tanto il gametofito femminile quanto la costituzione dell'ovulo.

Nel gametofito ho trovato un caso di nuclei polari soprannumerari in cui l'anomalia è spinta al massimo grado essendosi tutti i nuclei del gametofito trasformati in nuclei polari; al centro del sacco si nota infatti un gruppo di otto nuclei strettamente addossati. Gametofiti in cui tutti i nuclei si sono trasformati in nuclei polari sono stati trovati in varie piante da Shattuck⁽¹⁾, D'Angremond⁽²⁾, Dahlgren⁽³⁾, Stolt⁽⁴⁾, Chiarugi⁽⁵⁾. Nel mio caso questi nuclei strettamente addossati fra di loro hanno assunto l'aspetto di una morula, ricordante lontanamente il corpo di un piccolo embrione.

Un'altra anomalia da me riscontrata in *Sapium sebiferum* dipende da polarizzazione anomala, trovandosi soltanto alla regione micropilare un gruppo di sette nuclei, mentre alla regione calazale non ne esiste traccia: qui dunque vi è anche anomalia di moltiplicazione nucleare.

Per quel che riguarda le costituzioni anomale dell'ovulo, mentre normalmente in *Sapium sebiferum* esiste un ovulo per loggia, ho incontrato abbastanza frequentemente casi in cui in una loggia si osservano due nucelle ciascuna rivestita di un tegumento proprio e tutte e due avvolte da un tegumento comune. Eccezionalmente ho trovato che questi ovuli con due nucelle, invece di essere impiantati sulla placenta, sorgono dalla base dell'ovario sostenuti da un lungo funicolo.

Concludendo, in *Sapium sebiferum* domina il tipo di archesporio unicellulare, quantunque spesso l'archesporio si mostri bicellulare. La formazione del gametofito femminile segue il tipo di sviluppo normale.

Vi s'incontrano talvolta anomalie nel numero e nella posizione dei nuclei.

(1) C. H. SHATTUCK, *A morphological study of "Ulmus americana"*. «Botanical Gazette», vol. 40, 1905, p. 209.

(2) A. D'ANGREMOND, *Parthenokarpie und Samenbildung bei Bananen*. «Flora», Bd. 107, 1914, p. 57.

(3) K. Y. O. DAHLGREN, *Zytologische und embryologische Studien über die Reihen Primulales und Plumbaginales*. «Kungl. Svenska Vetenskapsakademiens Handlingar», Bd. 56, n. 4, 1916, p. 80.

(4) K. A. U. STOLT, *Die Embryologie von "Myriophyllum alterniflorum DC."*. «Svensk Botanisk Tidskrift», Bd. 22, H. 1-2, 1928, p. 305.

(5) A. CHIARUGI e E. FRANCINI, *Apomissia in "Ochna serrulata Walp."*. «Nuovo Giornale Botanico Italiano», N. S., vol. XXXVII, 1930, p. 1.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta i libri inviati in omaggio segnalando il volume delle « Memorie scelte » del Socio C. SOMIGLIANA, pubblicato in occasione del suo settantesimo anno; « Geometria non euclidea » e « Complementi di geometria » del Socio Corrisp. G. FANO; « Répertoire international des centres de documentation chimique » pubblicato dall'Office International de chimie di Parigi.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci BOMPIANI, CARANO, CROCCO, LEVI-CIVITA, SCORZA, STELLA.

PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente sen. MILLOSEVICH comunica che il dott. Umberto Bresciani ha inviato in data 1° dicembre un plico suggellato che sarà conservato negli archivi dell'Accademia.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 5 gennaio 1936

- BOTTO COSTANTINO. — Nota sull'asteroide e su una questione da risolvere. (Estr. dal « Periodico di Matematiche ». Serie IV, vol. XV). Bologna, 1935. 8°, pp. 1-3.
- DE BEAUX O. — Relazione sull'attività del Museo « Giacomo Doria » durante l'anno 1934. (Estr. dalla « Rivista Municipale di Genova ». 1935, n. 5). Genova, 1935. 8°, pp. 1-11.
- FAEGRI KNUT. — Ueber die Längenvariationen einiger Gletscher des Jostedalsbre und die dadurch bedingten Pflanzensukzessionen. (Abdr. aus « Bergens Museums Arbok ». 1933, n. 7). Bergens, 1934. 8°, pp. 1-255.
- FANO GINO. — Complementi di geometria. Torino, 1935. 8°, pp. 1-246.
- FANO GINO. — Geometria non euclidea. Introduzione geometrica alla teoria della relatività. Bologna, Editore Nicola Zanichelli, 1935. 8°, pp. 1-250.
- FANO GINO. — Scorrendo il volume di F. Klein: « Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im XIX Jahrhundert ». Conferenza tenuta il 27 febbraio 1934 nella R. Università e Scuola d'Ingegneria di Torino. Torino, 1934. 8°, pp. 1-21.
- FRESA A. — Osservazioni fotografiche della « Nova Herculis ». (Estr. dal periodico mensile « Coelum ». Vol. V). Pino Torinese, 1935. 8°, pp. 1-2.
- FU-CHING LI. — Anatomie, Entwicklungsgeschichte, Oecologie und Rassenbestimmung von Oncomelania des Zwischenwirtes von Schistosoma Japonicum (Katsurada 1904) in China (Reprinted from the « Transactions of the Science Society of China ». Vol. VIII). Shanghai, 1934. 8°, pp. 103-145.
- LEBRUN J. — Les essences forestières des régions montagneuses du Congo Oriental. Bruxelles, 1935. 8°, pp. 1-263.
- PANNEKOEK A. and VERWEY S. — The Stark effect of hydrogen in first type stellar spectra. (Reprinted from the « Proceedings of the Section of Sciences of the K. Akademie van Wetenschappen ». Vol. XXXVIII, pp. 479-489). Amsterdam, 1935. 8°.
- PAOLONI P. BERNARDO O. S. B. — Circa una prossima pubblicazione sulla distribuzione e sui danni della grandine in Italia. (Estr. dalla Rivista « La Meteorologia Pratica ». Anno XVI). Perugia, 1935. 8°, pp. 1-11.
- Répertoire international des centres de documentation chimique. Paris, 1935. 8°, pp. 1-115.
- SOMIGLIANA CARLO. — Memorie scelte. Torino, Editori S. Lattes e C., 1936. 8°, pp. 1-IX, 1-662.
- STERNE T. E. — Multi-Lamellar Cylindrical Magnetic Shields. (Reprinted from the « Review of Scientific Instruments ». Vol. VI, pp. 324-326). Lancaster, 1935. 8°.
- R. Università e R. Scuola di Ingegneria di Torino. — Conferenze di fisica e di matematica tenute negli anni accademici 1932-33 e 1933-1934. Torino, 1935. 8°, pp. 1-235.
- VERWEY S. — Vedi PANNEKOEK A.
- ZAWADOWSKY M. M. — Physiological Laboratories of the Institute of Animal Husbandry. Leningrad, 1935. 8°, pp. 1-252.

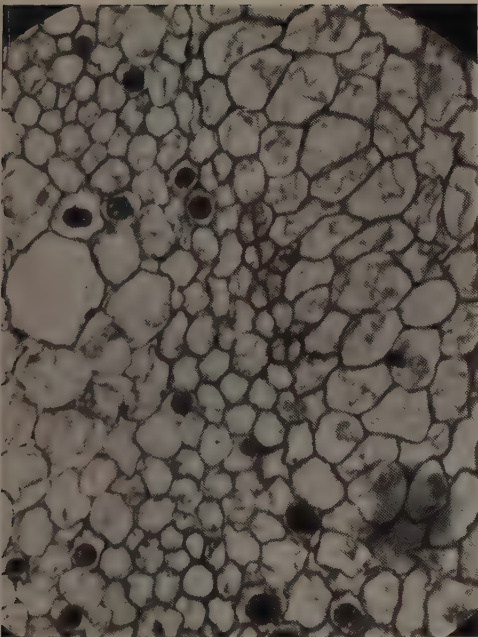


Fig. 1 - *Pseudotsuga Douglasii* - Fascio cribroso ipocotilare e primi accenni di differenziazione cambiale (X558).

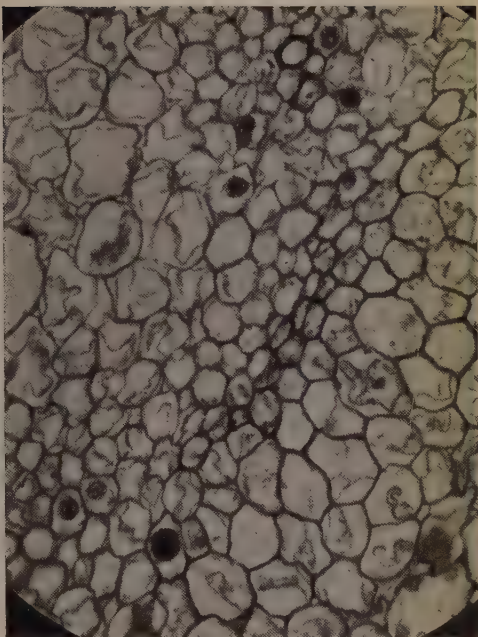


Fig. 2 - *Pseudotsuga Douglasii* - Fascio cribroso ipocotilare e zona cambiale leggermente più differenziata (X558).

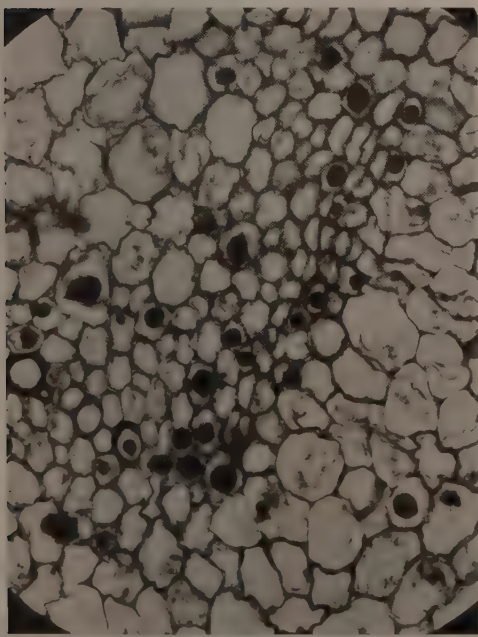


Fig. 3 - *Pseudotsuga Douglasii* - Fascio cribroso ipocotilare e zona cambiale assai differenziata (X558).

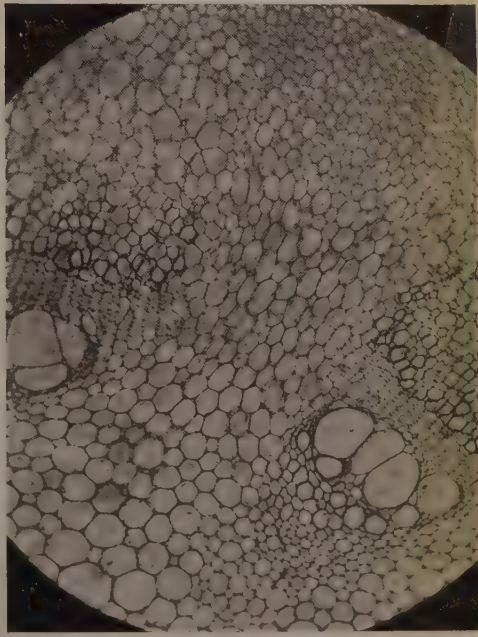


Fig. 4 - *Aristolochia Sipho* - Fasci cribrolegnosi aperti di un fusto giovane con cambio intrafascicolare e primi accenni di differenziazione di cambio interfascicolare (X45).

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 19 gennaio 1936 (anno XIV)

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Nuova espressione per la curvatura totale di una superficie.* Nota di GIACINTA ANDRUETTO, presentata⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Si consideri una superficie S ed un suo punto ordinario O ; immaginando poi il fascio di geodetiche di S , uscenti da O , potremo individuare una qualunque di esse, mediante l'angolo v che essa forma in O con una geodetica iniziale $v = 0$.

Ciò premesso, la curvatura totale K_0 di S in O può esprimersi colla formula:

$$K_0 = -\frac{3}{4} \left(\frac{d}{dv} \frac{1}{\rho_v} \right)^2 + \frac{1}{\rho_v^2} + \frac{d}{dv} \frac{1}{\rho_v \tau_v},$$

ove ρ_v e τ_v indicano i raggi di curvatura e torsione della geodetica g in O .

1. Sulle varie geodetiche g del fascio considerato, stacciamo a partire da O archi di eguale lunghezza u (variabile da O ad un certo valore finito) e prendiamo su S come linee coordinate del primo sistema queste linee $u = \text{costante}$, e come linee $v = \text{costante}$ le geodetiche stesse, essendo v l'angolo definito poco fa che riguarderemo come positivo se descritto nel verso antiorario. Allora il punto generico P che descrive la superficie S è funzione delle variabili u e v . Sviluppiamo poi in un intorno sufficientemente piccolo del punto O ($u = 0$) la funzione $P(u, v)$ secondo le po-

(1) Nella seduta del 19 gennaio 1936.

tenze crescenti di u , trascurando le potenze di u superiori alla terza, riguardando u come infinitesimo del primo ordine.

Si ha così:

$$(1) \quad P(u, v) = O + u \left[\frac{\partial P}{\partial u} \right]_0 + \frac{u^2}{2!} \left[\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} \right]_0 + \frac{u^3}{3!} \left[\frac{\partial^3 P}{\partial u^3} \right]_0 + \dots$$

ove l'indice 0 sta ad indicare che le espressioni entro parentesi quadre vanno calcolate per $u = 0$. Ora $\partial P / \partial u$ è vettore tangente in P alla geodetica g ed è inoltre vettore unitario, perchè u è l'arco di geodetica, perciò:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{n},$$

ove ρ è il raggio di curvatura della g in P ed \mathbf{n} è vettore unitario parallelo alla normale principale in P, e diretto da P verso il centro di curvatura.

Ne segue, ricordando una formula di Frenet:

$$\frac{\partial^3 P}{\partial u^3} = \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\rho} \right) \mathbf{n} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial u} - \frac{1}{\rho \tau} \mathbf{b},$$

ove τ è il raggio di torsione di g in P, e \mathbf{b} il vettore unitario definito da

$\mathbf{b} = \frac{\partial P}{\partial u} \wedge \mathbf{n}$, e che è diretto secondo la binormale a g in P.

Sostituendo in (1) si ha:

$$(2) \quad P(u, v) = O + u \left[\frac{\partial P}{\partial u} \right]_0 + \frac{u^2}{2} \left[\frac{1}{\rho} \mathbf{n} \right]_0 + \\ + \frac{u^3}{3!} \left[\left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\rho} \right) \mathbf{n} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial P}{\partial u} - \frac{1}{\rho \tau} \mathbf{b} \right]_0 + \dots$$

osserviamo che $[\partial P / \partial u]_0$ è vettore unitario tangente alla geodetica g in O e diretto nel verso crescente degli archi, perciò indicandolo con \mathbf{t}_v potremo porre:

$$(3) \quad \mathbf{t}_v = \cos v \cdot \mathbf{I} + \sin v \cdot \mathbf{J}$$

ove \mathbf{I} è vettore unitario, tangente in O alla geodetica $v = 0$ e diretto nel verso crescente degli archi e \mathbf{J} è un vettore unitario diretto secondo la binormale in O alla geodetica $v = 0$ ed espresso da $\mathbf{J} = \mathbf{I} \wedge \mathbf{n}_0$, essendo \mathbf{n}_0 vettore unitario diretto secondo la normale principale in O alla geodetica stessa.

Inoltre il vettore \mathbf{n} , calcolato per $u = 0$, cioè nel punto O, ha la direzione della normale alla superficie in O (perchè le curve g sono geodetiche) e coincide col vettore \mathbf{n}_0 introdotto poco fa e quindi non dipende da v .

Così il raggio di curvatura ρ , calcolato per $u = 0$, rappresenta il raggio di curvatura della geodetica g nel punto O , che indicheremo con ρ_v ed il vettore \mathbf{b} calcolato per $u = 0$ è diretto secondo la binormale della geodetica g in O e vale $\mathbf{t}_v \wedge \mathbf{n}_0$; perciò la (2) può scriversi:

$$P(u, v) = O + u \mathbf{t}_v + \frac{u^2}{2} \frac{1}{\rho_v} \mathbf{n}_0 + \frac{u^3}{3!} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\rho} \right]_0 \mathbf{n}_0 - \right. \\ \left. - \frac{1}{\rho_v^2} \mathbf{t}_v - \frac{1}{\rho_v \tau_v} \mathbf{t}_v \wedge \mathbf{n}_0 \right\} + \dots$$

essendo τ_v il raggio di torsione della geodetica g in O .

Ne segue, derivando rispetto a v :

$$\frac{\partial P}{\partial v} = u \frac{d \mathbf{t}_v}{dv} + \frac{u^2}{2} \left(\frac{d}{dv} \frac{1}{\rho_v} \right) \mathbf{n}_0 + \frac{u^3}{3!} \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial v \partial u} \frac{1}{\rho} \right]_0 \mathbf{n}_0 - \left(\frac{d}{dv} \frac{1}{\rho_v^2} \right) \mathbf{t}_v - \right. \\ \left. - \frac{1}{\rho_v^2} \frac{d \mathbf{t}_v}{dv} - \left(\frac{d}{dv} \frac{1}{\rho_v \tau_v} \right) \mathbf{t}_v \wedge \mathbf{n}_0 - \frac{1}{\rho_v \tau_v} \frac{d \mathbf{t}_v}{dv} \wedge \mathbf{n}_0 \right\} + \dots;$$

dalla (3) si ha poi:

$$\frac{d \mathbf{t}_v}{dv} = -\sin v \cdot \mathbf{I} + \cos v \cdot \mathbf{J};$$

perciò questo vettore è unitario e normale a \mathbf{t}_v ed a \mathbf{n}_0 , e pertanto coincide col vettore unitario \mathbf{b}_v diretto secondo la binormale in O alla geodetica g , sicchè si può scrivere:

$$\frac{\partial P}{\partial v} = u \mathbf{b}_v + \frac{u^2}{2} \left(\frac{d}{dv} \frac{1}{\rho_v} \right) \mathbf{n}_0 + \frac{u^3}{3!} \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial v \partial u} \frac{1}{\rho} \right]_0 \mathbf{n}_0 - \left(\frac{d}{dv} \frac{1}{\rho_v^2} \right) \mathbf{t}_v - \right. \\ \left. - \frac{1}{\rho_v^2} \mathbf{b}_v - \left(\frac{d}{dv} \frac{1}{\rho_v \tau_v} \right) \mathbf{b}_v - \frac{1}{\rho_v \tau_v} \mathbf{b}_v \wedge \mathbf{n}_0 \right\} + \dots;$$

elevando a quadrato, e trascurando le potenze di u superiori alla quarta, risulta

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)^2 = u^2 + \frac{u^4}{4} \left(\frac{d}{dv} \frac{1}{\rho_v} \right)^2 - \frac{u^4}{3} \left\{ \frac{1}{\rho_v^2} + \frac{d}{dv} \frac{1}{\rho_v \tau_v} \right\} + \dots.$$

D'altra parte è noto ⁽¹⁾ che se K_0 indica la curvatura totale della superficie S in O , si ha:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)^2 = u^2 - \frac{K_0}{3} u^4 + \dots;$$

(1) BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, 3ª edizione, p. 291.

perciò confrontando colla precedente si conclude:

$$(4) \quad K_0 = -\frac{3}{4} \left(\frac{d}{dv} \frac{1}{\rho_v} \right)^2 + \frac{1}{\rho_v^2} + \frac{d}{dv} \frac{1}{\rho_v \tau_v},$$

che è la formula che si voleva ottenere.

5. Questa formula è suscettibile di due facili verifiche.

In primo luogo supponiamo che la superficie S sia di rotazione e diciamo O uno dei punti di intersezione dell'asse di rotazione con la superficie; allora le geodetiche passanti per O sono meridiani della superficie; perciò $\tau_v = 0$ e siccome ρ_v non dipende nel nostro caso da v , la (4) diventa $K_0 = 1/\rho^2$, come doveva essere.

Come secondo esempio, supponiamo che S sia una superficie cilindrica; allora le geodetiche passanti per un punto arbitrario O di essa sono *eliche cilindriche* e fra esse vi ha la *sezione normale* del cilindro passante per O ; questa sarà assunta come geodetica $v = 0$ e per le altre eliche il parametro v rappresenta l'angolo d'inclinazione (che si può supporre acuto) dell'elica sul piano della sezione normale. Se r è il raggio di curvatura della sezione normale in O , la curvatura e la torsione dell'elica g si possono esprimere così (1):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1 + \cos 2v}{2r} \quad ; \quad \frac{1}{\tau} = -\frac{\sin 2v}{2r}$$

e sostituendo nella (4) si trova $K_0 = 0$, come doveva essere.

(1) BIANCHI, op. cit., p. 24; oppure BOGGIO, *Calcolo differenziale ecc.*, p. 593.

Matematica. — *Sulle linee ed ipersuperficie geodeticamente parallele.* Nota di GIACINTA ANDRUETTO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Le geodetiche di una superficie possono definirsi come quelle linee della superficie per le quali la normale principale è normale alla superficie ⁽²⁾.

Ora, da questa definizione, si possono ricavare subito, in base ad una identità assai semplice ed elementare, le proprietà fondamentali delle linee geodeticamente parallele, e la dimostrazione rimane inalterata anche nel caso che la geodetica di partenza si riduca ad un punto.

Nelle ben note *Lezioni di Geometria differenziale* del Bianchi, queste proprietà sono stabilite in modo complesso, con dimostrazioni diverse nei due casi (vol. I, §§ 105, 107, 3^a edizione) ed applicando la complicata formula di Bonnet (§ 99) per la curvatura geodetica.

Il metodo di dimostrazione che qui sviluppo è senz'altro applicabile per stabilire le corrispondenti proprietà (dovute a Beltrami) per le ipersuperficie geodeticamente parallele; esso è del tutto indipendente dal calcolo delle variazioni ⁽³⁾.

1. Si consideri una linea qualunque L_0 di una superficie S , ed in tutti i punti di L_0 conduciamo le geodetiche g ortogonali a L_0 e sopra ciascuna di esse, a partire da L_0 , si staccino archi di eguale lunghezza u (variabile da 0 ad un certo valore finito); allora sussiste l'importante proprietà che *il luogo degli estremi di questi archi è un'altra traiettoria ortogonale L delle geodetiche g .*

Infatti, prendiamo come linee coordinate del primo sistema le linee $u = \text{costante}$, e come linee $v = \text{costante}$ le geodetiche g ; allora il punto generico P che descrive la superficie S è funzione delle variabili u, v ora introdotte, e per brevità porremo:

$$P_u = \frac{\partial P}{\partial u}, \quad P_v = \frac{\partial P}{\partial v}, \quad P_{uu} = \frac{\partial^2 P}{\partial u^2}, \quad P_{uv} = \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v}, \text{ ecc.}$$

(1) Nella seduta del 19 gennaio 1936.

(2) Cfr., ad es., LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, p. 120. (Stock, Roma, 1925).

(3) Dimostrazioni fondate sul calcolo delle variazioni si trovano in BIANCHI, opera citata, vol. II, p. 423 ed in BURGATTI, BOGGIO, BURALI-FORTI, *Geometria differenziale*, p. 174 (Zanichelli, Bologna, 1930).

È chiaro che il vettore P_u è tangente alla geodetica g , di parametro v , nel suo punto generico P ; inoltre tale vettore è *unitario*, perchè u indica l'arco della geodetica g , contato a partire da L_0 ; perciò $P_u^2 = 1$.

Ricorrendo ora all'identità evidente:—

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial u} (P_u \times P_v) = P_{uu} \times P_v + \frac{1}{2} \frac{\partial P_u^2}{\partial v},$$

vediamo che l'ultimo termine è nullo; inoltre, trattandosi di geodetica, la normale principale a g , che ha la direzione del vettore P_{uu} , è normale alla superficie S e quindi al vettore P_v ; perciò la (1) si riduce a:

$$\frac{\partial}{\partial u} (P_u \times P_v) = 0;$$

da cui:

$$(2) \quad P_u \times P_v = f(v),$$

essendo $f(v)$ una funzione della sola v : ma sulla linea L_0 , cioè per $u = 0$, si ha, per ipotesi, $P_u \times P_v = 0$; perciò $f(v)$ deve essere nulla per $u = 0$, ma siccome $f(v)$ è funzione della sola v , si conclude che $f(v)$ è identicamente nulla, cioè

$$P_u \times P_v = 0,$$

il che prova appunto che le tangenti alle linee $v = \text{cost.}$ ed $u = \text{cost.}$ sono ortogonali; c. d. d.

2. Viceversa, se in un doppio sistema ortogonale (u, v) di curve della superficie S l'arco delle curve $v = \text{cost.}$, compreso fra due loro traiettorie ortogonali $u = u_0$ ed $u = u$, è lo stesso per tutte le curve $v = \text{cost.}$, queste curve sono delle geodetiche (perciò le $u = \text{cost.}$ sono linee geodeticamente parallele).

Infatti, essendo $P_u \times P_v = 0$, l'identità (1) porge:

$$(3) \quad P_{uu} \times P_v + \frac{1}{2} \frac{\partial P_u^2}{\partial v} = 0;$$

ma l'arco considerato delle curve $v = \text{cost.}$, vale

$$\int_{u_0}^u \text{mod } P_u \cdot du,$$

che per ipotesi ha valore indipendente da v , perciò ne segue:

$$\frac{\partial \text{mod } P_u}{\partial v} = 0, \quad \text{da cui} \quad \frac{\partial P_u^2}{\partial v} = 0,$$

ed allora la (3) si riduce a:

$$P_{uu} \times P_v = 0$$

e siccome i vettori P_u e P_{uu} stanno nel piano osculatore delle $v = \text{cost.}$, si conclude che tale piano è normale a P_v e cioè al piano tangente alla superficie e perciò le curve $v = \text{cost.}$ sono proprio geodetiche, c. d. d.

3. Sia O un punto qualunque (ordinario) della superficie S ; poi consideriamo il fascio di geodetiche di S , uscenti dal punto O e sopra di esse stacciamo, a partire da O , archi di eguale lunghezza u ; allora sussiste la notevole proprietà che il luogo degli estremi di tali archi è una curva ortogonale a tutte le geodetiche del fascio.

Infatti, prendiamo come linee coordinate del primo sistema queste linee $u = \text{cost.}$, e come linee $v = \text{cost.}$ le geodetiche stesse, precisando che il parametro v sia ad es. l'angolo che una geodetica variabile g del fascio forma in O con una geodetica iniziale $v = 0$.

Avremo allora $P_u^2 = 1$ e procedendo come nel n. 1 si giunge alla (2), dopo di che si osserva che per $u = 0$ il punto $P(u, v)$, qualunque sia v , deve coincidere col punto fisso O ; perciò la derivata P_v deve annullarsi per $u = 0$, e lo stesso quindi avviene anche per l'espressione (2); ma essendo $f(v)$ funzione della sola v , sarà $f(v)$ identicamente nulla, cioè $P_u \times P_v = 0$, il che dimostra il teorema.

Viceversa, se si considera il fascio di geodetiche g di S passanti per O ed una curva L di S taglia ortogonalmente tutte queste geodetiche, allora gli archi di quelle geodetiche compresi tra il punto O e la curva L sono tutti eguali.

Infatti, essendo $P_u \times P_v = 0$, ne segue la (3) del n. 2, e siccome le curve $v = \text{cost.}$ sono geodetiche, si ha $P_{uu} \times P_v = 0$, perciò dalla (3) si trae:

$$P_u^2 = \varphi(u),$$

ove $\varphi(u)$ è una funzione della sola u ; perciò la lunghezza dell'arco di una delle geodetiche g , compreso fra il punto O e la curva L , è espresso da

$$\int_0^u \text{mod } P_u du = \int_0^u \sqrt{\varphi(u)} du,$$

e siccome questa quantità è indipendente da v , vuol dire che gli archi considerati delle geodetiche sono tutti eguali, c. d. d.

4. Le dimostrazioni precedenti possono estendersi senz'altro alle varietà con un numero qualunque di dimensioni. Si consideri perciò una ipersuperficie Σ_0 di una varietà riemanniana V_n ad n dimensioni, e sulle geodetiche

g di V_n normali alla Σ_0 si staccino, a partire dalle loro intersezioni con Σ_0 , archi di eguale lunghezza u , allora il luogo degli estremi di questi archi è un'altra ipersuperficie Σ , normale a tutte le geodetiche g .

Infatti, se diciamo q_1, q_2, \dots, q_{n-1} le variabili che servono a determinare la posizione dei punti sulla ipersuperficie Σ_0 , potremo considerare il punto P che descrive la varietà V_n come funzione di $u, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$, ed è chiaro che lungo una geodetica g i parametri q_i si mantengono costanti. Il vettore P_u , che è tangente alla geodetica generica g , risulta unitario, essendo u l'arco della geodetica g contato a partire da Σ_0 .

Ricorrendo ora all'identità:

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial u}(P_u \times P q_i) = P_{uu} \times P q_i + \frac{1}{2} \frac{\partial P^2}{\partial q_i},$$

è chiaro che l'ultimo termine si annulla; inoltre, per definizione di geodetica, la normale principale a g , che ha notoriamente la direzione del vettore P_{uu} , è normale alla varietà V_n e quindi al vettore $P q_i$, perciò il secondo membro della (4) è nullo, e ne segue pertanto:

$$P_u \times P q_i = f(q_1, q_2, \dots, q_{n-1}),$$

ove f è una funzione dei parametri indicati. Ma per $u = 0$ il primo membro, per ipotesi, è nullo, perciò la funzione f deve essere identicamente nulla, cioè il vettore P_u è normale a tutti i vettori $P q_i$; e ciò dimostra il teorema.

Viceversa, se l'ipersuperficie Σ di V_n taglia ad angolo retto tutte le geodetiche di V_n normali alla ipersuperficie Σ_0 , allora le lunghezze degli archi di geodetica compresi tra Σ e Σ_0 sono eguali.

Infatti, nelle ipotesi fatte, l'identità (4) mostra che l'ultimo termine deve essere nullo, cioè $P_u^2 = \varphi(u)$, ove $\varphi(u)$ è funzione solo di u , e siccome la lunghezza dell'arco di una delle geodetiche compreso tra le ipersuperficie Σ_0 e Σ vale

$$\int_0^u \text{mod } P_u du = \int_0^u \sqrt{\varphi(u)} du,$$

che è indipendente dalle q_i , vuol dire che gli archi considerati delle geodetiche sono tutti eguali, c. d. d.

Analogamente si procede nel caso che le geodetiche passino tutte per uno stesso punto.

5. Stabiliamo ora la proprietà di *minimo* per gli archi delle geodetiche g . Si ha intanto:

$$dP = P_u du + \Sigma P q_i dq_i,$$

elevando a quadrato, ed osservando che il vettore P_u è unitario e normale ai vettori $P q_i$, si ha per l'elemento d'arco ds :

$$(5) \quad ds^2 = du^2 + (\sum P q_i dq_i)^2.$$

Di qui è facile dedurre l'accennata proprietà di minimo per ogni arco di geodetica g , finchè si rimane nell'interno della regione di V_n per la quale valga la (5).

Precisamente, si ha la proprietà:

Presi sopra una qualunque delle geodetiche g due punti qualunque P_0, P_1 della regione, ogni altra linea L che, restando nella regione, unisca P_0 con P_1 , ha lunghezza maggiore della geodetica.

Infatti se u_0, u_1 sono i valori del parametro u nei punti P_0 e P_1 di g , la lunghezza dell'arco della linea L , compreso tra P_0 e P_1 vale per la (5)

$$(6) \quad \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{du^2 + (\sum P q_i dq_i)^2},$$

ove, lungo la L , i parametri q_i sono funzioni note di u . D'altra parte, lungo la geodetica g i parametri q_i restano costanti, quindi l'arco di g , compreso tra P_0 e P_1 vale per la (5) stessa:

$$\int_{u_0}^{u_1} du,$$

che ha valore sempre minore dell'integrale (6). c. d. d.

Matematica. — *Trasporti non lineari: geometria di un sistema di equazioni alle derivate parziali del 2° ordine.* — II. *Le proprietà intrinseche del sistema.* Nota di ENEA BORTOLOTTI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. E. BOMPIANI.

3. Proseguo qui l'esposizione riassuntiva⁽²⁾ di una mia ricerca sui sistemi alle derivate parziali

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = H_{\alpha\beta}^i(u^\lambda, x^j, p_\gamma^l), \quad \left(p_\gamma^l = \frac{\partial x^l}{\partial u^\gamma} \right)$$

$$(i, j, h, k, l, g, f = 1, \dots, n; \alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots = 1, \dots, m; m \leq n).$$

Alla Nota I che precede rimando per le citazioni e le nozioni preliminari: rammento soltanto che ho convenuto di chiamare *proprietà intrinseche* del sistema (1.1) quelle che sono invarianti di fronte alle trasformazioni

$$(1.2) \quad x^{i'} = x^{i'}(x^i, \dots, x^n)$$

$$(1.3) \quad u^{a'} = u^{a'}(u^i, \dots, u^m)$$

sulle x^i e, simultaneamente, sulle u^i . Appunto di queste « proprietà intrinseche » andiamo ora ad occuparci.

Per effetto delle (1.2), (1.3) i secondi membri $H_{\alpha\beta}^i$ si trasformano nel modo seguente:

$$(3.1) \quad H_{\lambda\mu}^{i'} = H_{\lambda\mu}^i \theta_i^{i'} \varphi_{\lambda'}^{\lambda} \varphi_{\mu'}^{\mu} + \frac{\partial}{\partial x^{b'}} \theta_i^{i'} p_{\lambda}^j p_{\mu}^b \varphi_{\lambda'}^{\lambda} \varphi_{\mu'}^{\mu} + \theta_i^{i'} p_{\nu}^i \frac{\partial}{\partial u^{a'}} \varphi_{\lambda'}^{\nu} \varphi_{\mu'}^{\mu},$$

$$\left(\theta_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \varphi_{\lambda'}^{\lambda} = \frac{\partial u^{\lambda}}{\partial u^{\lambda'}}; \theta_i^{i'} \theta_{i'}^{j'} = \delta_i^j, \varphi_{\lambda'}^{\lambda} \varphi_{\mu'}^{\lambda'} = \delta_{\mu}^{\lambda} \right).$$

Agevolmente risulta di qui che, posto

$$(3.2) \quad \Gamma_{hk}^i = - \frac{1}{m(m+1)} \frac{\partial^2 H_{\lambda\mu}^i}{\partial p_{\lambda}^h \partial p_{\mu}^k} \quad (3)$$

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1936.

(2) Ved. la Nota I (*Preliminari*) a p. 16 di questo volume dei « Rendiconti ». Proseguo nella numerazione dei paragrafi e delle formule.

(3) Il sistema Γ_{hk}^i dato dalla (3.2) è stato già considerato da J. DOUGLAS, *System of K-dimens. manifolds...* (già cit., Nota I), p. 713, formula (5.1). (Il D. scrive — Γ_{hk}^i).

$$(3.3) \quad G_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{1}{n} \left[\frac{\partial H_{\alpha\beta}^i}{\partial p_{\gamma}^i} + \Gamma_{ib}^i (p_{\alpha}^b \delta_{\beta}^{\gamma} + p_{\beta}^b \delta_{\alpha}^{\gamma}) \right]$$

i sistemi $\Gamma_{hk}^i, G_{\alpha\beta}^{\gamma}$ (funzioni delle $u^{\lambda}, x^i, p_{\alpha}^l$) hanno per la (1.2), (1.3) la legge di trasformazione dei parametri di connessioni affini, n -dimensionale (in coordinate x^i) ed m -dimensionale (in coordinate u^{λ}):

$$(3.4) \quad \Gamma_{k'h'}^{i'} = \Gamma_{hk}^i \theta_{i'}^{i'} \theta_{h'}^b \theta_{k'}^b + \theta_{i'}^{i'} \frac{\partial}{\partial x^{b'}} \theta_{k'}^i,$$

$$(3.5) \quad G_{\alpha'\beta'}^{\gamma'} = G_{\alpha\beta}^{\gamma} \varphi_{\gamma'}^{\gamma} \varphi_{\alpha'}^{\alpha} \varphi_{\beta'}^{\beta} + \varphi_{\gamma'}^{\gamma} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha'}} \varphi_{\beta'}^{\gamma}.$$

E invece è per le (1.2), (1.3) un *tenore*

$$(3.6) \quad \Omega_{\alpha\beta}^{..i} = H_{\alpha\beta}^i + \Gamma_{hk}^i p_{\alpha}^b p_{\beta}^b - G_{\alpha\beta}^{\gamma} p_{\gamma}^i.$$

Si comprende bene come per tensori a indici $ijk \dots$ oppure $\alpha\beta\gamma \dots$, funzioni delle sole x^i e rispettivamente delle u^{λ} , le Γ_{hk}^i e $G_{\alpha\beta}^{\gamma}$ (per quanto dipendenti anche dalle p_{α}^l) possano senz'altro servire da *parametri di derivazione*. Ma le cose non vanno così semplicemente nel caso che più interessa, quello dei tensori le cui componenti *dipendono anche dalle* p_{α}^l : come ad es. è in generale $\Omega_{\alpha\beta}^{..i}$. Lo vediamo subito ponendoci nel caso più semplice, quello di uno *scalare* (invariante) $f(u, x, p)$. Le derivate $\frac{\partial f}{\partial x^i}, \frac{\partial f}{\partial u^{\lambda}}$ non sono, per le (1.2), (1.3), *campi di vettori covarianti*: ma mediante le (3.4), (3.5) vediamo che *invece lo sono*:

$$(3.7) \quad D_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}^b} \Gamma_{ki}^b p_{\alpha}^k, \quad (3.8) \quad D_{\lambda} f = \frac{\partial f}{\partial u^{\lambda}} + \frac{\partial f}{\partial p_{\alpha}^b} G_{\alpha\lambda}^{\beta} p_{\beta}^b.$$

Si noti: ciò in forza delle (3.4), (3.5), e indipendentemente invece dalle (3.2), (3.3): cosicchè per dar luogo alle *derivate covarianti* $D_i f, D_{\lambda} f$ mediante le (3.7), (3.8) *basta che* $\Gamma_{hk}^i, G_{\alpha\beta}^{\gamma}$ *siano funzioni delle* $u^{\lambda}, x^i, p_{\alpha}^l$ *comunque ottenute, le quali per le* (1.2), (1.3) *abbiano le leggi di trasformazione* (3.4), (3.5). E inoltre — restrizione che poniamo per semplicità di sviluppi, ma che potrebbe anche togliersi — si suppongano *simmetriche* rispetto ad b, k e rispettivamente ad α, β : come naturalmente risultano quando siano date dalle (3.2), (3.3). Questo appunto intenderemo fino a contrario avviso. E intenderemo anche che, per ora, le $u^{\lambda}, x^i, p_{\alpha}^l$ si riguardino *come* $m+n+m$ *variabili indipendenti*.

Il differenziale (ordinario) df è naturalmente un *invariante*: ora esso può scriversi nella forma seguente

$$(3.9) \quad df = D_\lambda f \cdot du^\lambda + D_i f \cdot dx^i + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha^b} \bar{\omega}_\alpha^b,$$

ove abbiamo posto

$$(3.10) \quad \bar{\omega}_\alpha^b = \bar{d}p_\alpha^b - \bar{d}p_\alpha^b + \bar{\Gamma}_{ki}^b p_\alpha^k dx^i - G_{\alpha\lambda}^\beta p_\beta^b du^\lambda.$$

Il sistema $\frac{\partial f}{\partial p_\alpha^b}$ è, pei suoi due indici b, α (per le (1.2), (1.3)) *un tensore*:

dunque anche $\bar{\omega}_\alpha^b$ dovrà avere carattere tensoriale; del resto la verifica diretta è agevole, e la cosa risulta anche da quanto diremo fra poco a proposito dei *differenziali assoluti* dei tensori.

La definizione che degli operatori D_i, D_λ è data dalle (3.7), (3.8) per un *campo scalare* si estende a *campi di vettori* o di *tensori*, funzioni delle $u^\lambda, x^i, p_\alpha^i$: a indici della serie $ijk \dots$, od $\alpha\beta\gamma \dots$, o di entrambe. Basterà scrivere le formule relative a *vettori*, controvarianti e covarianti:

$$(3.11) \quad D_i A^j = \frac{\partial A^j}{\partial x^i} - \frac{\partial A^j}{\partial p_\alpha^b} \Gamma_{ki}^b p_\alpha^k + \Gamma_{bi}^j A^b,$$

$$(3.12) \quad D_i A_j = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_j}{\partial p_\alpha^b} \Gamma_{ki}^b p_\alpha^k - \Gamma_{ji}^b A_b,$$

$$(3.13) \quad D_i A^\tau = \frac{\partial A^\tau}{\partial x^i} - \frac{\partial A^\tau}{\partial p_\alpha^b} \Gamma_{ki}^b p_\alpha^k, \quad (3.14) \quad D_\lambda A^j = \frac{\partial A^j}{\partial u^\lambda} + \frac{\partial A^j}{\partial p_\alpha^b} G_{\alpha\lambda}^\beta p_\beta^b;$$

(dunque: A^τ , e così A_τ , nei riguardi di D_i , e analogamente A_i , e così A_j , nei riguardi di D_λ , si comportano come sistemi di *scalari*);

$$(3.15) \quad D_\lambda A^\tau = \frac{\partial A^\tau}{\partial u^\lambda} + \frac{\partial A^\tau}{\partial p_\alpha^b} G_{\alpha\lambda}^\beta p_\beta^b + G_{\omega\lambda}^\tau A^\omega,$$

$$(3.16) \quad D_\lambda A_\tau = \frac{\partial A_\tau}{\partial u^\lambda} + \frac{\partial A_\tau}{\partial p_\alpha^b} G_{\alpha\lambda}^\beta p_\beta^b - G_{\tau\lambda}^\omega A_\omega.$$

E senz'altro le derivate *ordinarie* $\frac{\partial A^i}{\partial p_\alpha^b}, \frac{\partial A^\tau}{\partial p_\alpha^b}$, ecc. \dots si possono riguardare come derivate *covarianti*. Ciò consente infine di formare *differenziali assoluti* di vettori e tensori, nel modo che già la (3.9) indica per gli *scalari* (pei quali il differenziale assoluto si dovrà intendere coincidente con quello ordinario). Ad es.:

$$(3.17) \quad \bar{d}A^j = D_\lambda A^j \cdot du^\lambda + D_i A^j \cdot dx^i + \frac{\partial A^j}{\partial p_\alpha^b} A^b \cdot \bar{\omega}_\alpha^b = dA^j + \Gamma_{ki}^j A^k dx^i,$$

$$(3.18) \quad \bar{d}A^\tau = D_\lambda A^\tau \cdot du^\lambda + D_i A^\tau \cdot dx^i + \frac{\partial A^\tau}{\partial p_\alpha^b} A^\tau \cdot \bar{\omega}_\alpha^b = dA^\tau + G_{\tau\omega}^\tau A^\omega du^\omega.$$

Il passaggio a *tensori* qualunque è ovvio. In particolare vediamo che $\bar{d}p_\alpha^b$ dato dalla (3.10) è un *effettivo differenziale assoluto*.

Eguagliando a zero il differenziale assoluto di un vettore o tensore, risulta una *legge di trasporto* dei tensori (a indici di una delle due serie $ijk, \dots, \alpha\beta\gamma \dots$ o di entrambe) lungo una linea non soltanto della X_n o di una X_m su cui le u^λ siano coordinate curvilinee (ad es. di una X_m integrale del sistema (1.1)): ma anche della varietà ad $m+n+mn$ dimensioni su cui si considerano come coordinate le $u^\lambda, x^i, p_\alpha^i$. (Si ha cioè, per questa varietà, una sorta di *connessione affine*). Tale legge di trasporto risulta determinata dai due sistemi di parametri $\Gamma_{ik}^i, G_{\alpha\beta}^\gamma$: e se questi sono ricavati dalle $H_{\alpha\beta}^i$ mediante le (3.2), (3.3), risulta determinata quale ente *intrinseco al sistema alle derivate parziali* (1.1). Siccome risulta, dalle (3.6),

$$(3.19) \quad H_{\alpha\beta}^i = -\Gamma_{ik}^i p_\alpha^h p_\beta^k + G_{\alpha\beta}^\gamma p_\gamma^i + \Omega_{\alpha\beta}^{..i}$$

appare chiaramente sin d'ora che *gli invarianti differenziali del sistema* (1.1) *per le* (1.2), (1.3) *sono tutti e soli gli invarianti differenziali del trasporto ora detto e del tensore* $\Omega_{\alpha\beta}^{..i}$. Su questo torneremo fra breve: ma vediamo intanto quali sono gli invarianti differenziali della legge di trasporto che abbiamo introdotto.

4. La costruzione di questi invarianti si fa al modo solito, partendo dai tensori di *curvatura* e di *torsione*, ottenibili col *trasporto ciclico*, o più semplicemente (per quanto riguarda la loro costruzione analitica) mediante le *formule di commutazione* delle derivate covarianti, o dei differenziali assoluti. Naturalmente vi sono parecchie formule di commutazione: è interessante che già tutti i tensori di curvatura si presentano (se pure due di essi appaiono soltanto mediante una loro combinazione lineare) scrivendo le formule di commutazione per uno *scalare* (il che corrisponde al fatto che i medesimi tensori costituiscono anche le *grandezze di torsione*):

$$(4.1) \quad (D_j D_i - D_i D_j) f = \frac{\partial f}{\partial p_\alpha^h} R_{ijk}^{..h} p_\alpha^k,$$

$$(4.2) \quad (D_\mu D_\lambda - D_\lambda D_\mu) f = -\frac{\partial f}{\partial p_\alpha^h} K_{\mu\lambda\alpha}^{..h\beta} p_\beta^h,$$

$$(4.3) \quad \left(\frac{\partial}{\partial p_\beta^j} D_i - D_i \frac{\partial}{\partial p_\beta^j} \right) f = -\frac{\partial f}{\partial p_\alpha^h} B_{ik\alpha}^{..h\beta} p_\alpha^k,$$

$$(4.4) \quad \left(\frac{\partial}{\partial p_\beta^j} D_\lambda - D_\lambda \frac{\partial}{\partial p_\beta^j} \right) f = \frac{\partial f}{\partial p_\alpha^h} C_{\lambda\alpha}^{..h\beta} p_\gamma^j$$

$$(4.5) \quad (D_j D_\lambda - D_\lambda D_j) f = \frac{\partial f}{\partial p_\alpha^h} (M_{\lambda\alpha}^{..h\mu} p_\mu^h + N_{jk\alpha}^{..h\lambda} p_\alpha^k)$$

ove abbiamo posto

$$(4.6) \quad R_{jik}^{\dots h} = \frac{\partial \Gamma_{kj}^h}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^h}{\partial x^j} - \left(\frac{\partial \Gamma_{kj}^h}{\partial p_v^g} \Gamma_{fi}^g - \frac{\partial \Gamma_{ki}^h}{\partial p_v^g} \Gamma_{fj}^g \right) p_v^f + \Gamma_{kj}^i \Gamma_{il}^h - \Gamma_{ki}^l \Gamma_{lj}^h$$

$$(4.7) \quad K_{\mu\lambda\alpha}^{\dots\beta} = \frac{\partial G_{\alpha\mu}^\beta}{\partial u^\lambda} - \frac{\partial G_{\alpha\lambda}^\beta}{\partial u^\mu} + \left(\frac{\partial G_{\alpha\mu}^\beta}{\partial p_v^g} G_{v\lambda}^\tau - \frac{\partial G_{\alpha\lambda}^\beta}{\partial p_v^g} G_{v\mu}^\tau \right) p_v^g + \\ + G_{\alpha\mu}^\gamma G_{v\lambda}^\beta - G_{\alpha\lambda}^\gamma G_{v\mu}^\beta$$

$$(4.8) \quad B_{kij}^{\dots h\beta} = \frac{\partial \Gamma_{ki}^h}{\partial p_j^\beta}, \quad (4.9) \quad C_{\lambda\alpha j}^{\dots\gamma\beta} = \frac{\partial G_{\lambda\alpha}^\gamma}{\partial p_j^\beta},$$

$$(4.10) \quad M_{\lambda\alpha j}^{\dots\mu} = \frac{\partial G_{\alpha\lambda}^\mu}{\partial x^j} - \frac{\partial G_{\alpha\lambda}^\mu}{\partial p_v^g} \Gamma_{fj}^g p_v^f,$$

$$(4.11) \quad N_{jk\lambda}^{\dots h} = \frac{\partial \Gamma_{kj}^h}{\partial u^\lambda} + \frac{\partial \Gamma_{kj}^h}{\partial p_v^g} G_{v\lambda}^\tau p_v^g.$$

Che $R_{jik}^{\dots h}$, $K_{\mu\lambda\alpha}^{\dots\beta}$; $B_{kij}^{\dots h\beta}$, $C_{\lambda\alpha j}^{\dots\gamma\beta}$ siano *tensori*, appare dalle (4.1), (4.2); (4.3), (4.4); e per gli ultimi due è purè conseguenza ovvia delle (3.4), (3.5). Che lo siano $M_{\lambda\alpha j}^{\dots\mu}$, $N_{jk\lambda}^{\dots h}$ risulta pure dalle (3.4), (3.5): basta osservare che essi sono ottenuti applicando a $G_{\alpha\lambda}^\mu$, Γ_{kj}^h , come se fossero *tensori*, gli operatori D_j , D_λ , e a questo modo si dà luogo a *tensori*, in conseguenza del fatto che nelle formule di trasformazione (3.5) per $G_{\alpha\lambda}^\mu$ [o nelle (3.4) per Γ_{kj}^h] il termine contenente le derivate seconde $\frac{\partial}{\partial u^{\alpha'}} \varphi_{\beta'}^{\gamma'}$ [o rispettivamente le $\frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} \theta_{\nu'}^{i'}$] non dipende dalle x^i , $x^{i'}$ [dalle u^λ , $u^{\lambda'}$]. Del resto è, alla fine, superfluo il verificare direttamente il carattere tensoriale di $M_{\lambda\alpha j}^{\dots\mu}$, $N_{jk\lambda}^{\dots h}$ dal momento che ad es. esso risulta dall'esame di queste *formule di commutazione* per un *vettore* A^i od A^α :

$$(4.12) \quad (D_j D_\lambda - D_\lambda D_j) A^i = \frac{\partial A^i}{\partial p_v^h} (M_{\lambda v j}^{\dots\mu} p_\mu^h + N_{jk\lambda}^{\dots h} p_v^k) - N_{jk\lambda}^{\dots i} A^k,$$

$$(4.13) \quad (D_j D_\lambda - D_\lambda D_j) A^\alpha = \frac{\partial A^\alpha}{\partial p_v^h} (M_{\lambda v j}^{\dots\mu} p_\mu^h + N_{jk\lambda}^{\dots h} p_v^k) + M_{\lambda\beta j}^{\dots\alpha} A^\beta.$$

Per ragioni di spazio non stiamo a scrivere le altre formule di commutazione per vettori o tensori: in cui oltre ai corrispondenti termini delle formule relative a scalari compaiono altri termini, contenenti però sempre quegli stessi *tensori di curvatura* dati dalle (4.6) ... (4.11).

Nei riguardi della *torsione*, tenuto conto che abbiamo supposto la *simmetria* di Γ_{ik}^j , $G_{\alpha\beta}^\gamma$ rispetto alla coppia d'indici inferiori, non v'è che da cal-

colare $\bar{d}_2 \bar{\omega}_1^b - \bar{d}_1 \bar{\omega}_2^b = (\bar{d}_2 \bar{d}_1 - \bar{d}_1 \bar{d}_2) p_\alpha^b$: la formula risulta da quella relativa a un qualunque tensore T_α^b , la quale a sua volta può ricavarsi da quelle relative a vettori A^b, B^a :

$$(4.14) \quad (\bar{d}_2 \bar{d}_1 - \bar{d}_1 \bar{d}_2) A^b = \{ -R_{jlk}^{\cdot\cdot\cdot b} d_2 x^j d_1 x^l + B_{klj}^{\cdot\cdot\cdot b} (\bar{d}_2 p_\beta^j d_1 x^l - \bar{d}_1 p_\beta^j d_2 x^l) + N_{lk\gamma}^{\cdot\cdot\cdot b} (d_2 u^\gamma d_1 x^l - d_1 u^\gamma d_2 x^l) \} A^b$$

$$(4.15) \quad (\bar{d}_2 \bar{d}_1 - \bar{d}_1 \bar{d}_2) B_\alpha = \{ K_{\mu\lambda\alpha}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} d_2 u^\mu d_1 u^\lambda - C_{\alpha\gamma j}^{\cdot\cdot\cdot\beta} (\bar{d}_2 p_\beta^j d_1 u^\gamma - \bar{d}_1 p_\beta^j d_2 u^\gamma) + M_{\gamma\alpha l}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} (d_2 u^\gamma d_1 x^l - d_1 u^\gamma d_2 x^l) \} B_\gamma.$$

Precisamente otteniamo

$$(4.16) \quad (\bar{d}_2 \bar{d}_1 - \bar{d}_1 \bar{d}_2) p_\alpha^b = \{ -R_{jlk}^{\cdot\cdot\cdot b} d_2 x^j d_1 x^l + B_{klj}^{\cdot\cdot\cdot b} (\bar{d}_2 p_\beta^j d_1 x^l - \bar{d}_1 p_\beta^j d_2 x^l) + N_{lk\gamma}^{\cdot\cdot\cdot b} (d_2 u^\gamma d_1 x^l - d_1 u^\gamma d_2 x^l) \} p_\alpha^b + \{ K_{\mu\lambda\alpha}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} d_2 u^\mu d_1 u^\lambda - C_{\alpha\gamma j}^{\cdot\cdot\cdot\beta} (\bar{d}_2 p_\beta^j d_1 u^\gamma - \bar{d}_1 p_\beta^j d_2 u^\gamma) + M_{\gamma\alpha l}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} (d_2 u^\gamma d_1 x^l - d_1 u^\gamma d_2 x^l) \} v_\alpha^b.$$

Ne risulta, nei riguardi della *torsione*, quanto avevamo accennato: essa non dà nulla di più della curvatura.

Gli invarianti differenziali della legge di trasporto sopra definita, di parametri Γ_{hk}^i e $G_{\alpha\beta}^\gamma$, sono tutti e soli gli invarianti algebrici del sistema formato dai sei tensori di curvatura e dalle loro derivate con gli operatori $D_i, D_\lambda, \frac{\partial}{\partial p_\beta^j}$.

5. Quanto precede si applica, naturalmente, al caso in cui i parametri $\Gamma_{hk}^i, G_{\alpha\beta}^\gamma$ (e quindi la corrispondente legge di trasporto) siano ricavati, secondo le (3.2), (3.3), da un assegnato sistema differenziale (1.1). S'intende bene che questo non è per $\Gamma_{hk}^i, G_{\alpha\beta}^\gamma$ il caso più generale: effettivamente non è difficile verificare che posto

$$(5.1) \quad F_{\alpha\beta \cdot k}^{\cdot\cdot\cdot i\gamma} = \frac{\partial H_{\alpha\beta}^i}{\partial p_\gamma^k} + \Gamma_{kb}^i (p_\beta^b \delta_\alpha^\gamma + p_\alpha^b \delta_\beta^\gamma) - G_{\alpha\beta}^\gamma \delta_k^i \\ = -B_{jlk}^{\cdot\cdot\cdot i\gamma} p_\alpha^j p_\beta^l + C_{\alpha\beta \cdot k}^{\cdot\cdot\cdot \delta\gamma} p_\delta^i + \frac{\partial \Omega_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\cdot i}}{\partial p_\gamma^k};$$

$$(5.2) \quad Q_{\alpha\beta \cdot h \cdot k}^{\cdot\cdot\cdot i\lambda \cdot \mu} = \frac{\partial H_{\alpha\beta}^i}{\partial p_\lambda^h \partial p_\mu^k} + \Gamma_{hk}^i (\delta_\alpha^\lambda \delta_\beta^\mu + \delta_\beta^\lambda \delta_\alpha^\mu) = -\frac{\partial}{\partial p_\mu^k} B_{jlk}^{\cdot\cdot\cdot i\lambda} p_\alpha^j p_\beta^l - \\ - B_{klj}^{\cdot\cdot\cdot i\mu} (\delta_\beta^\lambda p_\alpha^j + \delta_\alpha^\lambda p_\beta^j) - (B_{klj}^{\cdot\cdot\cdot i\lambda} (\delta_\beta^\mu p_\alpha^j + \delta_\alpha^\mu p_\beta^j) + \frac{\partial}{\partial p_\mu^k} C_{\alpha\beta \cdot h}^{\cdot\cdot\cdot \gamma\lambda} p_\gamma^i + \\ + C_{\alpha\beta \cdot h}^{\cdot\cdot\cdot \mu\lambda} \delta_k^i + C_{\alpha\beta \cdot k}^{\cdot\cdot\cdot \lambda\mu} \delta_h^i + \frac{\partial^2 \Omega_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\cdot i}}{\partial p_\lambda^h \partial p_\mu^k})$$

perchè esista un sistema $H_{\alpha\beta}^i$, dotato della legge di trasformazione (3.1), da cui mediante le (3.2), (3.3) Γ_{kk}^i , $G_{\alpha\beta}^\gamma$ possano ricavarsi, è necessario e sufficiente che Γ_{hk}^i , $G_{\alpha\beta}^\gamma$ insieme a un conveniente tensore $\Omega_{\alpha\beta}^{i\cdot\cdot i}$ soddisfino alle condizioni

$$(5.3) \quad F_{\alpha\beta\cdot i}^{i\cdot\cdot\gamma} = 0, \quad (5.4) \quad Q_{\alpha\beta\cdot h\cdot k}^{i\cdot\cdot i\cdot\alpha\cdot\beta} = 0.$$

La ricerca degli invarianti intrinseci del sistema (1.1) si riconduce infine a quella degli invarianti simultanei del tensore $\Omega_{\alpha\beta}^{i\cdot\cdot i}$ e del trasporto $(\Gamma_{kk}^i, G_{\alpha\beta}^\gamma)$, soddisfacenti alle (5.3), (5.4): e quindi il problema di trovare le *proprietà intrinseche* del sistema (1.1) è risolto da quanto abbiamo sopra esposto. Osserviamo che le (1.1) si possono scrivere nella forma invariante

$$(5.5) \quad \bar{d}p_\alpha^h = \Omega_{\alpha\beta}^{i\cdot\cdot h} du^\beta, \quad dx^i = p_\alpha^i du^\alpha;$$

di qui, tenute presenti le (4.16), è agevole ricavare, pure in forma invariante, le *condizioni d'integrabilità* del sistema (1.1). E anche non risulta difficile risolvere nel modo più generale il *problema d'equivalenza* per due sistemi differenziali del tipo (1.1): trasformabilità dell'uno nell'altro mediante convenienti trasformazioni (1.2), (1.3). Rimando per questo al lavoro *in extenso*: e così pure a questo rimando per un preciso raffronto degli enti introdotti con quelli che figurano nelle precedenti ricerche, di cui ho detto nella Nota I. Darò soltanto (nella Nota III, di prossima pubblicazione in questi « Rendiconti ») un cenno sulle relazioni fra le derivazioni utilizzate dai precedenti Autori (e i corrispondenti trasporti) e quelle definite nella presente Nota; e verrò infine al più grave problema, quello delle proprietà « descrittive ».

Matematica. — *Funzioni determinanti e polinomi di Laguerre.* Nota di U. BROGGI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. FUBINI.

Sia $\alpha < +\infty$ l'ascissa di convergenza dell'integrale di Laplace

$$F(\chi) = \int_0^\infty e^{-\chi t} f(t) dt$$

e $\lambda \geq 1$ se $\alpha \leq \frac{1}{2}$, $\lambda \geq 2\alpha$ se $\alpha > \frac{1}{2}$. Lo sviluppo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{\chi - \lambda}{\chi} \right)^n$$

di $\chi F(\chi)$ in serie di potenze di $\frac{\chi - \lambda}{\chi}$ converge nel semipiano $R\chi > \frac{\lambda}{2}$ se il punto all'infinito è punto singolare di $F(\chi)$, nel semipiano $R\chi > \beta < \alpha$, se detto punto è regolare.

È $\left| \frac{\chi - \lambda}{\chi} \right| = 1$ se $R\chi = \frac{\lambda}{2}$ o $\chi = \infty$, e la sostituzione

$$u = \frac{\chi - \lambda}{\chi}$$

trasforma il semipiano $R\chi > \frac{\lambda}{2}$, in cui $F(\chi)$ è regolare, nel circolo di centro λ e raggio ρ in cui converge la serie $a_0 + a_1 u + \dots$: se il punto all'infinito è punto singolare di $F(\chi)$ è $\rho = 1$ qualunque sia λ , se esso è regolare è $\rho > 1$, se $\lambda > 2\alpha$. E poichè in questo caso, se $L_n(t)$ è il polinomio di Laguerre di ordine n

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} D^n (e^{-t} t^n),$$

la serie $a_0 L_0(\lambda t) + a_1 L_1(\lambda t) + \dots$ converge assolutamente in ogni punto del piano t ed uniformemente in ogni area finita chiusa dello stesso, se ne deduce, per il teorema di Lerch ⁽²⁾, che è anche $a_0 L_0(\lambda t) + a_1 L_1(\lambda t) + \dots$ uguale a $f(t)$ (che nel caso supposto, e nel caso supposto soltanto, è una

(1) Nella seduta del 19 gennaio 1936.

(2) Cfr., ad es., S. PINCHERLE, *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche*, I, pp. 334-336.

funzione intera di tipo esponenziale) se l'integrale che definisce $F(z)$ è (R), uguale a $f(t)$ meno eventualmente che in un insieme di punti di misura nulla, se esso è (L).

Se è $\rho = 1$ è invece solo, e sempre che la funzione $f(t)$, definita nei punti del semisse reale positivo, vi sia continua,

$$f(t) = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(\lambda t) r^n.$$

Estendiamo qui ad $\alpha < +\infty$ qualunque la dimostrazione che S. WIGERT⁽¹⁾ forniva nel caso in cui sia $\alpha \leq \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$, solo scostandocene in qualche punto.

È

$$\frac{1}{1-v} e^{-\frac{vt}{1-v}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t) v^n \quad (|v| < 1)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} L_n(\lambda t) L_m(\lambda t) dt = 0, \frac{1}{\lambda}$$

secondo che $m = n$, $m \neq n$,

$$a_n = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) L_n(\lambda t) dt \quad (n = 0, 1, \dots),$$

e pertanto anche ($0 < \chi < 1$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) L_n(\lambda t) dt = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) \frac{e^{-\frac{\lambda r t}{1-\chi}}}{1-\chi} dt.$$

È infatti legittimo, poichè $r \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n| < 1$, che s'invertano i due segni d'integrale e di somma⁽²⁾. E poichè⁽³⁾

$$e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(\omega)}{n!} t^n = \sum_{v=0}^{\infty} (-)^v \frac{(t\omega)^v}{(v!)^2} = I_0(2\sqrt{t\omega})$$

può scriversi, per la stessa ragione, se

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\lambda \omega} f(\omega) L_n(\lambda \omega) d\omega,$$

(1) S. WIGERT, *Contributions à la théorie des polynomes d'Abel-Laguerre*, in « Arkiv för Matematik Astronomisch. Fysik », Bd. 15 (1921), n. 25.

(2) Cfr. BROMWICH, *An introd. to the theory of inf. Series.* (1926), p. 500.

(3) S. WIGERT, loc. cit., p. 9.

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \lambda \int_0^\infty e^{-\omega\lambda} f(\omega) \left\{ \sum_{n=0}^\infty \frac{L_n(\lambda\omega)}{n!} t^n \right\} d\omega = \\ &= \lambda e^t \int_0^\infty e^{-\lambda\omega} f(\omega) I_0(2\sqrt{\lambda t \omega}) d\omega.\end{aligned}$$

La formola

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \int_0^\infty e^{-t} t^n I_0(2\sqrt{xt}) dt$$

vincolante i polinomi di Laguerre alla funzione I_0 di Bessel, e che il Wigert ridimostra, permette di provare, seguendo un cammino analogo al percorso, che

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^\infty a_n L_n(\lambda x) r^n &= e^{\lambda x} \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!} r^n \int_0^\infty e^{-t} t^n I_0(2\sqrt{xt\lambda}) dt \\ &= e^{\lambda x} \int_0^\infty e^{-t} I_0(2\sqrt{\lambda xt}) \Phi(rt) dt,\end{aligned}$$

e pertanto

$$\sum_{n=0}^\infty a_n L_n(\lambda x) r^n = \lambda e^{\lambda x} \int_0^\infty e^{(1-r)t} I_0(2\sqrt{\lambda xt}) \left(\int_0^\infty e^{-\lambda\omega} f(\omega) I_0(2\sqrt{\lambda r\omega t}) d\omega \right) dt.$$

La dimostrazione data dal Wigert che se $\lambda = 1$ il secondo membro tende ad $f(x)$ quando r tende a $1 - 0$ può venire estesa senz'altro al caso di $\lambda \geq 1$ qualunque e fornisce

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^\infty a_n L_n(\lambda x) r^n,$$

come si affermò.

Suscettibile invece di una dimostrazione più immediata e di una immediata generalizzazione è il teorema, di cui il Wigert dà una dimostrazione comunicatagli da M. Riesz:

« Se $f(t)$ è continua per $t \geq 0$ e tale che

$$\int_0^\infty e^{-t} f^2(t) dt$$

converge, è anche

$$\int_0^\infty e^{-t} f^2(t) dt = \sum_{n=0}^\infty a_n^2,$$

e che può venire sostituito dall'altro:

I A « Se $e^{-\frac{\lambda}{2}t} f(t)$ è L_2 sul semiasse reale positivo, è pure

$$f(t) = l \cdot i \cdot m \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n(\lambda t)$$

dove la notazione $l \cdot i \cdot m$ sta ad indicare, come vuole il Wiener, che

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \left[f(t) - \sum_{v=0}^n a_v L_v(\lambda t) \right]^2 dt \rightarrow 0, \quad \text{se } n \rightarrow \infty »;$$

così come suscettibile di dimostrazione immediata è la proposizione reciproca:

II B « Se $a_0^2 + a_1^2 + \dots$ converge, è

$$f(t) = l \cdot i \cdot m \sum_{v=0}^{\infty} a_v L_v(\lambda t) »$$

che se $\lambda = 1$ veniva formulata e meno semplicemente dimostrata da M. Picone⁽¹⁾. Converga infatti $a_0^2 + a_1^2 + \dots$ e si ponga

$$F_m = a_0 L_0(\lambda t) + a_1 L_1(\lambda t) + \dots + a_m L_m(\lambda t).$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} [F_m - F_n]^2 dt = \lambda [a_{m+1}^2 + \dots + a_n^2] \rightarrow 0$$

se m ed n tendono indipendentemente all'infinito.

Per il teorema di Fischer-Riesz, valido pure nel caso di un intervallo infinito⁽²⁾, esiste una funzione $\psi(t)$, definita a meno di un insieme di misura nulla, verso la quale tende $F_m(t)$. E, per il teorema di Lerch, è anche, a meno di un insieme di misura nulla

$$\psi(t) \equiv f(t).$$

II A, II B sono così dimostrati.

Non è forse inutile aggiungere che:

1. Se $e^{-\frac{\lambda}{2}t} f(t)$ è L_2 è anche $\lambda \geq 2\alpha$.

Si ha infatti, per la disuguaglianza di Schwarz

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-t\left(\gamma - \frac{\lambda}{2}\right)} e^{-\frac{\lambda}{2}t} |f(t)| dt \right)^2 \leq \int_0^{\infty} e^{-t(2\gamma - \lambda)} dt \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f^2(t) dt.$$

(1) M. PICONE, *Sulla trasformazione di Laplace*, « Rendiconti Lincei », XXI (1935), pp. 306-313.

(2) Cfr., ad es., E. C. TITCHMARSH, *The Theory of Functions* (1932), §§ 12.5; 12.51.

2. Σa_n^2 non può convergere se non è $\lambda \geq 2\alpha$ o se, essendo $\lambda = 2\alpha$, sulla retta di convergenza $R\lambda = \alpha$ si trova una singolarità algebrica di ordine maggiore di 1 od un polo.

La prima affermazione è una immediata conseguenza della II A o, più generalmente, della ineguaglianza di Bessel. La seconda si fonda su di ciò che nel caso supposto non può aversi $a_n \rightarrow 0$ ⁽¹⁾.

Meccanica. — *Una nuova funzione di corrente per lo studio del moto rotazionale dei gas.* Nota di LUIGI CROCCO, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. A. CROCCO.

INTERESSE DEL PROBLEMA ROTAZIONALE NELLE CORRENTI GASSOSE IPERSONORE. — La nuova funzione di corrente di cui è questione nella presente Nota esiste, come quella consueta, soltanto per i moti *bidimensionali* o per quelli che presentano *simmetria di rotazione intorno ad un asse*. Tuttavia per generalità e sveltezza di esposizione conviene esaminare dapprima il caso più generale di moto stazionario in tre dimensioni per ricavarne poi le conseguenze che interessano i due casi ora detti.

Le equazioni della gasdinamica sono già state l'oggetto di numerose ricerche e di soluzioni esatte o approssimate, ma finora unicamente nel caso particolare di *moto irrotazionale*.

L'ipotesi di rotazione nulla in tutto il campo del moto, giustificata per i gas perfetti che, soli, consideriamo, quando la velocità del fluido rispetto ai corpi che lo contengono o che sono da esso contornati è ovunque inferiore alla *velocità del suono* e la rotazione è nulla lungo una linea qualsiasi che taglia tutte le linee di corrente (ad es. all'infinito a monte), non lo è invece in generale se la velocità supera, anche localmente, quella del suono. In tali condizioni possono infatti aver luogo *urti di compressione*, caratterizzati, per i gas ideali, da superfici di discontinuità attraverso le quali il vettore velocità e le grandezze di stato del fluido subiscono una brusca variazione che differisce da punto a punto della superficie d'urto, a meno che questa non sia piana o conica. Nel moto dei gas reali una vera e propria discontinuità non è possibile; ma è stato mostrato che la conduttività calorifica — in generale trascurabile — può in determinate circostanze consentire rilevanti trasmissioni di calore fra strati contigui con forti gradienti di temperatura, così da provocare notevoli trasformazioni di stato in uno strato tanto sottile da rendere inapprezzabile la differenza dal caso dell'urto ideale.

Naturalmente dati gli scambi di calore le trasformazioni non sono più adiabatiche e si ha attraverso la superficie d'urto un incremento di entropia

(1) Cfr., ad es., P. DIENES, *The Taylor Series* (1931), p. 462.

(2) Nella seduta del 5 gennaio 1936.

variabile in generale da punto a punto. Sicchè se anche il gas è isentropico a montè della superficie d'urto, esso non lo è più a valle; dove quindi — per il noto *teorema di BJERKNES* ⁽¹⁾ — il moto irrotazionale non può più esistere.

Contemporaneamente cessa di esistere sia nel caso tridimensionale che in quello a due dimensioni la consueta *funzione potenziale*, definita appunto dalle condizioni di irrotazionalità; nel caso bidimensionale poi, come in quello di simmetria intorno ad un asse, neppure la usuale *funzione di corrente* si presta più alle applicazioni, poichè in essa compare la densità del fluido e questa, cadendo la legge adiabatica che la lega alla pressione, non può più essere espressa in funzione della sola velocità nè essere eliminata in modo da formare un'equazione che contenga la sola funzione di corrente. Sicchè in entrambi i casi vengono a mancare i mezzi per lo studio rigoroso del moto rotazionale; in particolare di tutti quei moti nei quali compaiono onde d'urto che non siano piane o coniche.

Interessa quindi l'esame delle equazioni generali del moto per vedere di impostare almeno in qualche caso lo studio rigoroso del moto rotazionale dei gas.

LE EQUAZIONI GENERALI DEL MOTO. — Indichiamo con \mathbf{V} il vettore velocità, V il suo modulo; con V_s la velocità *locale* del suono, con V_l la cosiddetta *velocità limite* di espansione nel vuoto, con p la pressione, ρ la densità, T la temperatura del gas; con R la costante di stato, e con k il rapporto dei calori specifici.

Le equazioni del moto stazionario si possono porre sotto la nota forma ⁽²⁾

$$(1) \quad \frac{1}{2} \text{grad } V^2 + \text{rot } \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} = - \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

A questa vanno associate:

l'equazione di continuità:

$$(2) \quad \text{div } (\rho \mathbf{V}) = 0,$$

l'equazione dell'energia, che per i gas perfetti si scrive ⁽³⁾:

$$(3) \quad \frac{V^2}{2g} + \frac{Rk}{k-1} T = \text{cost} = \frac{V_l^2}{2g},$$

(1) Ved. V. BJERKNES, *Hydrodynamique Physique* ecc. Parigi, 1933.

(2) Vedi, ad es., «Hdb. der Physik.», Bd. VII, p. 11, form. (3 b).

(3) Si noti che la costante che figura in questa equazione rimane la stessa lungo ogni filetto fluido anche in presenza di urti; gli scambi di calore che questi comportano si svolgono infatti tra le sezioni trasversali dello stesso filetto e non interessano quelli contigui, sicchè l'energia totale di ogni filetto resta costante. Noi, inoltre, supporremo il gas inizialmente isenergetico, e quindi la costante 0 — ciò che è lo stesso — V_l , uguale in tutto il campo gassoso.

e quella di stato:

$$(4) \quad p = gR\rho T.$$

Ricordando la nota espressione della velocità del suono si ha dalla (3)

$$(3') \quad V_s^2 = gkRT = \frac{k-1}{2}(V_1^2 - V^2).$$

Dividendo ora la (1) per V_s^2 si ottiene, grazie alla (3') e all'equazione di stato,

$$(1') \quad \frac{1}{2V_s^2} \text{grad } V^2 + \frac{\text{rot } \mathbf{V} \wedge \mathbf{V}}{V_s^2} = -\frac{1}{k} \text{grad } \ln p.$$

Ma dalla (3') si ha

$$(3'') \quad \text{grad } \ln V_s^2 = \text{grad } \ln T = -\frac{\text{grad } V^2}{V_1^2 - V^2} = -\frac{k-1}{2V_s^2} \text{grad } V^2;$$

e quindi, ricorrendo alla (4) e chiamando S l'entropia del gas (in unità meccaniche), la (1') può così trasformarsi:

$$(1'') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\text{rot } \mathbf{V} \wedge \mathbf{V}}{V_s^2} &= \text{grad} \left[\frac{1}{k-1} \ln T - \frac{1}{k} \ln p \right] = \text{grad } \ln \left(\frac{T^{\frac{1}{k-1}}}{p^{\frac{1}{k}}} \right) \\ &= \frac{1}{k-1} \text{grad } \ln \left(\frac{p^{\frac{1}{k}}}{\rho} \right) = \frac{1}{kR} \text{grad } S. \end{aligned} \right.$$

Questa equazione, che esprime in diversa forma il *teorema di BIERKNES*, conduce alla conseguenza già citata che se il gas non è isentropico $\text{rot } \mathbf{V}$ non può essere nullo.

Moltiplicando scalarmente per \mathbf{V} la (1''), l'ultimo termine dà:

$$\mathbf{V} \times \text{grad } S = 0;$$

e mostra che lungo ogni linea di corrente le trasformazioni del gas sono isentropiche.

In conseguenza si hanno le relazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \times \text{grad } \ln p &= \frac{1}{k} \mathbf{V} \times \text{grad } \ln p = \frac{1}{k-1} \mathbf{V} \times \text{grad } \ln T = \\ &= \frac{1}{k-1} \mathbf{V} \times \text{grad } \ln V_s^2; \end{aligned}$$

grazie alle quali, scrivendo l'equazione di continuità sotto la forma

$$(2') \quad \text{div } \mathbf{V} + \mathbf{V} \times \text{grad } \ln p = 0,$$

si vede facilmente che essa può anche trasformarsi nelle due forme equivalenti alla (2)

$$(2'') \quad \operatorname{div} (p^{\frac{1}{k}} \mathbf{V}) = 0 \quad ; \quad \operatorname{div} (V_s^{\frac{2}{k-1}} \mathbf{V}) = 0.$$

Eliminando l'entropia dalla (1'') si ottiene, grazie alla (3'), la seguente equazione

$$(5) \quad \operatorname{rot} \left(\frac{\operatorname{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V}}{V_l^2 - V^2} \right) = 0$$

che, unitamente alla (2'')

$$(6) \quad \operatorname{div} [(V_l^2 - V^2)^{\frac{1}{k-1}} \mathbf{V}] = 0$$

ed alle condizioni al contorno determina completamente il moto.

Le equazioni (5) e (6) sono importanti perchè in esse non figura che la velocità. Particolarmente importante è la forma (6) dell'equazione di continuità, la cui validità, evidente nel moto isentropico perchè allora la densità è ovunque proporzionale a $(V_l^2 - V^2)^{\frac{1}{k-1}}$, lo è meno nell'attuale caso generale in cui questa proporzionalità ha luogo solo lungo le singole linee di corrente.

La (6) è poi d'importanza capitale nel problema piano e in quello a simmetria assiale perchè porta alla definizione della nuova *funzione di corrente* che consente, a differenza da quella usuale, lo studio rigoroso di questi due problemi.

MOTO IN DUE DIMENSIONI. — Prendiamo come unità di misura per la velocità la velocità limite, ciò che porta ad una maggiore snellezza di formule (1); è poniamo

$$(7) \quad w = \frac{V}{V_l} (< 1) \quad ; \quad c^2 = \frac{V_s^2}{V_l^2} = \frac{k-1}{2} (1 - w^2).$$

Siano $u = w \cos \theta$, $v = w \sin \theta$ le componenti di w (che d'ora in poi chiameremo brevemente *velocità*) inclinata dell'angolo θ sull'asse delle x . Se conveniamo che gli indici x, y indicano la derivazione parziale rispetto alle rispettive direzioni, si vede facilmente che $\operatorname{rot} \mathbf{V}$ si riduce a $v_x - u_y$ diretto normalmente al piano del moto verso il basso, sicchè le (5), (6) si riducono alle:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u(v_x - u_y)}{1 - w^2} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{v(v_x - u_y)}{1 - w^2} \right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} [u(1 - w^2)^{\frac{1}{k-1}}] + \frac{\partial}{\partial y} [v(1 - w^2)^{\frac{1}{k-1}}] = 0 \end{cases}$$

(1) Vedi CASTAGNA, *Formole per lo studio sperimentale* ecc. « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », vol. 70.

la prima delle quali può agevolmente trasformarsi, con l'aiuto della seconda, nella:

$$(8') \quad u \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{v_x - u_y}{(1 - w^2)^{\frac{k}{k-1}}} \right] + v \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{v_x - u_y}{(1 - w^2)^{\frac{k}{k-1}}} \right] = 0;$$

la quale mostra immediatamente che finchè il moto è continuo l'espressione tra parentesi rimane costante lungo ogni linea di corrente, e quindi che la rotazione si mantiene proporzionale alla potenza $\frac{k}{k-1}$ di $1 - w^2$, cioè, come mostra la (3'), della temperatura. E siccome lungo ogni linea di corrente le trasformazioni sono isentropiche e quindi p è proporzionale a $T^{\frac{k}{k-1}}$, si deduce il seguente

TEOREMA. — *Nel moto bidimensionale di un gas la vorticosità lungo ogni linea di corrente, fra due discontinuità, è proporzionale alla pressione.*

Tornando ora alle (8) si vede che la seconda è automaticamente soddisfatta se si pone:

$$(9) \quad \begin{cases} u(1 - w^2)^{\frac{1}{k-1}} = \psi_y \\ v(1 - w^2)^{\frac{1}{k-1}} = -\psi_x \end{cases}$$

dove ψ , funzione qualsiasi delle coordinate, è la nuova *funzione di corrente*, che coincide a meno di un fattore con quella consueta quando il moto è irrotazionale, ma ne differisce sostanzialmente nel problema rotazionale. Infatti nelle formule di definizione (9) non compaiono che la velocità e le sue componenti le quali possono quindi essere espresse in funzione delle sole derivate di ψ , ciò che non è possibile mediante la consueta funzione di corrente quando il moto è rotazionale.

Le (9) possono anche scriversi sotto la seguente forma

$$(9') \quad \begin{cases} w^2(1 - w^2)^{\frac{2}{k-1}} = \psi_x^2 + \psi_y^2 = |\text{grad } \psi|^2 \\ \frac{v}{u} = \text{tg } \theta = -\frac{\psi_x}{\psi_y} \end{cases}$$

I valori di u, v che da queste si ricavano, introdotti nella prima delle (8) o nella (8') conducono ad una equazione del terz'ordine in ψ , che costituisce l'equazione generale del moto bidimensionale dei gas.

È facile però ottenere immediatamente un integrale primo di questa equazione. Infatti è per definizione

$$u\psi_x + v\psi_y = 0$$

sicchè, finchè il moto è continuo, la (8') è soddisfatta soltanto se

$$(10) \quad \frac{v_x - u_y}{(1 - w^2)^{\frac{k}{k-1}}} = f(\psi).$$

Prima di sviluppare questa equazione del secondo ordine in ψ soffermiamoci a considerare più da vicino il significato della funzione $f(\psi)$.

Indichiamo con n la normale alle linee di corrente diretta rispetto alla velocità come lo è l'asse y rispetto all'asse x . Prendendo il modulo della (1''), tenendo presente che nel caso bidimensionale $\text{rot } \mathbf{V}$ è ortogonale a \mathbf{V} e che $\text{grad } S$ è normale alle linee di corrente, si ha, in valore e segno

$$\frac{w(v_x - u_y)}{c^2} = \frac{1}{kR} \frac{dS}{dn}.$$

Ma dalla prima delle (9'), poichè $\text{grad } \psi$ è anch'esso normale alle linee di corrente, si ricava

$$w(1 - w^2)^{\frac{1}{k-1}} = \frac{d\psi}{dn};$$

dividendo membro a membro queste due equazioni e considerando S come funzione di ψ , ciò che è evidentemente consentito, si ha:

$$(10') \quad \frac{v_x - u_y}{(1 - w^2)^{\frac{k}{k-1}}} = f(\psi) = \frac{k-1}{2kR} \frac{dS}{d\psi},$$

sicchè, a meno di un fattore costante, la $f(\psi)$ coincide con la derivata dell'entropia rispetto alla funzione di corrente.

Se il moto presenta linee d'urto, tanto l'entropia che la funzione di corrente subiscono attraverso di esse discontinuità e quindi la $f(\psi)$ è in generale differente a monte e a valle della linea d'urto. In particolare anche se la rotazione, e quindi la $f(\psi)$, è nulla a monte dell'urto, essa è in generale diversa da zero a valle, come si è già rilevato; supposte anzi note la distribuzione della velocità a monte della linea d'urto e la forma di questa, le equazioni dell'urto definiscono completamente la velocità e lo stato del gas a valle, dove la $f(\psi)$ è così pienamente determinata dalla (10').

Comunque si vede fin d'ora che le linee d'urto dividono il campo del movimento in zone in ciascuna delle quali $f(\psi)$ è in generale differente e vale quindi una diversa equazione del movimento.

Per passare ora all'equazione esplicita in ψ introduciamo nella (10) i valori di u, v che si ricavano dalle (9) o dalle (9').

Derivando la prima delle (9) rispetto ad y , si ottiene la relazione

$$(1 - w^2)^{\frac{1}{k-1}} \left[u_y - \frac{2wv}{(k-1)(1-w^2)} w_y \right] = \psi_{yy},$$

dalla quale, ricordando la seconda delle (7), si ricava

$$(1 - w^2)^{\frac{1}{k-1}} u_y = \frac{uw(1 - w^2)^{\frac{1}{k-1}}}{c^2} w_y + \psi_{yy}.$$

Analogamente derivando rispetto ad x la seconda delle (9) si ottiene

$$(1 - w^2)^{\frac{1}{k-1}} v_x = \frac{vw(1 - w^2)^{\frac{1}{k-1}}}{c^2} w_x - \psi_{xx}.$$

Sottraendo la seconda dalla prima si ha dunque

$$-(1 - w^2)^{\frac{1}{k-1}} (v_x - u_y) = \psi_{xx} + \psi_{yy} + \frac{w(1 - w^2)^{\frac{1}{k-1}}}{c^2} (uw_y - vw_x).$$

Ma dalla prima delle (9') si ha

$$w(1 - w^2)^{\frac{2}{k-1}} \left(1 - \frac{2}{k-1} \frac{w^2}{1 - w^2}\right) \text{grad } w = \psi_x \text{ grad } \psi_x + \psi_y \text{ grad } \psi_y$$

ossia, grazie alla (9),

$$w(1 - w^2)^{\frac{1}{k-1}} \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right) \text{grad } w = -v \text{ grad } \psi_x + u \text{ grad } \psi_y$$

e quindi, come si vede facilmente,

$$w(1 - w^2)^{\frac{1}{k-1}} \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right) (uw_y - vw_x) = v^2 \psi_{xx} - 2uv \psi_{xy} + u^2 \psi_{yy}.$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione precedente si giunge con semplici passaggi alla

$$-(1 - w^2)^{\frac{1}{k-1}} (v_x - u_y) = \frac{1}{1 - \frac{w^2}{c^2}} \left[\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \psi_{xx} - \frac{2uv}{c^2} \psi_{xy} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \psi_{yy} \right],$$

sicchè in definitiva l'equazione (10) può porsi sotto la seguente forma

$$(10'') \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \psi_{xx} - \frac{2uv}{c^2} \psi_{xy} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \psi_{yy} = (1 - w^2)^{\frac{k+1}{k-1}} \left(\frac{w^2}{c^2} - 1\right) f(\psi);$$

in cui le derivate seconde sono messe in evidenza ed i coefficienti non contengono, grazie alle (9) o alle (9'), che le derivate prime di ψ .

Si vede dunque che per $f(\psi) = 0$ l'equazione (10'') si riduce alla consueta equazione del moto irrotazionale, il che è evidente poichè l'annullarsi del primo membro indica appunto che la rotazione è nulla.

Più interessante è l'osservazione, derivante immediatamente dalla (10''), che alla velocità del suono, cioè per $w = c$, l'equazione è la stessa che nel caso irrotazionale e quindi la vorticosità non influisce sul fenomeno.

Si nota inoltre che per velocità molto piccole rispetto a quella del suono la ψ coincide con la consueta funzione di corrente dei fluidi incompressibili, mentre l'equazione (10'') si riduce alla

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = -f(\psi)$$

cioè alla nota equazione del moto rotazionale dei fluidi incompressibili⁽¹⁾. Si osservi però che nel caso attuale dei gas l'equazione trovata ha maggiore importanza pratica di quest'ultima, dato che il moto rotazionale nasce necessariamente in quasi tutti i problemi a velocità iperacustiche.

MOTO SIMMETRICO INTORNO AD UN ASSE. — Anche in questo problema, come in quello piano, si può definire una funzione di corrente analoga alla precedente. Infatti, poichè il moto presenta simmetria assiale, esso è completamente definito dal suo andamento in un qualsiasi piano meridiano. Prendendo in questo piano l'asse x coincidente con l'asse di simmetria e l'asse y ad esso perpendicolare, indicando con u, v le rispettive componenti assiale e radiale (quella tangenziale è per ipotesi nulla) della velocità w , sempre riferita alla velocità limite, si deducono facilmente le due equazioni corrispondenti alle (8)

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{u(v_x - u_y)}{1 - w^2} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{v(v_x - u_y)}{1 - w^2} \right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} [yu(1 - w^2)^{\frac{1}{k-1}}] + \frac{\partial}{\partial y} [yv(1 - w^2)^{\frac{1}{k-1}}] = 0 \end{cases}$$

e quella corrispondente alla (8')

$$(11') \quad u \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{v_x - u_y}{y(1 - w^2)^{\frac{k}{k-1}}} \right] + v \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{v_x - u_y}{y(1 - w^2)^{\frac{k}{k-1}}} \right] = 0.$$

Posto, analogamente al caso piano,

$$(12) \quad \begin{cases} yu(1 - w^2)^{\frac{1}{k-1}} = \psi_y \\ yv(1 - w^2)^{\frac{1}{k-1}} = -\psi_x \end{cases}$$

la seconda delle (11) è automaticamente soddisfatta; mentre la prima (o la (11')) lo è soltanto se

$$(13) \quad \frac{v_x - u_y}{y(1 - w^2)^{\frac{k}{k-1}}} = f(\psi).$$

(1) Vedi «Hdb. der Physik», Bd. VII, p. 29.

Siccome $(1 - w^2)^{\frac{k}{k-1}}$ è proporzionale lungo le linee di corrente alla pressione si deduce anche in questo caso, analogamente a quello piano, il

TEOREMA. — *Se il moto di un gas è simmetrico intorno ad un asse la vorticosità lungo ogni linea di corrente, fra due discontinuità, è proporzionale al momento della pressione rispetto all'asse di simmetria.*

Si vede inoltre facilmente che la $f(\psi)$ conserva lo stesso significato che nel caso piano, dato dalla (10').

Sostituendo nella (13) i valori di u, v che si ricavano dalle (12) si giunge, seguendo una via analoga alla precedente, all'equazione

$$3') \quad \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) \psi_{xx} - \frac{2uv}{c^2} \psi_{xy} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \psi_{yy} - \frac{\psi_y}{y} = y^2 (1 - w^2)^{\frac{k+1}{k-1}} \left(\frac{w^2}{c^2} - 1\right) f(\psi)$$

che differisce dalla (10'') soltanto per la presenza del termine in ψ_y , e perchè il secondo membro è moltiplicato per il quadrato del raggio.

Anche per la (13') si possono fare le stesse osservazioni fatte per la (10'') sull'annullarsi del secondo membro. Si vede inoltre che per piccole velocità la ψ coincide con la ordinaria funzione di corrente di Stokes, e la (13') si riduce alla

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} - \frac{\psi_y}{y} = -y^2 f(\psi)$$

relativa ai fluidi incompressibili ⁽¹⁾.

L'equazione (13') si presta allo studio *rigoroso* di tutti quei casi di moto a simmetria assiale in cui siano presenti onde non coniche.

In particolare essa si sostituisce utilmente a quella impiegata da C. FERRARI per risolvere *in via approssimata* il problema della corrente iperacustica intorno ad un solido di rivoluzione acuminato ⁽²⁾. Il brillante procedimento seguito dal FERRARI, basato sul metodo delle caratteristiche, si può trasportare con qualche modifica al caso attuale e consente la soluzione *rigorosa* dello stesso problema.

BREVI CONSIDERAZIONI GENERALI. — Nella (10'') e nella (13'), come nelle corrispondenti per i fluidi incompressibili è necessaria, oltre alle consuete condizioni concernenti la velocità al contorno (o all'infinito), una condizione che riguardi la rotazione e porti alla determinazione della $f(\psi)$. Se non sono presenti onde d'urto può essere semplicemente assegnata la vorticosità lungo una linea che intersechi tutte le linee di corrente (sia pure all'infinito).

(1) Ved. «Hbd. der Physik», Bd. VII, p. 49. L'autore, M. LAGALLY, cade però in una svista prendendo la rotazione costante lungo ogni linea di corrente, come nel caso piano; essa invece risulta proporzionale lungo ogni linea di corrente alla distanza dell'asse di simmetria, come può ricavarsi sia direttamente che per induzione del teorema relativo ai gas.

(2) Ved. «Atti del V Convegno Volta». Reale Accademia d'Italia, 1935.

nito). In particolare se la vorticosità assegnata è nulla il moto si mantiene ovunque irrotazionale, nei fluidi compressibili come negli incompressibili.

Se invece hanno luogo discontinuità allora bisogna ricorrere anche alle equazioni dell'urto, che legano fra loro le quantità a monte e quelle a valle dell'urto e che, come si è visto, determinano inoltre completamente la nuova $f(\psi)$ valida a valle dell'urto se la forma di questo è nota.

Se infine la forma della superficie d'urto non è nota, ma sono invece assegnate le forme degli ostacoli da contornare (ciò che in aerodinamica è il caso più frequente) il problema diventa più complesso: la superficie d'urto è in tal caso da determinare contemporaneamente al campo aerodinamico; e ciò non sembra potersi fare che con procedimenti di *approssimazioni successive* o di soluzioni « *passo per passo* ».

Su quest'ultimo procedimento ci intratterremo in una prossima pubblicazione in cui applicheremo alle nuove equazioni il *metodo delle caratteristiche*, già così fecondo di applicazioni nel caso irrotazionale quando la velocità è ovunque superiore a quella del suono.

Meccanica. — *Sulle equazioni del moto vibratorio di un ponte percorso da carichi inerti e molleggiati.* Nota di G. KRALL, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In ogni ricerca, tra le tante di cui è ricca la letteratura tecnica, intorno al moto vibratorio prodotto da uno o più carichi mobili su di un ponte, — che si schematizza sempre nella più semplice struttura portante; la trave semplicemente appoggiata agli estremi — domina l'ipotesi dell'inerzia trascurabile del carico in raffronto a quella del ponte o viceversa ⁽²⁾. Si tratta ora di affrancarsi da queste restrizioni e di dare l'impostazione matematica del problema nella forma più accessibile ai procedimenti risolutivi, indi d'iniziarne la soluzione, non certo semplice, da un lato avvalendosi delle approssimazioni successive, dall'altro di taluni algoritmi di maggiorazione, già segnalati, in questi « Rendiconti » ⁽³⁾, come particolarmente adatti per affrontare quest'ordine di quistioni.

Ciò posto, fissiamo l'attenzione su di una struttura portante che penseremo caratterizzata, nei riguardi del comportamento elastico e dei soli

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1936.

(2) Così almeno, se si prescinde da alcuni apprezzamenti dovuti al Bleich (cfr. *Theorie und Berechnung der eisernen Brücken*. Springer. Berlin, 1924), dallo studio del moto di un carico inerte su di un binario indefinito poggiato su un suolo elastico, cfr. G. KRALL, questi « Rendiconti »: *Velocità critiche di masse pesanti su di un binario*, fasc. 10 (1930).

(3) G. KRALL, *Limiti superiori del cimento dinamico*. Questi « Rendiconti », fasc. 3 (1928); *Limiti superiori per il cimento dinamico nei sistemi dissipativi*, fasc. 7 (1928); *Limiti superiori per lo spostamento dinamico*, fasc. 2 (1929).

spostamenti trasversali al piano di corsa, cosiddetto piano stradale, dalla funzione d'influenza « c » di Green; nei riguardi del comportamento dinamico invece, dalla funzione « μ » che dà la densità specifica in dipendenza dal posto.

Con riflesso ad una struttura piana, preso riferimento ad una coppia di assi ortogonali x, y , fatto coincidere x col piano stradale, y con la direzione delle forze e degli spostamenti, sarà

$$c = c(x, x')$$

la funzione d'influenza, ricavabile coi metodi ordinari della statica, caratterizzante lo spostamento in x prodotto dalla forza $P = 1$ in x' (o viceversa); $\mu = \mu(x)$ la funzione del posto (cioè di x) che dà la densità, meglio la massa per unità di lunghezza.

Se in condizioni statiche agisce quindi una distribuzione continua di carichi $p = p(x)$ ed una discreta P_1, P_2, \dots, P_N , nei punti x_1, x_2, \dots, x_N , la configurazione d'equilibrio, con riferimento alle sole elongazioni trasversali $w(x)$ sarà, $0 \leq x \leq l$ essendo il campo di variabilità tra gli estremi dell'asta,

$$(1) \quad w(x) = \int_0^l c(x, x') p(x') dx' + \sum_1^N c(x, x_i) P_i.$$

Al caso dinamico, che concerne il moto di un carico concentrato P — per ora privo d'inerzia — che si move con velocità uniforme v , si passa senza difficoltà. Basta tener conto nella (1) delle reazioni d'inerzia

— $\mu(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, che si destano per virtù delle masse diffuse, come carichi $p = p(x)$ e scrivere, nell'unico termine cui si riduce la sommatoria, la coordinata x_i dell'unico carico mobile $P_i = P$ in funzione di v e del tempo t ; quindi, se $t = 0$ per $x_i = 0, x_i = vt$.

Otteniamo dunque, come ovvia estensione della (1) all'ambito dinamico,

$$(2) \quad w(x, t) = - \int_0^l c(x, x') \mu(x') \frac{\partial^2 w(x', t)}{\partial t^2} dx' + c(x, vt) \cdot P.$$

Supponiamo ora che il carico P sia dotato d'inerzia — come sempre avviene trattandosi di forze-peso — definite dalla massa $M = P : g$. Pensando a quanto ha luogo per ogni carico-asse d'un treno stradale o ferroviario, riterremo che una parte κM (le ruote gli assi) sia direttamente applicata al piano stradale e quindi al ponte, senza mai distaccarsene durante il percorso. La parte rimanente $(1 - \kappa)M$ sia invece molleggiata su sospensioni che penseremo caratterizzate sufficientemente dal grado di elasticità $\epsilon^2 = 1 : \delta$, δ essendo lo spostamento che provoca la forza $P = 1$ nel suo senso d'azione (sempre s'intende, quello di y). Allora, se con w' indichiamo le elongazioni

che fa la massa $(1 - \kappa)M$ (nella sua corsa da $x' = 0$ a $x' = l$) contate dalla parallela ad x passante per la sua configurazione di equilibrio, dovremo sostituire nella (2), al posto della forza P , la forza somma di P , della reazione d'inerzia di κM e della pressione $\varepsilon^2 (w' - w)$ del molleggio; tutto contato in $x = vt$.

Otteniamo quindi, in luogo della (2),

$$(3) \quad w(x, t) = - \int_0^l c(x, x') \mu(x') \frac{\partial^2 w(x', t)}{\partial t^2} dx' + \\ + c(x, vt) \left\{ P - \kappa M \left(\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \right)_{x=vt} + \varepsilon^2 [w'(t) - w(vt, t)] \right\}.$$

Accanto a quest'equazione, di tipo integrodifferenziale, sussiste simultaneamente per w' l'equazione

$$(3a) \quad (1 - \kappa)M \frac{d^2 w'}{dt^2} + \varepsilon^2 (w' - w) = 0.$$

Mentre la (3) va integrata con riflesso alle circostanze iniziali all'istante $t = 0$, corrispondenti alla quiete, quindi

$$w(x, 0) = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_{t=0} = 0;$$

la (3a) va integrata con riferimento alle circostanze

$$w'(0) = 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{dw'}{dt} \right)_{t=0} = 0.$$

Avendosi in tal caso per w' , trattando $\varepsilon^2 w$ come termine perturbante noto, la soluzione, immediatamente controllabile,

$$(4) \quad w'(t) = v \int_0^t w(vt', t') \sin v(t - t') dt'$$

con

$$v^2 = \frac{\varepsilon^2}{(1 - \kappa)M},$$

la (3) si riduce ad una equazione solamente in w e precisamente,

$$(5) \quad w(x, t) + \int_0^l c(x, x') \mu(x') \frac{\partial^2 w(x', t)}{\partial t^2} dx' = c(x, vt) \{ P - \Omega(w) \}$$

Ω essendo una funzione di linea di w , a carattere ereditario,

$$\Omega(w) = \kappa M \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)_{x=vt} - \varepsilon^2 \left[v \int_0^t w(vt', t') \sin v(t - t') dt' - w \right].$$

Se nella (5) si pone $M=0$ con che, per la (3 a) segue anche $\Omega=0$, si ha l'equazione (2) che rispecchia il moto provocato da un carico privo d'inerzia. Su questa ci soffermeremo particolarmente, non solo per l'interesse intrinseco che pur presenta codesto caso, ma anche perchè da questo dedurremo una soluzione di partenza per uno schema di approssimazioni successive con cui affronteremo la (5). Ma all'uopo conviene in primo luogo trasformarla opportunamente.

Con questo intento consideriamo l'equazione

$$(6) \quad w(x, t) + \int_0^l c(x, x') \mu(x') \frac{\partial^2 w(x', t)}{\partial t^2} dx' = Q(x, t),$$

nella quale $Q(x, t)$ si riguardi come funzione nota, e, avvalendoci di un artificio usuale, poniamo

$$(7) \quad w(x, t) = \sum_{\rho}^{\infty} u_{\rho}(x) \varphi_{\rho}(t)$$

le u_{ρ} essendo autofunzioni dell'equazione omogenea del Fredholm,

$$(8) \quad u(x) - \sigma^2 \int_0^l \mu(x') c(x, x') u(x') dx' = 0,$$

e le $\varphi_{\rho}(t)$ funzioni incognite del tempo t , trattabili come parametri del sistema vibrante, nella loro qualità di coefficienti dello sviluppo (7). Assicurata essendo, per le proprietà del nucleo $c(x, x') \cdot \mu(x')$ che discendono dalla sua natura meccanica, l'esistenza effettiva di una serie infinita di funzioni u_{ρ} — costituenti un sistema ortonormale chiuso — in corrispondenza ad infiniti valori σ_{ρ}^2 di σ^2 , tutti reali, positivi ed ordinabili in serie crescente, sussiste la possibilità di sviluppare una funzione [arbitraria, salvo la condizione estremamente lata, cosiddetta di Schmidt] in serie delle u_{ρ} , i coefficienti essendo calcolabili secondo la regola di Fourier, suggerita dalle condizioni stesse di ortonormalità, precisamente,

$$(9) \quad \int_0^l \mu(x) u_{\rho}(x) u_{\tau}(x) dx \begin{cases} = 1 & \text{per } \rho = \tau \\ = 0 & \text{per } \rho \neq \tau. \end{cases}$$

Segue da tutto ciò l'esprimibilità di $c(x, x')$ sotto la forma bilineare

$$(10) \quad c(x, x') = \sum_{\rho}^{\infty} \frac{u_{\rho}(x) u_{\rho}(x')}{\sigma_{\rho}^2}.$$

Introducendo la (10) nella (6), ove la si moltiplichi alla Fourier per $u_{\tau}(x) dx$ e si integri tra 0 ed l , in virtù della (9) si ottiene, cambiando a calcoli fatti l'indice τ con ρ ,

$$(11) \quad \ddot{\varphi}_{\rho} + \sigma_{\rho}^2 \varphi_{\rho} = Q_{\rho},$$

con

$$Q_0 = \int_0^l Q(x, t) u_0(x) dx.$$

Se le condizioni iniziali sono, come si è detto, $w = 0$ e $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$, dovrà essere per ogni valore di ρ , $\varphi_0(0) = 0$, $\left(\frac{d\varphi_0}{dt}\right)_{t=0} = 0$ e la (11) ammette la soluzione,

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sigma_0} \int_0^t Q_0(t') \sin \sigma_0(t - t') dt'.$$

La (7) diviene pertanto

$$(12) \quad w(x, t) = \sum_0^\infty u_0(x) \frac{1}{\sigma_0} \int_0^t Q_0(t') \sin \sigma_0(t - t') dt'.$$

Ormai basta attribuire nella (6), a $c(x, vt)$. P l'ufficio di $Q(x, t)$, per avere, in base alla (10), la soluzione della (2) (cioè della (5) per $\Omega(w) = 0$) sotto la forma

$$(13) \quad w(x, t) = P \sum_0^\infty u_0(x) \frac{1}{\sigma_0} \int_0^t u_0(vt') \sin \sigma_0(t - t') dt'.$$

Se identifichiamo invece $Q(x, t)$ con il termine a destra della (5), otteniamo, chiamando con $\bar{w}(x, t)$ l'espressione (13) di $w(x, t)$,

$$(14) \quad w(x, t) = \bar{w}(x, t) - \sum_0^\infty u_0(x) \left\{ \frac{xM}{\sigma_0} \int_0^t \left(\frac{\partial^2 w(x, t')}{\partial t'^2} \right)_{x=vt'} u_0(vt') \cdot \right. \\ \left. \sin \sigma_0(t - t') dt' - \frac{\varepsilon^2}{\sigma_0} \int_0^t \left[v \int_0^{t'} w(vt'', t'') \sin v(t' - t'') dt'' - \right. \right. \\ \left. \left. - w(vt', t') \right] u_0(vt') \sin \sigma_0(t - t') dt' \right\}.$$

Di questa equazione integrodifferenziale del tipo ereditario ricaveremo in seguito una soluzione approssimata attraverso il metodo delle approssimazioni successive, introducendo nel secondo termine a destra \bar{w} al posto di w .

Ma, prima preoccupazione nostra sarà lo studio della (13). Tale studio richiede, come quello della (14), la ricerca, nei limiti del possibile, di formule che non contengano più traccia delle u_0 e σ_0 , sempre difficilmente calcolabili almeno per ρ superiore ad 1.

Vedremo in una prossima Nota che, attraverso quel metodo di miglioramento annunciato inizialmente, l'intento riesce, pur con pieno rigore, veramente oltre quelle aspettative che l'impiego formale dei presenti sviluppi potrebbe autorizzare.

Meccanica. — *Limiti per le vibrazioni di un ponte qualunque percorso da carichi mobili con velocità uniforme.* Nota di G. KRALL, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una precedente Nota abbiamo istituita un'equazione di tipo integro-differenziale, particolarmente accessibile alle approssimazioni successive, per il moto vibratorio di una struttura portante, di qualunque tipo, generato da un carico (anche molleggiato) mobile con velocità costante v .

La soluzione su cui avvenne di soffermarsi in primo luogo si riferiva al caso in cui l'inerzia del carico è trascurabile in raffronto a quella delle masse diffuse. Per quanto particolare, siffatta soluzione è notevole, da un lato perchè talora corrisponde ad una schematizzazione effettivamente ammissibile, dall'altro perchè costituisce la base di partenza di un metodo di approssimazioni successive con cui si può utilmente affrontare l'aspetto generale della importante quistione.

Mi propongo di soffermarmi in questa Nota proprio su quella soluzione e di fornire per essa delle limitazioni superiori pratiche, e valide in tutto rigore, calcolabili indipendentemente da ogni ente dinamico, quali frequenze, autofunzioni ecc.

Della quistione mi ero occupato alcun tempo fa con riferimento alla circostanza in cui il ponte è riducibile ad una travata, trattabile come asta omogenea semplicemente appoggiata agli estremi. Ora si tratta invece di una struttura portante qualsiasi. I risultati sono altrettanto semplici come quelli ottenuti allora; così ad esempio si dimostra, come subito vedremo, che, con riguardo alle vibrazioni trasversali, per qualunque velocità del carico, il limite per lo spostamento w del punto di coordinata x è dato da

$$(1) \quad w(x, t) \leq \sqrt{\frac{l}{2} c(x, x) \int_0^l \omega(x, x) dx},$$

il significato di $c(x, x)$ e $\omega(x, x)$ essendo precisato (salvo a porre $x' = x$), dalle definizioni seguenti: Nel campo $0 \leq x \leq l$, $c(x, x')$ è lo spostamento che il carico $P = 1$ in x' provoca in x (o viceversa), $\omega(x, x')$ è la rotazione che il momento $M = 1$ in x' provoca in x (o viceversa). Si tratta dunque di elementi calcolabili con metodi correnti nella pratica.

Rileveremo ancora che, per $v \rightarrow \infty$, pur valendo la (1), si riconosce che $w \rightarrow 0$. Riservando infine ad una prossima Nota l'esporre altre for-

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1936.

mole, più complesse della (1) ma più aderenti ai valori effettivamente⁽¹⁾ raggiungibili, passiamo ad assolvere il compito che ci siamo proposti.

L'integrale del moto nelle circostanze specificate, in base alla (13) della precedente Nota è

$$(2) \quad w(x, t) = \sum_0^\infty u_0(x) \frac{1}{\sigma_0^2} \int_0^t u_0(vt') \sin \sigma_0(t-t') dt'$$

con $w(x, t)$ deformata trasversale della struttura, σ_0^2 e $u_0(x)$ essendo autovalori ed autofunzioni dell'equazione integrale

$$u_0(x) = \sigma_0^2 \int_0^1 c(x, x') \mu(x') u_0(x') dx'.$$

La $c(x, x')$ ha il significato prima indicato, $\mu(x)$ è la funzione che dà la massa per unità di lunghezza.

Con riflesso alle proprietà spettanti al nucleo $\mu(x') c(x, x')$ valgono, oltre alle note relazioni di ortonormalità le relazioni bilineari seguenti

$$(3) \quad c(x, x') = \sum_0^\infty \frac{u_0(x) u_0(x')}{\sigma_0^2}, \quad \omega(x, x') = \sum_0^\infty \frac{\frac{du_0(x)}{dx} \cdot \frac{du_0(x')}{dx'}}{\sigma_0^2}$$

accanto alla relazione globale

$$(4) \quad \int_0^1 \mu(x) c(x, x) dx = \sum_0^\infty \frac{1}{\sigma_0^2}.$$

Richiamando infine due fondamentali disuguaglianze dovute a Schwarz, relative ad una serie di prodotti $a_i \cdot b_i$ o ad un integrale di un prodotto di di due funzioni $\varphi(x) \cdot \psi(x)$, precisamente

$$(5) \quad \sum_1^N a_i b_i \leq \sqrt{\sum_1^N a_i^2 \sum_1^N b_i^2},$$

$$(5a) \quad \int_0^1 \varphi(x) \psi(x) dx \leq \sqrt{\int_0^1 \varphi^2(x) dx \int_0^1 \psi^2(x) dx}$$

passiamo senz'altro a maggiorare la serie (1).

(1) Per una trave omogenea la (1) porge, con riflesso al punto di mezzo, il limite $2w_s$, mentre in questo caso ho potuto dimostrare in tutto rigore che il limite è certamente compreso tra $1,46 w_s$ e $1,66 w_s$.

Otteniamo, applicando la (5),

$$(6) \quad w(x, t) \leq \sqrt{\sum_1^{\infty} \frac{u_0^2(x)}{\sigma_0^2} \cdot \sum_1^{\infty} I_0^2}$$

con

$$(7) \quad I_0 = \int_0^t u_0(vt') \sin \sigma_0(t-t') dt'.$$

Con l'intento di maggioreare I_0 cominciamo col rilevare che si deve avere

$$0 \leq t \leq \frac{l}{v}, \quad 0 \leq t' \leq t$$

e che, nel campo $0 < x < l$, cioè $0 < vt' < l$, la u_0 si annulla, cambiando il segno, come afferma un teorema di Sturm-Lionville, $(\rho - 1)$ volte.

Sieno l_1, l_2, \dots, l_q i tratti del campo l separati dai punti di zero, cosiddetti *nodî*, di u_0 e scegliamo in ogni tratto la velocità v , che interviene in I_0 , così che il prodotto $u_0(vt') \sin \sigma_0(t-t')$ risulti sempre positivo. All'uopo

basta scegliere nel tratto $l_1, v = v_1 = l_1 : \frac{\pi}{\sigma_0}$, nel tratto $l_2, v = v_2 = l_2 : \frac{\pi}{\sigma_0}$,

nel tratto $l_q, v = v_q = l_q : \frac{\pi}{\sigma_0}$.

Per questi valori v_j di v , costanti a tratti, potremo senz'altro affermare che

$$I_0 \leq \sum_1^q \int_{(j-1)\frac{\pi}{\sigma_0}}^{j\frac{\pi}{\sigma_0}} u_0(v_j, t') \sin \sigma_0(t-t') dt'.$$

Ciò posto cerchiamo un limite di ogni termine del sommatorio. Applichiamo — onde avere un fattore σ_0^{-1} che sarà fondamentale in seguito quando sommeremo la maggiorante della serie $\sum_1^{\infty} I_0^2$ — l'integrazione per

parti. Poichè agli estremi $(j-1)\frac{\pi}{\sigma_0}$ e $j\frac{\pi}{\sigma_0}$ la u_0 si annulla avremo

$$I_0^j = \int_{(j-1)\frac{\pi}{\sigma_0}}^{j\frac{\pi}{\sigma_0}} u_0(v_j, t') \sin \sigma_0(t-t') dt' = \int_{(j-1)\frac{\pi}{\sigma_0}}^{j\frac{\pi}{\sigma_0}} \frac{du_0}{dt} \cdot \frac{\cos \sigma_0(t-t')}{\sigma_0} dt'$$

onde segue, per la disuguaglianza di Schwarz e cambiando la variabile t' con la sostituzione $x' = v_j t'$,

$$(I_e)^2 \leq \frac{1}{\sigma_e^2} \int_{(j-1)\frac{\pi}{\sigma_e}}^{j\frac{\pi}{\sigma_e}} \left(\frac{du_e}{dt'} \right)^2 dt' \cdot \int_{(j-1)\frac{\pi}{\sigma_e}}^{j\frac{\pi}{\sigma_e}} \cos^2 \sigma_e (t - t') dt' = v_j \int_{l_j} \left(\frac{du_e}{dx} \right)^2 dx \cdot \frac{\pi}{2\sigma_e} = \\ = \frac{l_j}{2\sigma_e^2} \int_{l_j} \left(\frac{du_e}{dx} \right)^2 dx.$$

Avremo pertanto

$$I_e \leq \sum_i^e l_j \sqrt{\frac{1}{2\sigma_e^2} \int_{l_j} \left(\frac{du_e}{dx} \right)^2 dx}$$

ovvero, riapplicando la (5),

$$I_e \leq \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sum_i^e l_j \right) \frac{1}{\sigma_e^2} \sum_i^e \int_{l_j} \left(\frac{du_e}{dx} \right)^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{2} l \frac{1}{\sigma_e^2} \int_0^l \left(\frac{du_e}{dx} \right)^2 dx}.$$

Con questo limite di I_e riprendiamo ora la maggiorante (6). Otteniamo in sua vece

$$w(x, t) \leq \sqrt{\frac{l}{2} \sum_1^\infty \frac{u_e^2(x)}{\sigma_e^2} \cdot \int_0^l \sum_1^\infty \frac{\left(\frac{du_e(x)}{dx} \right)^2}{\sigma_e^2} dx}$$

ovvero, per le (3), l'annunciata disuguaglianza (1).

Per una trave semplicemente appoggiata di luce l , modulo d'elasticità E , momento d'inerzia I , si ha, da qualunque manuale tecnico,

$$c(x, x) = \frac{1}{l} \frac{x^2(l-x)^2}{3EI}, \quad \int_0^l \omega(x, x) dx = \frac{l}{6EI}$$

e quindi, per la mezzeria, cioè per $x = \frac{l}{2}$, poichè il valore statico per $P = 1$ è $w_s = l : 48EI$,

$$w(x, t) \leq 2w_s.$$

Considereremo in una prossima Nota un po' più da vicino il primo termine della serie (13).

Com'è facile convincersi su concreti esempi esso dà, nel campo delle velocità dei treni d'oggi e... di un asintotico domani (precisamente sino a velocità intorno ai 1000 Km. all'ora!) un contributo essenziale, sicchè

nel maggiorarlo è d'uopo esser meno larghi che non pei termini successivi, sempre s'intende pei valori ordinari di v .

Arriveremo così a nuove formole, più complesse ma fondamentali dal punto di vista pratico. Queste, associate alla (1) ed alle espressioni asintotiche di w per $v \rightarrow \infty$ ci consentiranno di considerare esplorato, intanto pei carichi privi di inerzia, il comportamento qualitativo e almeno in parte quantitativo di w nel campo di v tra 0 ed ∞ .

Meccanica (Idrodinamica). — *Sui moti piani provocati da due vortici-sorgenti*. Nota di A. MASOTTI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

In questa Nota esponiamo alcuni risultati relativi ai moti piani provocati in un velo liquido indefinito da due vortici-sorgenti liberi di intensità costanti. Si troveranno le relative dimostrazioni in uno scritto di maggiore ampiezza che vedrà la luce altrove.

1. Ci riferiamo da prima alla distribuzione delle velocità nel velo liquido. Ecco i risultati che si ottengono se non è nulla la somma delle intensità. Alcuni di essi sono illustrati dalla figura 1, dove P_1 e P_2 designano i vortici-sorgenti, le cui intensità indicheremo con $C_1 + iQ_1$ e $C_2 + iQ_2$ rispettivamente.

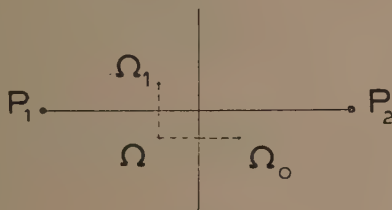


Fig. 1.

Più precisamente, la figura illustra la notevole configurazione del gruppo di punti costituito dal centro del moto asintotico, Ω_1 , dal centro del sistema, Ω , e da l'unico punto dove la velocità è nulla, Ω_0 ⁽²⁾: i punti Ω_1 e Ω sono

(1) Nella seduta del 19 gennaio 1936.

(2) Sulla nozione di « centro del sistema » v. MASOTTI, *Sul moto dei vortici-sorgenti*, § 2, n. 2 (« Rendiconti del R. Istituto Lombardo », ser. 2^a, vol. LXVI, 1933, pp. 386-398); sulla nozione di « centro del moto asintotico » v. MASOTTI, *Sul comportamento asintotico di alcuni moti piani irrotazionali*, § 1 (in *Note idrodinamiche*: « Pubblicazioni della Università Cattolica del Sacro Cuore », ser. 11^a, vol. I, 1935, pp. 7-34), ed anche: *Sul centro del moto asintotico* (questi « Rendiconti », ser. 6^a, vol. XXII, 2^o sem. 1935, pp. 426-428).

simmetrici rispetto alla retta $P_1 P_2$; i punti Ω_0 e Ω sono simmetrici rispetto all'asse del segmento $P_1 P_2$.

Quando le circolazioni sono proporzionali alle portate (cioè $C_1 : C_2 = Q_1 : Q_2$), allora Ω_1 e Ω vengono a coincidere in un punto della retta $P_1 P_2$; il centro del moto asintotico, in quanto coincide col centro del sistema, non muta da istante a istante, sicchè il moto asintotico è permanente. Quando i moduli delle intensità sono eguali (cioè $\sqrt{C_1^2 + Q_1^2} = \sqrt{C_2^2 + Q_2^2}$), allora Ω_0 e Ω vengono a coincidere in un punto dell'asse del segmento $P_1 P_2$; il punto di velocità nulla, in quanto coincide col centro del sistema, non muta da istante a istante, sicchè la particella che in esso si trova è permanentemente in quiete. Quando le intensità sono eguali (cioè $C_1 = C_2$ e $Q_1 = Q_2$), allora i tre punti suddetti vengono a coincidere nel punto medio del segmento $P_1 P_2$.

Le linee equipotenziali e le linee di flusso sono linee trascendenti, che finora non furono, forse, oggetto di studio. Le linee isotachie e le linee isocline sono linee algebriche: quartiche bicircolari le prime, cubiche circolari le seconde. Quando le intensità sono eguali, le linee equipotenziali e le linee di flusso non sono nuove, ma sono linee che già si presentarono (all'Holzmüller) come traiettorie isogonali di lemniscate confocali; le linee isotachie sono spiriche, le linee isocline sono curve focali.

Nel caso, finora escluso, in cui sono opposte le intensità (cioè $C_1 = -C_2$ e $Q_1 = -Q_2$), il centro del moto asintotico è il punto medio del segmento $P_1 P_2$, vien meno la nozione di centro del sistema, manca il punto di velocità nulla. Le linee equipotenziali e le linee di flusso sono doppie spirali logaritmiche, le linee isotachie sono cassiniane, le linee isocline sono iperbole equilatera.

2. Ci riferiamo adesso al moto dei vortici-sorgenti, i quali, supposti liberi, migrano in seno al liquido nel modo che ora descriveremo, e che è illustrato dalla figura 2.

Le traiettorie dei due vortici-sorgenti sono due spirali logaritmiche eguali ed aventi lo stesso punto asintotico, che è il centro del sistema, già indicato con Ω ; esse sono designate con L_1 e L_2 sulla figura. L'angolo sotto il quale ciascuna traiettoria taglia i raggi spiccati dal punto asintotico è dato dalla formula:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{C_1 + C_2}{Q_1 + Q_2}.$$

Il moto di ogni vortice-sorgente è centrale rispetto a Ω ; sicchè ogni vortice-sorgente si muove come se fosse attratto o respinto da Ω con una forza di intensità variabile in ragione inversa del cubo della distanza. Diverse però sono le costanti delle aree, che valgono:

$$\text{per } P_1: \frac{1}{2\pi} \frac{(C_1 + C_2)(C_1^2 + Q_1^2)}{(C_1 + C_2)^2 + (Q_1 + Q_2)^2},$$

$$\text{per } P_2: \frac{1}{2\pi} \frac{(C_1 + C_2)(C_2^2 + Q_2^2)}{(C_1 + C_2)^2 + (Q_1 + Q_2)^2}.$$

Due spirali logaritmiche eguali alle precedenti ed aventi lo stesso punto asintotico descrivono, con moto centrale rispetto a Ω , il centro del moto asintotico Ω e il punto di velocità nulla Ω_0 .

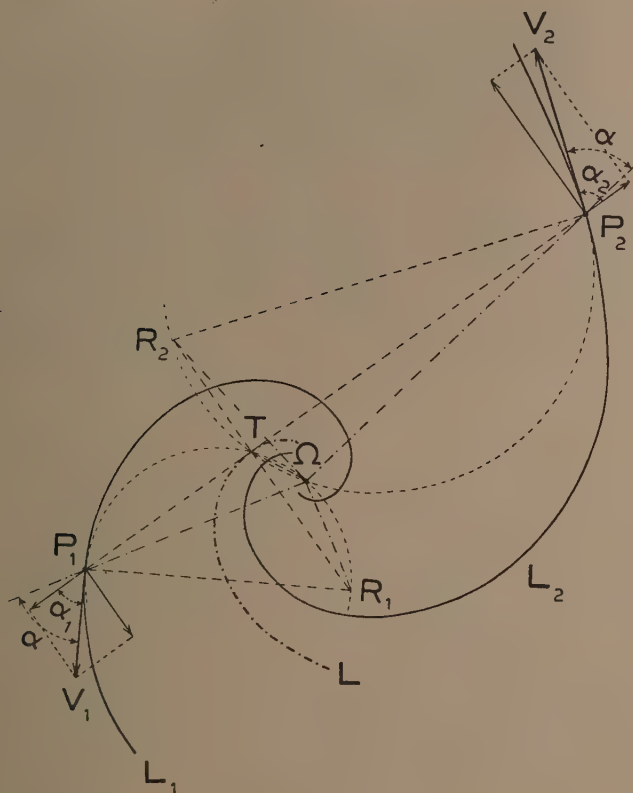


Fig. 2.

Una spirale logaritmica eguale alle precedenti, avente il punto asintotico in P_1 oppure in P_2 , si trova anche come traiettoria nel moto relativo di uno dei due vortici-sorgenti rispetto all'altro, moto che appare come centrale, con la costante delle aree

$$\frac{C_1 + C_2}{2\pi}.$$

È anche notevole che una spirale logaritmica eguale alle due traiettorie ed avente lo stesso punto asintotico è involupata dalla retta $P_1 P_2$: v. la figura, dove questo involuppo è designato con L . Di questa spirale logaritmica le due traiettorie sono evolventoidi, che intersecano le sue tangenti sotto gli angoli...

$$\alpha_1 = \arctg \frac{C_2}{Q_2}, \quad \alpha_2 = \arctg \frac{C_1}{Q_1}$$

rispettivamente.

Nella figura si è segnata la normale comune alla retta $P_1 P_2$ e al suo involuppo L nel loro punto di contatto T ; essa interseca le normali in P_1 e P_2 alle traiettorie nei rispettivi centri di curvatura, R_1 e R_2 . Si sono anche segnate le circonferenze che hanno per diametri $P_1 R_1$ e $P_2 R_2$, ciascuna delle quali passa per T e Ω .

3. Alcuni casi particolari meritano di essere segnalati.

a) I vortici-sorgenti hanno portate opposte. Allora è costante la loro distanza; le traiettorie sono circonferenze concentriche, e sono descritte di moto uniforme; anche l'involuppo della congiungente è una circonferenza, concentrica alle precedenti (v. figura 3). Se le circolazioni sono eguali, le traiettorie coincidono (v. figura 4). — b) I vortici-sorgenti hanno circola-

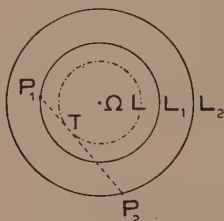


Fig. 3.

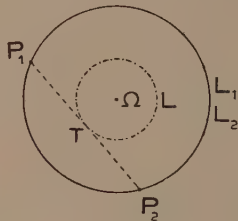


Fig. 4.

zioni opposte. Allora è invariabile la direzione della congiungente; le traiettorie sono rettilinee (v. figura 5). Se le portate sono eguali, le traiettorie sono egualmente inclinate sulla congiungente (v. figura 6). — c) I vortici-

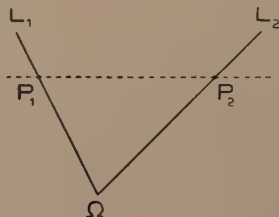


Fig. 5.

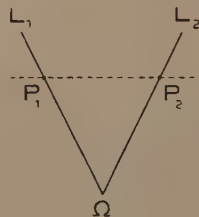


Fig. 6.

sorgenti hanno intensità opposte. Allora le traiettorie sono rette parallele, e sono descritte di moto uniforme con velocità eguali (v. figura 7). — d) I

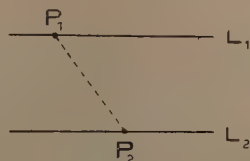


Fig. 7.

vortici-sorgenti hanno intensità eguali. Allora le traiettorie sono spirali logaritmiche eguali ed aventi lo stesso punto asintotico, e con questo punto i due vortici-sorgenti si mantengono allineati (v. figura 8). Lo stesso è vero se il rapporto delle due intensità è reale, e diverso da -1 (v. figura 9). Le

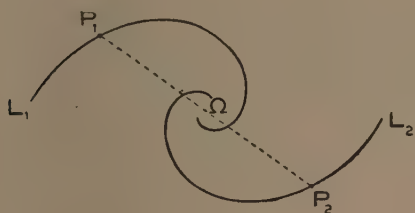


Fig. 8.

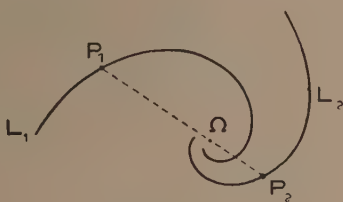


Fig. 9.

distanze dei due vortici-sorgenti dal punto asintotico sono eguali nel primo caso; nel secondo caso stanno nel rapporto inverso di quello delle intensità.

— e) I vortici-sorgenti hanno intensità di moduli eguali. Allora le traiettorie sono spirali logaritmiche eguali ed aventi lo stesso punto asintotico, e da questo punto i due vortici-sorgenti hanno in ogni istante distanze eguali (v. figura 10); i vortici-sorgenti hanno in ogni istante velocità di moduli

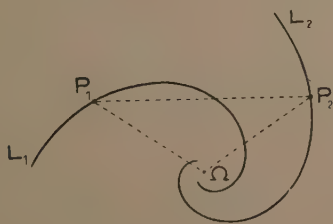


Fig. 10.

eguali; essi si muovono come se appartenessero ad un vortice-sorgente collocato nel centro del sistema, di intensità

$$\frac{K^2}{(C_1 + C_2) - i(Q_1 + Q_2)},$$

essendo

$$K^2 = C_1^2 + Q_1^2 = C_2^2 + Q_2^2$$

il quadrato del modulo dell'intensità di ciascun vortice-sorgente, - f) Se un vortice-sorgente si riduce ad un vortice, e l'altro ad una sorgente, allora la spirale logaritmica descritta dal vortice è la evoluta di quella descritta dalla sorgente (v. figure 11 e 12, la seconda delle quali corrisponde al caso in cui sono eguali la circolazione del vortice e la portata della sorgente).

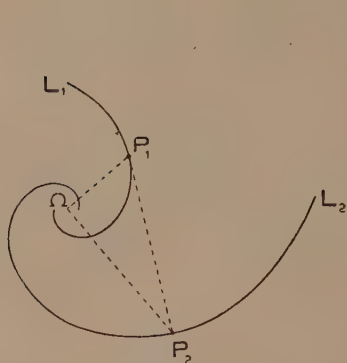


Fig. 11.

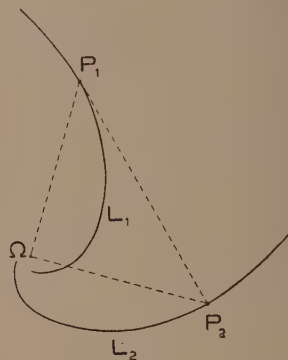


Fig. 12.

Si osserva infine che da un sistema di due vortici-sorgenti che hanno intensità di moduli eguali - caso e) dianzi considerato - si passa ad un sistema *stazionario* di vortici-sorgenti *liberi* con la aggiunta di un vortice-sorgente collocato nel centro del sistema precedente - che è pure il punto di velocità nulla per quel sistema - e di intensità

$$-\frac{K^2}{(C_1 + C_2) - i(Q_1 + Q_2)}.$$

Chimica. — *Solfuro, seleniuro e solfoseleniuro di solfocianogeno*.⁽¹⁾ Nota di A. BARONI presentata ⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

In un precedente lavoro sull'azione del selenio sul protocloruro di zolfo ⁽³⁾ io ho potuto preparare ed isolare allo stato puro un cloruro di zolfo e selenio SeSCl_2 che si forma per la proprietà che il selenio presenta in molte reazioni con composti solforato organici ed inorganici di poter spostare parzialmente e gradualmente lo zolfo. Mi è sembrato ora interessante lo studio dell'azione di questo composto, del cloruro di selenio Se_2Cl_2 e del cloruro di zolfo SCl_2 sul solfocianato di mercurio e di piombo per vedere se tale azione fosse identica a quella trovata da Hans Lecher ed A. Goebel ⁽⁴⁾ per il protocloruro di zolfo. Questi Autori facendo agire una soluzione di S_2Cl_2 in cloroformio o tetracloruro di carbonio o solfuro di carbonio sul solfocianato di mercurio, hanno potuto isolare il solfuro di solfocianogeno $\text{S}_2(\text{SCN})_2$ sotto forma di cristalli che fondono a $-3,3$ dando un liquido giallo, inodoro e viscoso.

Io ho fatto anzitutto reagire il monocloruro di zolfo SCl_2 sciolto in CS_2 sul solfocianato di mercurio ed ho potuto isolare un composto solido colorato in giallo chiaro, solubile in CS_2 e CCl_4 , che non presenta un punto di fusione, ma quando venga scaldato a $50-60^\circ$ si decompone violentemente. Questo composto è perfettamente identico a quello preparato da H. Lecher e M. Witwer ⁽⁵⁾ per azione dell'idrogeno solforato su una soluzione eterea di solfocianogeno e precedentemente da R. Schneider ⁽⁶⁾ per decomposizione del cianuro di argento con S_2Cl_2 . Questo composto quando venga conservato a temperatura ordinaria, dopo qualche tempo non si scioglie più in CS_2 ed assume un colore giallo scuro e poi arancio. A bassa temperatura (-20°) invece è stabile. In modo analogo si comportano le sue soluzioni in CS_2 ed in CCl_4 che quando vengano conservate a temperatura ambiente lasciano separare un prodotto rosso insolubile ed infusibile. L'analisi di questo mi ha permesso di stabilire che probabilmente avviene un processo di polimerizzazione perchè la percentuale di zolfo resta inalterata; la sua insolubilità in tutti i solventi mi ha reso impossibile la determinazione del suo peso

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale e Chimica fisica della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 19 gennaio 1936.

(3) « Rend. Acc. Lincei », XVI, ser. 6^a, p. 514 (1932).

(4) « Berichte », 55, p. 1483 (1922).

(5) « Berichte », 55, p. 1481 (1922).

(6) « J. pr. Chemie », 2, 32, p. 187 (1885).

molecolare e quindi del grado di polimerizzazione. A mio avviso essendo il composto $S_2(SCN)_2$ di Lecher e Geobel facilmente fusibile e dovendo verosimilmente essere pure facilmente fusibile il composto $S(SCN)_2$, il prodotto giallo infusibile da me ottenuto è probabilmente anch'esso un polimero. Anche effettuando la reazione a temperature molto basse non mi è stato possibile ottenere nessun composto facilmente fusibile.

Per il composto $S_2(SCN)_2$ Lecher e Goebel hanno osservato che conservando le sue soluzioni in CS_2 o CCl_4 a temperatura ordinaria si ha formazione di una massa color rosso arancio infusibile ed insolubile. Io ho analizzato questo prodotto infusibile ed ho trovato che esso è un polimero di quello studiato da questi Autori perchè la percentuale di zolfo corrisponde perfettamente alla formula $S_2(SCN)_2$. In questo caso però la tendenza alla polimerizzazione risulta minore.

Per azione del cloruro di selenio Se_2Cl_2 sul solfocianato di mercurio, ho potuto isolare un composto solido infusibile di color arancio corrispondente alla formula $Se_2(SCN)_2$ che presenta le stesse caratteristiche del solfuro $S(SCN)_2$. Per azione del protocloruro di zolfo e selenio sul solfocianato di mercurio ho ottenuto un composto giallo arancio infusibile corrispondente alla formula $SeS(SCN)_2$. Le soluzioni di questi composti polimerizzano pure molto facilmente a temperatura ordinaria con formazione di prodotti insolubili dei quali quindi non è possibile determinare il grado di polimerizzazione.

I composti da me preparati si decompongono con acqua in modo perfettamente parallelo a quello trovato da Lecher e Goebel per il loro composto. Si ha cioè per il composto $S(SCN)_2$ formazione di $S,HCNS, H_2SO_4, HCN$ e per i composti $Se_2(SCN)_2$ ed $SeS(SCN)_2$ si ha formazione di $Se, HCNS, H_2SO_4$ ed HCN .

Per azione del seleniuro e del solfoseleniuro di solfocianogeno sulla piperidina ho ottenuto nel primo caso formazione di solfocianato di piperidina con separazione di selenio e nel secondo caso di solfocianuro di piperidina e di monotiopiperidina con separazione di selenio. In questo caso quindi la decomposizione avviene in modo analogo a quella del protoselen-solfocloruro già da me precedentemente studiata.

PARTE SPERIMENTALE.

Preparazione di $S(SCN)_2$. — In una soluzione di gr. 5,15 (1/20 di gr. mol.) di SCl_2 in 35 cc. di CS_2 raffreddata con ghiaccio, sono stati introdotti gr. 20 di $Hg(CNS)_2$. La miscela è stata agitata fortemente per un'ora e poi filtrata per separare il cloruro di mercurio formatosi; il filtrato è stato raffreddato a -50° con una miscela di CO_2 ed acetone. Dalla soluzione si è separato un precipitato cristallino giallo chiaro che è stato purificato per cristallizzazione dall'etere. L'analisi del suo contenuto in zolfo ha dato i seguenti risultati:

Sostanza pesata	BaSO ₄ pesato	S % trovato
0,0293	0,1383	64,83
0,0434	0,2050	64,87

La percentuale teorica di zolfo corrispondente alla formula $S(SCN)_2$ è 64,91.

Per studiare la decomposizione con la piperidina ho preparato una soluzione di solfuro di solfocianogeno (1 mol.) in CCl_4 e l'ho lasciata gocciolare lentamente in una miscela di piperidina (3 mol.) e di CCl_4 raffreddata con ghiaccio ed agitata fortemente. Ho ottenuto così un precipitato bianco che ho filtrato e purificato per cristallizzazione dall'alcool. Il suo p. f. 95° corrisponde a quello del solfocianato di piperidina. La soluzione, per evaporazione nel vuoto, ha lasciato un residuo solido che ho purificato per cristallizzazione dall'alcool. Il suo p. f. 74° corrisponde a quello della monotiopiperidina che è già stata preparata per azione del monocloruro di zolfo sulla piperidina ⁽¹⁾.

Preparazione di $SeS(SCN)_2$. — Questo composto è stato ottenuto in modo perfettamente analogo a quello sopra accennato per $S(SCN)_2$ usando del protoselenosolfocloruro ottenuto per azione di Se su S_2Cl_2 . Esso è solido, di colore giallo arancio, infusibile e si decompone violentemente per riscaldamento a 50–60°. L'analisi dello zolfo e del selenio ha dato i seguenti risultati:

Sostanza pesata	BaSO ₄ pesato	Se pesato	S % trovato	Se % trovato
0,0386	0,1187	0,0134	42,23	34,74
0,0491	0,1512	0,0170	42,29	34,62

Le percentuali teoriche di zolfo e di selenio corrispondenti alla formula $SeS(SCN)_2$ sono rispettivamente 42,35 e 34,83.

La decomposizione di questo composto con piperidina, eseguita nel modo indicato per $S(SCN)_2$ mi ha permesso di stabilire che si ha formazione di solfocianato di piperidina e di monotiopiperidina con separazione di selenio.

Preparazione di $Se_2(SCN)_2$. — Nel modo sopra detto ed usando il cloruro di selenio Se_2Cl_2 ho potuto ottenere questo composto sotto forma di una polvere cristallina infusibile che ho purificato per cristallizzazione dall'etere. La sua analisi ha dato i seguenti risultati:

Sostanza pesata	BaSO ₄ pesato	Se pesato	S % trovato	Se % trovato
0,0497	0,0843	0,0286	23,29	57,55
0,1224	0,2070	0,0704	23,23	57,52

(1) «Berichte», 28, 1013 (1895).

Le percentuali di zolfo e di selenio corrispondenti alla formula $\text{Se}_2(\text{SCN})_2$ sono rispettivamente 23,36 e 57,69.

La decomposizione di questo composto con piperidina mi ha permesso di ottenere solo solfocianato di piperidina e selenio il quale manifesta quindi una tendenza molto minore rispetto a quella dello zolfo a combinarsi con la piperidina.

Riassumendo: Sono stati preparati il seleniuro e il solfoseleniuro di solfocianogeno $\text{Se}_2(\text{SCN})_2$ ed $\text{SeS}(\text{SCN})_2$, non ancora noti, per azione del cloruro di selenio Se_2Cl_2 e del protoselenosolfocloruro Se_2SCl_2 sul solfocianato mercurico ed il solfuro di solfocianogeno $\text{S}(\text{SCN})_2$ per azione del cloruro di zolfo SCl_2 sul solfocianato mercurico (quest'ultimo composto era già stato ottenuto da H. Lecher per azione di H_2S sul solfocianogeno) ed è stato dimostrato che tutti questi composti polimerizzano molto facilmente a temperatura ordinaria dando prodotti infusibili ed insolubili.

Chimica (Chimica agraria). — *Sulla decomposizione termica delle NH_4 -argille*⁽¹⁾. Nota di O. BOTTINI, presentata⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Nella preparazione dei terreni per lo studio dell'assorbimento polare in relazione alla natura dei cationi che si scambiano⁽³⁾ fu notato e messo in evidenza il fatto che H-terreno, preparato secondo i metodi correnti⁽⁴⁾, presentava una quantità di H^+ assorbito inferiore alla totale capacità di scambio del terreno usato per la sua preparazione.

Il fatto fu allora così interpretato in riferimento al metodo adoperato (trattamento all' HCl). « Evidentemente l'acido cloridrico normale ventesimo, usato per preparare H-terreno, oltre che spostare le basi di scambio, attacca anche il complesso assorbente ». E veniva anche aggiunto: « Il fatto non deve meravigliare se si considera la grande attività degli ioni H^+ anche a basse concentrazioni ».

Fu ritenuto allora che con l'impiego dell'elettrodialisi, in luogo del trattamento con acidi, si potessero preparare H-terreni, senza influenzare gran che la composizione e la struttura del complesso assorbente. Però ulteriori prove in questo senso portarono al convincimento che qualunque trattamento, praticato allo scopo di preparare H-terreno, fosse esso elettrico fosse chimico, esercita sempre una certa influenza sulla struttura e sulla composizione del complesso assorbente.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica agraria della R. Università di Napoli.

(2) Nella seduta del 19 gennaio 1936.

(3) O. BOTTINI, « Ann. Chim. Appl. », 23, 227, 1933.

(4) K. K. GEDROIZ, « Koll. Beiheft », 33, 422, 1931.

D'altra parte veniva notato, sempre nella preparazione dei terreni per lo studio dell'assorbimento polare in funzione dei cationi che si scambiano, che i terreni con unica base di scambio (Me-terreni), ottenuti mediante trattamenti con soluzioni di sali neutri, conservavano inalterata la capacità di scambio del terreno usato per la loro preparazione e verosimilmente anche la struttura del suo complesso assorbente.

La via per preparare H-terreni, escludendo i trattamenti diretti, chimici ed elettrici, avrebbe potuto essere così una sola: saturare il terreno con una base appropriata, tale che poi lasciasse facilmente il posto all'idrogeno, senza l'intervento di agenti chimici o elettrici.

Passando in rassegna le proprietà dei singoli Me-terreni, l'attenzione converse subito su NH_4 -terreno.

Poteva esserci la possibilità che, a somiglianza dei sali di ammonio degli acidi minerali, anche le NH_4 -argille degli NH_4 -terreni si decomponessero con il calore e che tale decomposizione, a somiglianza delle decomposizioni dei sali di ammonio, portasse alla risoluzione del complesso in ammoniaca e residuo acido. Residuo acido che in tal caso sarebbe stato H-terreno.

Prove orientative in tal senso, e cioè trattamenti termici di campioni di NH_4 -terreni, fecero notare come ad una certa temperatura il terreno incominciava a svolgere realmente ammoniaca, mentre il materiale residuo manifestava evidenti proprietà acide, di quell'acidità che felicemente De Dominicis ⁽¹⁾ chiama solida.

Però nel momento in cui si constatava la riuscita del metodo, si notava che la decomposizione degli NH_4 -terreni era completa solo ad alte temperature, a temperature tali che, agendo sui colloidi del terreno, ne alteravano profondamente le proprietà anche se ne lasciavano intatta la composizione.

La ricerca in tal senso, nel senso di preparare per via termica H-terreni da NH_4 -terreni, veniva così per il momento messa da parte: con il proposito però di riprenderla di nuovo, appena in possesso di mezzi che permettessero di abbassare convenientemente la temperatura di decomposizione.

Ma le prove condotte avevano intanto fatto intravedere un campo di ricerche che avrebbe potuto essere senz'altro messo a profitto.

Gli NH_4 -terreni si decompongono con il calore. Di questa decomposizione può venire facilmente seguito l'andamento. Questo andamento potrebbe far luce sulla maniera secondo cui il complesso di scambio porta legata l' NH_4 .

Dal confronto del fenomeno su diversi terreni si può infine stabilire se tutti gli NH_4 -terreni seguano nella loro decomposizione termica il medesimo andamento.

(1) A. DE DOMINICIS, « Ann. R. Ist. Sup. Agrario di Portici », 20, 1, 1925.

Queste le ragioni delle prove in tal senso, i cui risultati sono qui appresso riferiti.

PARTE SPERIMENTALE.

Le prove venivano condotte su tre differenti terreni.

Un ferretto della Barraggia Vercellese, proveniente dalla degradazione di rocce porfiriche e granitiche.

Un terreno alluvionale sabbioso-argilloso del Torinese, prelevato presso il bivio Altesano-Druent.

Un terreno alluvionale argilloso-sabbioso del Salernitano, prelevato nel territorio di Montecorvino Rovella, nell'Azienda Agraria del R. Istituto Superiore Agrario di Portici.

Veniva impiegata la frazione che passava attraverso lo staccio con fori di 0,25 mm. di diametro.

Tutti e tre erano esenti da calcare e presentavano scarso contenuto di sostanza organica, come appare dai dati riportati nella seguente Tabella I.

TABELLA I.

Alcune caratteristiche dei terreni in esperimento.

Denominazione dei terreni	Carbonati ‰	Sostanza organica ‰	pH della sospensione in acqua	pH dell'estratto acquoso	Totale capacità di scambio mgr. equiv. ‰
Vercelli	ass.	0,65	5,91	6,11	6,17
Altesano	ass.	2,70	8,47	7,41	12,90
Montecorvino . .	ass.	1,45	7,67	6,86	20,42

I valori pH facevano ritenere due di tali terreni esenti da idrogeno assorbito. Solo quello di Vercelli avrebbe potuto contenerne; ma la determinazione diretta, fatta secondo Gedroiz ⁽¹⁾, non ne rivelava quantità apprezzabile. Cosicchè i terreni si dimostravano tutti saturi di basi e presentavano le totali capacità di scambio, determinate secondo Hissink ⁽²⁾, riferite nella Tabella precedente.

Questi terreni venivano saturati con NH_4^+ , seguendo i procedimenti già altre volte impiegati ⁽³⁾. Venivano trattati ripetutamente con soluzione normale di NH_4Cl , fino a che, per tali trattamenti, non veniva spostato più

(1) K. K. GEDROIZ, *Chemische Bodenanalyse* di G. BORNTAEGER. Berlin, 1926.

(2) D. J. HISSINK, «Internat. Mitt. f. Bodenkunde», 12, 104, 1922.

(3) O. BOTTINI, loc. cit.

calcio. Dopo di che si procedeva al lavaggio con acqua: il lavaggio veniva fatto in grossi e robusti becker, e l'allontanamento dell'acqua per aspirazione attraverso candele Chamberland veniva protratto fino a che il liquido filtrato non presentasse più la reazione dei cloruri e non contenesse più composti organici disciolti o altamente dispersi.

Trattando un terreno con soluzione di NH_4Cl , la materia organica già umificata passa infatti allo stato di umato di ammonio, che in seguito si disperde in acqua, e diventa capace di passare integralmente attraverso i fori delle candele di porcellana porosa ⁽¹⁾, a differenza della parte minerale.

I campioni in tal modo preparati venivano lasciati seccare all'aria, quindi accuratamente pestati fino a farli passare di nuovo per intero attraverso lo staccio con fori di 0,25 mm. di diametro.

Dopo i trattamenti le caratteristiche dei terreni diventavano quelle riportate nella seguente Tabella II.

TABELLA II.

Alcune caratteristiche degli NH_4 -terreni pronti per le prove di decomposizione termica.

Denominazione dei terreni	Carbonati %	Sostanza organica %	pH della sospensione in acqua	pH dell'estratto acquoso	NH_4 di scambio	
					gr. %	mgr. equiv. %
Vercelli . . .	ass.	11.	7,03	6,89	0,0598	3,32
Altesano . . .	ass.	1.07	7,17	7,01	0,0972	5,40
Montecorvino	ass.	0,46	8,09	7,51	0,2376	13,20

La sostanza organica ancora presente in due dei tre campioni doveva essere evidentemente costituita di residui vegetali grossolani non ancora umificati, poco dispersi e quindi non asportabili con il lavaggio con acqua e con filtrazione attraverso le candele di porcellana porosa.

I terreni si dimostravano ancora tutti saturi di basi, come appare chiaramente dai valori di pH. Da essi infatti è facile rilevare come l'effetto di sospensione porti gli esponenti di reazione sempre nella zona dell'alcalinità: caratteristica questa dei complessi che non contengono ioni H^+ assorbiti ⁽²⁾.

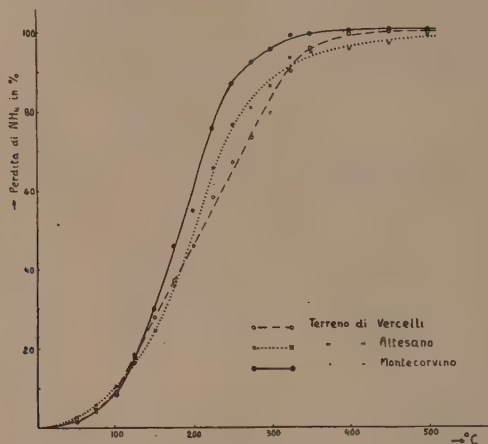
La totale capacità di scambio, costituita nei terreni pronti per le prove esclusivamente da NH_4 assorbito, si abbassava notevolmente dopo la pre-

(1) SVEN ODÉN, «Kolloidchem. Beihefte», 11, 177, 1929.

(2) G. WIEGNER, «Koll. Zeitschr.», 51, 49, 1930.

parazione dei campioni, come appare chiaramente dal confronto dei dati delle Tabelle I e II. Tale diminuzione va attribuita prevalentemente alla esportazione dei complessi organici di assorbimento (umato di ammonio), operata con i lavaggi.

I terreni pronti per l'uso risultavano quindi sempre saturi e gli ioni NH_4^+ stavano in essi esclusivamente assorbiti sui costituenti minerali.



Andamento della decomposizione termica della NH_4 -argille.

Tali terreni venivano in primo luogo sottoposti a trattamenti termici preliminari, vere distillazioni secche, e veniva raccolta l'acqua che distillava, allo scopo di procedere alla ricognizione dei prodotti che l'acqua trascinava con sè nella distillazione. L'analisi del distillato, sempre fortemente alcalino per ammoniaca, attestava chiaramente che durante il riscaldamento si liberava ammoniaca dai complessi di assorbimento. Minuziose determinazioni quantitative dimostravano però che, a misura che la temperatura veniva innalzata, e dal punto cui l'acqua del terreno incominciava a finire, l'ammoniaca prendeva a decomorsi in grado sempre più elevato: cosa questa del resto già prevedibile in base ai dati di Haber e Van Oordt ⁽¹⁾. Cosicchè la determinazione dell'ammoniaca che si liberava dal complesso assorbente non poteva valere nel caso in questione per seguire il processo di decomposizione degli NH_4^+ -terreni e perciò veniva messa da parte.

Per seguire la decomposizione termica si faceva allora ricorso all'unica via che rimaneva da battere: e cioè alla determinazione dell'ammoniaca nei terreni che avevano subito l'azione delle diverse temperature.

(1) F. HABER und G. VAN OORDT, « Zeitschr. anorg. Chem. », 43, 111, 1904 e 44, 341, 1905.

TABELLA III.
NH₄ nei terreni dopo l'azione delle diverse temperature.

Denominazione dei terreni	NH ₄ nei terreni portati a peso costante a																
	Temp. ambiente	50°	75°	100°	125°	150°	175°	200°	225°	250°	275°	300°	325°	350°	400°	450°	500°
Vercelli	0,0598	0,0584	0,0572	0,0545	0,0489	0,0432	0,0379	0,0326	0,0252	0,0197	0,0162	0,0125	0,0059	0,0027	tr.	tr.	tr.
Altesano	0,0972	0,0947	0,0917	0,0873	0,0814	0,0740	0,625	0,0568	0,0336	0,0229	0,0192	0,0136	0,0067	0,0054	0,0049	0,0034	tr.
Montecorvino . . .	0,2376	0,2336	0,2266	0,2173	0,1944	0,1663	0,1276	0,1076	0,0580	0,0311	0,0184	0,0114	tr.	tr.	tr.	tr.	tr.

TABELLA IV.
NH₄ liberatosi alle diverse temperature, in percento delle quantità iniziali.

Denominazione dei terreni	NH ₄ liberatisi dai terreni trattati a															
	50°	75°	100°	125°	150°	175°	200°	225°	250°	275°	300°	325°	350°	400°	450°	500°
Vercelli	2,34	4,35	8,86	18,23	27,76	36,63	45,48	57,86	67,06	72,91	79,09	90,14	95,49	100—	100—	100—
Altesano	2,57	5,66	10,19	16,26	23,87	35,70	41,57	65,44	76,45	80,25	86,01	93,11	94,45	94,96	96,51	100—
Montecorvino	1 69	4 63	8,55	18,18	30,01	46,30	54,71	75,59	86,92	92,26	95,21	100—	100—	100—	100—	100—

I trattamenti termici venivano condotti in stufe ad aria. Per le temperature tra 50° e 150° veniva impiegata una Weber con termoregolatore Weber; per le temperature tra 150° e 350° una Struers con termoregolatore Vertex; per le temperature oltre i 350° veniva fatto uso di un forno della Electric Heating Apparatus Co., sprovvisto di termoregolatore, la cui temperatura veniva però costantemente controllata, mediante una coppia « Resilia » della Foster Instr. Co., e sempre opportunamente regolata.

Tali trattamenti venivano iniziati alla temperatura di 50° ed effettuati per temperature progressivamente più elevate, mantenendo intervalli di 25° tra un trattamento e il successivo. I tre terreni venivano tenuti in stufa a ciascuna temperatura fino a che non perdevano più peso. A questo punto venivano portati in palloni di distillazione e in essi veniva determinato l'ammonio.

I valori dell'ammonio determinato nei terreni dopo permanenza in stufa alle varie temperature, espressi in gr. per 100 gr. di terreno, si trovano riportati nella Tabella III.

Le tracce di ammonio venivano svelate col reattivo di Nessler, quando i comuni metodi di titolazione non fornivano più la necessaria sensibilità.

Dai dati riportati nella Tabella III è facile calcolare le quantità di ammonio che hanno abbandonato il terreno alle varie temperature. Da questi valori assoluti è anche semplice calcolare le percentuali di ammonio che, in ogni terreno a ciascuna temperatura, hanno abbandonato il complesso assorbente. Tali valori, quantità di ammonio liberatosi alle varie temperature, espresse in per cento delle quantità iniziali, costituiscono i dati della Tabella IV.

Questi numeri, che per maggiore comprensione sono stati tradotti anche in grafici, permettono per ora le seguenti considerazioni:

1) I complessi di scambio ammoniacali del suolo subiscono una decomposizione termica.

2) La decomposizione termica che negli NH_4 -terreni subiscono i complessi di scambio è graduale. Ciò risulta dal fatto che gli NH_4 -terreni sono stati mantenuti sotto l'azione del calore per ogni temperatura sperimentata fino a costanza di peso, fino al punto cioè in cui non si svolgevano più prodotti volatili, e dal fatto che a ogni temperatura corrispondeva una determinata eliminazione di ammonio, crescente per le progressive temperature.

3) Gli NH_4 -terreni dimostrano tutti la medesima gradualità nella loro decomposizione termica, sebbene secondo valori non coincidenti.

4) Il fenomeno della graduale decomposizione termica degli NH_4 -terreni permetterà di portare lo studio sopra la natura e la forza del legame che tiene unito l'ammonio nel caso particolare e i cationi in generale ai complessi assorbenti minerali del suolo.

La condizione che questo metodo realizza è quella di allontanare im-

mediatamente il prodotto volatile della dissociazione. Il completo allontanamento impedisce che il prodotto volatile agisca sull'equilibrio di decomposizione. La temperatura diventa così *unica e diretta misura* della forza del legame di assorbimento.

Cosa questa che non poteva essere ottenuta con il metodo degli scambi in soluzioni.

Chimica (Industrie Chimico-Agrarie). — *Contributo alla conoscenza della maturazione dei formaggi*. — II. *Poliipeptidi fosforati* ⁽¹⁾. Nota di E. PARISI e G. DE VITO, presentata ⁽²⁾ dal Socio A. MENOZZI.

Proseguendo le ricerche sulla maturazione dei formaggi accanto alle dichetopiperazine ed ai peptidi prolinici, dei quali ci siamo occupati nella Nota precedente ⁽³⁾, nel succo dei formaggi maturi abbiamo ora accertato la presenza di una interessante classe di poliipeptidi fosforati solubili in acqua la cui importanza biologica ed alimentare non può sfuggire a chi consideri che in essi il fosforo si trova in combinazione organica unito, come è stato recentemente dimostrato, alla funzione alcoolica di alcuni ammino acidi ossidrilati, quali l'acido idrossiamminobutirrico e l'acido idrossiglutammino, la serina, la idrossiprolina ecc. originariamente contenuti nella caseina ⁽⁴⁾.

Sotto l'azione degli enzimi proteolitici, - la cui presenza nei formaggi maturi venne da noi segnalata nel nostro lavoro precedente, - si staccano, dalla grossa molecola della caseina, dei frammenti a peso molecolare relativamente piccolo, ai quali rimane legato quasi tutto il fosforo della sostanza madre. Ne viene che detti composti si accumulano lentamente nei formaggi a pasta dura e più rapidamente nei formaggi a pasta molle, ricchissimi di proteasi.

È noto che corpi fosforati, con proprietà analoghe a quelli da noi isolati dai formaggi, furono riscontrati da Maraczewski ⁽⁵⁾, Sebelin ⁽⁶⁾, Sal-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Industrie Chimico-Agrarie del R. Istituto Superiore Agrario di Milano.

(2) Nella seduta del 19 gennaio 1936.

(3) E. PARISI e G. DE VITO, « Rend. Acc. Lincei », 20, 44 (1934).

(4) P. A. LEVENE e D. W. HILL, « J. Biol. Chem. », 101, 711 (1933); P. A. LEVENE e A. SCHORMÜLLER, « J. Biol. Chem. », 100, 583 (1933); 105, 547 (1934); 106, 595 (1934); G. SCHMIDT, « Z. Physiol. Chem. », 223, 86 (1934); C. RIMINGTON, « Bioch. J. », 21, 1187 (1927).

(5) W. MARACZEWSKI, « Z. Physiol. Chem. », 20, 28 (1895).

(6) I. SEBELIN, « Z. Physiol. Chem. », 20, 443 (1895).

kowski ⁽¹⁾, Bissegger e Stegmann ⁽²⁾, Posternak ⁽³⁾, e Rimington e Kay ⁽⁴⁾ nei liquidi provenienti dalla digestione *in vitro* con tripsina, in mezzo alcalino, della caseina; e su questa osservazione è fondato il ben noto brevetto svizzero di Posternak ⁽⁵⁾ diretto ad ottenere — a partire dalla caseina commerciale — dei prodotti organici fosforati da servire a scopo terapeutico ed alimentare; ma nessuno, almeno per quel che è a noi noto, ha mai supposto che detti composti potessero normalmente trovarsi, e in quantità cospicue, nei formaggi maturi, nei quali i fenomeni enzimatici e biologici si svolgono, meno rare eccezioni (formaggi ultramaturi o a pasta colorata), in ambiente marcatamente acido.

Per isolare dal formaggio i polipeptidi fosforati abbiamo approfittato della loro singolare proprietà di fornire dei composti insolubili per ebollizione o per lungo riscaldamento a bagno maria in presenza di soluzioni non molto diluite di allume ferrico ammoniacale.

Ulteriormente purificati attraverso il sale di rame, detti composti si possono avere sotto forma di polvere bianca, stabile all'aria, che fonde tra 250 e 260°.

Le sue soluzioni acquose reagiscono acide, non precipitano, nè col cloruro ferrico, nè con l'acido tricloroacetico, e deviano fortemente a sinistra il piano della luce polarizzata.

A differenza dei peptidi prolinici (vedasi Nota precedente) i polipeptidi fosforati danno intensissima la reazione del biureto; non danno però le altre reazioni cromatiche delle proteine e ciò, evidentemente, perchè mancano in essi gli ammino acidi cui dette reazioni sono dovute (ammino acidi a nucleo aromatico, triptofano, cistina, istidina ecc.).

Di fronte agli acidi ed agli enzimi proteolitici, quali la pepsina, la tripsina, la papaina ecc. il legame etero dei composti fosforati del succo dei formaggi è straordinariamente resistente; esso si spezza invece con estrema facilità per azione degli alcalini caustici e della fosfatasi.

PARTE SPERIMENTALE.

I. — Circa 200 gr. di polvere di formaggio Grana, già sgrassati con etere e spossati ripetutamente a caldo con alcool a 90°, vengono riscaldati a lungo a bagno maria con 200 cc di acqua. Si ottiene una soluzione fortemente levogira che, diluita con due volumi di alcool, fornisce un precipitato igroscopico nel quale il fosforo e l'azoto stanno fra loro nel rapporto di 1:4,7 (nella caseina tale rapporto è di 1:22).

(1) E. SALKOWSKI, «Z. Physiol. Chem.», 32, 245 (1901).

(2) W. BISSEGGER e L. STEGMANN, «Z. Physiol. Chem.», 58, 147 (1908-9).

(3) S. POSTERNAK, «Compt. rend.», 184, 306 (1927).

(4) C. RIMINGTON e D. KAY, «Biochem. J.», 20, 777 (1926); C. RIMINGTON, *Ibid.*, 27, 1179 (1927).

(5) Brevetto svizzero N° 104336.

Le soluzioni acquose di questo prodotto, come quelle di « Carniferrin » o « phosphorfleischsäure » di Siegfried, bollite con cloruro ferrico, rimangono limpide, mentre precipitano abbondantemente a caldo con allume ferrico ammoniacale ⁽¹⁾.

II. — *Sale di rame.* — 250 gr. di formaggio Gorgonzola, asciugati quasi completamente per pressione al torchio idraulico, si riscaldano a bagno maria per tre volte consecutive con mezzo litro di acqua per volta.

Le soluzioni, fortemente levogire, vengono riunite e trattate a caldo con una soluzione acquosa bollente e satura di acetato di rame. Si ottiene un precipitato abbondante di color celeste chiaro, che viene filtrato a caldo alla pompa e lavato con acqua. In esso il fosforo e l'azoto stanno nel rapporto di 1:4.

III. — *Sale di ferro.* — Il sale di rame, precedentemente preparato, viene sospeso in 200 cc. di acqua e scomposto con una lenta corrente di idrogeno solforato: si filtra il solfuro di rame e dal filtrato, dopo di avere scacciato l'acido solfidrico con una corrente di aria, si precipitano le piccole quantità di fosfati minerali, che in esso accompagnano ancora i polipeptidi fosforati, con miscela magnesiaca e ammoniacale in eccesso.

Dopo 24 ore si filtra il fosfato ammonico magnesiaco e la soluzione, neutralizzata al tornasole con acido acetico, si scalda a lungo in bagno maria bollente in presenza di allume ferrico ammoniacale, aggiunto in sostanza fino a rendere la soluzione quasi satura.

Dopo qualche tempo si forma un abbondante precipitato rossastro che viene filtrato e lavato con acqua e poi con etere: esso contiene ferro, fosforo ed azoto.

Azoto %: 5,48; Fosforo %: 1,76

Rapporto P: N = 1:3,1.

IV. — *Isolamento del polipeptide fosforato.* — 2 gr. del sale ferrico si sospendono in 30 cc. di idrossido di sodio $\frac{N}{2}$; la soluzione si filtra alla pompa il più rapidamente possibile, raccogliendo il filtrato su acido acetico glaciale (circa 2 cc.). Da questa soluzione si riprepara il sale di rame, che viene quindi scomposto come prima. La soluzione risultante viene ora concentrata a pressione ridotta ed addizionata di due volumi di alcool assoluto: si separa un precipitato fioccoso molto igroscopico che, filtrato alla pompa e lavato abbondantemente con acetone anidro, perde la sua igroscopicità e si trasforma in una polvere bianca stabile all'aria che fonde a 258°.

(1) M. SIEGFRIED, « Z. Physiol. Chem. », 21, 360 (1895-1896); BALKE e IDE, « Z. Physiol. Chem. », 21, 380 (1895-1896); SALKOWSKI (loc. cit.).

Reazioni:

Biureto	—	Fortemente positiva (con colorazione rosa)
Xantoproteica	—	Debolissima
Gliossilica	—	Negativa
Molisch	—	»
Ninidrina	—	»
Zolfo	—	»
Acido tricloracetico	—	Nessun precipitato
Cloruro ferrico	—	» »
Allume ferrico	—	» » a freddo; precipitato abbondante a caldo
Acetato di rame	—	Precipitato abbondante bleu
Acetato d'uranio	—	» giallo ocra
Acetato di piombo	—	» giallastro.

La sostanza contiene il 3,1 % di fosforo organico che si libera per azione degli alcali, lentamente a freddo, istantaneamente a caldo.

Come la potassa, anche la fosfatasi stacca rapidamente l'acido fosforico del polipeptide fosforato del formaggio.

Biologia. — *Influenza della regione cefalica sul movimento e sulla sensibilità delle Planarie tricladi.* ⁽¹⁾ Nota di M. BENAZZI presentata ⁽²⁾ dal Socio E. GIACOMINI.

Nel corso di ricerche che perseguo da vari anni sulla riproduzione asessuale dei Tricladi d'acqua dolce, ho avuto occasione di occuparmi di un particolare fenomeno, del quale desidero trattare, brevemente ed in forma preliminare, in questa Nota.

Il fatto riguarda il diverso comportamento che dimostrano i due frammenti (quello anteriore e quello posteriore) di una planaria divisa trasversalmente, tanto nel caso di scissione spontanea, come in seguito a divisione sperimentale. L'esame più superficiale dimostra subito che i due frammenti si comportano in maniera ben diversa, in quanto la parte anteriore, comprendente il capo, conserva tutta la vivacità e varietà di movimenti e di reazioni dell'animale intero, mentre la parte posteriore diviene molto più torpida, si sposta con maggior lentezza e reagisce assai meno intensamente agli stimoli esterni. Onde illustrare meglio il fatto riporterò, come esempio, alcune mie semplici esperienze. Si prenda un esemplare normale di *Eupla-*

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata della R. Università di Sassari.

(2) Nella seduta del 19 gennaio 1936.

Planaria (*Planaria*) *gonocephala* Dugès (su questa specie ho compiuto la maggior parte delle osservazioni) e lo si divide trasversalmente in due parti; il taglio può essere fatto circa a metà del corpo, ma l'esperienza riesce dimostrativa anche se lo si pratica più anteriormente, in guisa da separare, col capo, solo una piccola porzione del corpo. Appena compiuta la sezione, la parte cefalica continua a spostarsi nel modo consueto ⁽¹⁾ conservando la velocità normale e mantenendosi sensibilissima a qualsiasi stimolo; la parte posteriore invece (anche se comprendente buona parte del corpo) si mostra subito più torpida; dapprima si raggrinza, poi si sposta con maggior lentezza e senza la vivacità propria al frammento cefalico; in seguito, se non è più eccitata, tende a restare a lungo immobile, aderendo alle pareti del recipiente assai più tenacemente che non gli esemplari normali o le porzioni cefaliche. Questo suo comportamento non si nota solo nei momenti successivi alla divisione, ma permane (appare anzi ancor più manifesto) nei giorni seguenti, fino a tanto cioè che la rigenerazione della testa non sia sufficientemente progredita (ciò che si compie in un tempo variabile a seconda della temperatura ambiente). Se si pongono nel medesimo recipiente frammenti anteriori e posteriori di alcune planarie divise trasversalmente e dopo qualche giorno di riposo si rinnova l'acqua, determinando una temporanea corrente, si noterà che le porzioni anteriori (al pari degli esemplari integri) iniziano subito un vivace movimento (*Pl. gonocephala* vive in ruscelli e torrenti ed è reofila) che continuano per parecchio tempo, mentre le porzioni posteriori o non reagiscono, o si spostano con notevole lentezza e nella maggioranza dei casi si arrestano di nuovo assai prima dei frammenti anteriori. Se si pongono in un bicchiere alcuni frammenti anteriori e posteriori divisi da pochi giorni e si ruota leggermente, per un po' di tempo, il bicchiere, in guisa da determinare solo lievi oscillazioni dell'acqua, queste saranno rapidamente avvertite dai frammenti cefalici, mentre quelli caudali non dimostrano, in generale, alcuna reazione. Altra esperienza semplicissima ed assai dimostrativa è la seguente. Si mettano porzioni anteriori e posteriori in un vaso di vetro sul cui fondo si pone un ciottolo e si esponga il recipiente alla luce naturale, davanti ad una finestra. Se dopo qualche ora si esamina la distribuzione delle planarie, si noterà che tutti (o quasi tutti) i frammenti anteriori si sono raccolti sotto al ciottolo, rifuggendo dalla eccessiva illuminazione, mentre le parti posteriori sono rimaste attaccate alle pareti del vaso, senza dimostrare sensibilità alla luce.

I fatti ora esposti (che ho avuto agio di controllare ripetutamente) dimostrano quindi come i frammenti di *Planaria* privi di capo, pur essendo in grado di compiere movimenti coordinati e di reagire a stimoli meccanici, si differenzino tuttavia in maniera netta dagli individui (o frammenti) mu-

(1) Per alcuni istanti procede in maniera singolare, con movimenti di espansione e di retrazione, poi riprende a strisciare normalmente.

niti di capo, in quanto regiscono assai meno agli stimoli esterni, hanno movimenti spontanei scarsissimi e si spostano sempre molto più lentamente ⁽¹⁾, presentando inoltre la capacità di aderire in modo più tenace alla superficie dei corpi.

Alcune di queste mie conclusioni non parrebbero tuttavia in accordo con quanto affermano i più noti trattatisti. Scrive, ad es., il Bresslau (nel grande *Trattato di Zoologia* fondato dal Kükenthal) che nelle planarie l'eccitamento per i vari movimenti proviene dalla rete nervosa della cute e del corpo, e non dal cervello, poichè in seguito a sezione trasversa i frammenti posteriori hanno ancora la capacità di compiere tutti questi movimenti e non dimostrano differenze notevoli rispetto agli individui normali. Soltanto per l'esplicazione del movimento sono necessari stimoli maggiori, soprattutto nei grossi Policladi, ove, dopo la sezione, le parti posteriori restano a lungo immobili: presumibilmente in questi animali, gangli cerebrali e connessi organi di senso possiedono una soglia di eccitazione notevolmente più bassa che le altre superfici del corpo, per cui i comuni stimoli restano a lungo inefficienti per le parti posteriori. Mi piace pure ricordare come lo Steinmann ⁽²⁾ delinea le caratteristiche generali del sistema nervoso delle planarie. In tutti i Tricladi d'acqua dolce i cordoni nervosi longitudinali ventrali (cordoni midollari, *Markstränge*) si considerano quali costituenti, al pari dei gangli cerebrali, del sistema nervoso centrale; in altri Turbellari invece (Aceli, Policladi) questi cordoni rappresentano solo dei nervi longitudinali. Tale differenza appare anche dal punto di vista fisiologico, in quanto i Policladi decapitati perdono, col cervello, la capacità di locomozione, od almeno la possibilità di movimenti spontanei, mentre i Tricladi paludicoli si possono tagliare in più pezzi, ognuno dei quali conserva la tigmotassi e continua a strisciare con vivacità, risentendo nel moto anche l'influenza della luce; tali frammenti quindi, pur senza cervello, manifestano movimenti complicati e ben coordinati. Restano invece sopresse quelle attività sensitive, quali fototemo-reotattismo, che hanno negli organi di senso del capo i loro recettori specifici ⁽³⁾.

Per quanto anche le mie ricerche dimostrino che frammenti di *Eupl. gonocephala* privi di capo hanno movimenti coordinati e possono reagire a certi stimoli esterni, ritengo tuttavia di poter sostenere, sulla base di ripetute osservazioni, che i gangli cerebrali hanno una influenza preponderante sulla mo-

(1) Riporterò qualche dato sulla diversa velocità con cui strisciano frammenti di *Pl. gonocephala*: alla temperatura di 15°-16° circa (la velocità varia notevolmente con la temperatura) le porzioni cefaliche percorrono 10 mm. in 5" o 6" circa, mentre le parti posteriori, anche se eccitate, impiegano il doppio e talora un tempo anche molto maggiore.

(2) In STEINMANN P. u. BRESSLAU E., *Die Strudelwürmer (Turbellaria)*. Leipzig, 1913.

(3) Dalle esperienze di KOEHLER (1926-1932) risulta tuttavia che in *Pl. alpina* i recettori sono diffusi in tutto il corpo, per quanto in assai minor misura rispetto alla regione anteriore.

tilità (spontanea e riflessa) di queste planarie. Particolarmente interessante mi pare il fatto della minor velocità con cui si spostano i frammenti privi di capo anche se variamente stimolati, il ch  dimostra che dai gangli cerebrali partono eccitamenti atti ad intensificare le onde di contrazione che determinano lo spostamento di questi animali ⁽¹⁾.

Pertanto mi   parso non privo di interesse approfondire maggiormente la questione, indagandola da vari punti di vista, e mi sono quindi proposto vari quesiti. Anzitutto di vagliare quale parte, nel complesso dei fatti da me descritti, sia dovuta alla mancanza dei gangli cerebrali e quale invece alla assenza degli organi di senso; d'altra parte di stabilire a quale stadio, nella rigenerazione della porzione cefalica, il frammento posteriore riacquista la normale capacit  di movimento e di reazione; compiendo naturalmente una minuta indagine istologica, onde giungere ad una conoscenza esatta degli elementi che agiscono come centri per l'eccitamento motore.

Di tali indagini, che ho ora iniziato, spero poter riferire in futuro.

Biologia (Embriologia sperimentale). — *Processi correlativi di determinazione e di accrescimento dell'abbozzo lentogeno negli Anfibi anuri.* - II. *Esperienze su «Rana esculenta»* ⁽²⁾. Nota di T. PERRI, presentata ⁽³⁾ dal Socio F. SILVESTRI.

Il comportamento dell'abbozzo lentogeno degli Anfibi   da tempo ampiamente studiato: sono stati cos  posti in evidenza numerosi fatti, i quali hanno molto approfondito le nostre conoscenze sull'argomento. Tuttavia i risultati raggiunti non sono ancora in numero sufficiente a permettere una visione sintetica: molti di essi sono tra loro collegati da ipotesi.

In una Nota del '34 ⁽⁴⁾ ho esposto i risultati ottenuti in una serie di ricerche sull'abbozzo lentogeno di *Bufo vulgaris* e di *Bufo viridis*.

Nella presente Nota mi occupo delle esperienze che ho eseguito su *Rana esculenta*, nel maggio-luglio del '34 ⁽⁵⁾. La prima parte di esse riguarda la

(1) J. ROBERTSON ARMITAGE («J. exper. Biol.», vol. 7, 1930) ha studiata la velocit  con cui strisciano frammenti di *Polycelis nigra*, constatando che le parti anteriori sono le pi  veloci, meno rapidi sono i frammenti medi, mentre quelli posteriori appaiono i pi  lenti. L'A. mette in rapporto queste differenze con i gradienti metabolici e la polarit  fisiologica, giusta le concezioni di Child.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia ed Embriologia comparate della R. Universit  di Roma, con fondi concessi dal Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(3) Nella seduta del 19 gennaio 1936.

(4) Questi «Rendiconti» vol. XIX, 1934, pp. 821-824.

(5) La prima parte dei risultati   stata gi  enunciata dal mio Direttore, prof. G. Cotronei, nella Relazione alla Societ  Italiana di Anatomia, nel Convegno di Roma del dicembre 1934: *Morfologia sperimentale, Morfologia comparata, Morfologia ecologica*. Indi-

determinazione dell'abbozzo lentogeno; altre, l'eventuale importanza di abbozzi d'organi nervosi e di senso (oltre il retinico) nel successivo sviluppo dell'abbozzo lentogeno; altre ricerche, infine, riguardano il destino dell'abbozzo lentogeno, già istologicamente determinato, qualora venga asportata la retina.

1) Determinazione dell'abbozzo lentogeno di *Rana esculenta*.

La determinazione dell'abbozzo lentogeno negli Anfibi è stata studiata su una ventina di specie tra Anuri e Urodeli. Sono stati messi in luce differenze varie. Qui mi limito a ricordare che si è visto che in tutte le specie, eccetto *Rana esculenta*, se si asporta l'abbozzo retinico allo stadio di neurula non si ha lo sviluppo del cristallino. Invece in *Rana esculenta*, nelle medesime condizioni, si ha che l'abbozzo lentogeno si sviluppa in cristallino ben differenziato in capsula e fibre (Spemann)⁽¹⁾.

Parve subito assai strana l'esistenza di una così profonda differenza tra *Rana esculenta* e le altre specie. È stata perciò formulata l'ipotesi che l'abbozzo lentogeno in tutti gli Anfibi sia sempre determinato dalla presenza dell'abbozzo retinico, solo che questa determinazione possa avvenire in stadi diversi dello sviluppo a seconda delle varie specie.

Considerando appunto l'apparente contraddizione tra *Rana esculenta* e le altre specie di Anfibi, mi son proposto di verificare se anche in *Rana esculenta* l'abbozzo retinico ha importanza nella determinazione dell'abbozzo lentogeno.

In ricerche preliminari, asportando l'abbozzo retinico allo stadio di neurula, mentre in alcuni casi ho avuto la determinazione dell'abbozzo lentogeno, in altri non l'ho avuta.

Ho allora voluto vedere se tale differenza fosse dovuta alla diversità dello stadio d'operazione, pur rimanendo nell'ambito dello stadio di neurula. Ho posto particolare cura a non ledere l'abbozzo lentogeno; ed è utile tener presente, nell'interpretazione dei risultati, che ciò è molto più facile operando in stadi di giovane neurula, anziché di neurula più avanzata. Della posizione dell'abbozzo lentogeno, mi sono impraticato con la tecnica delle colorazioni vitali.

Ho avuto i seguenti risultati. Nei casi operati allo stadio usato da Spemann⁽²⁾, o in stadio più avanzato, ho avuto sviluppo del cristallino ben

rizzi e problemi nello studio della forma. « Monit. Zool. Ital. », supplemento al vol. XLV, 1934 (v. a p. 130).

(1) H. SPEMANN, « Zool. Anz. », vol. 31, 1907 e « Zool. Jahrb. ». (« Abt. Zool. und Phys. »), vol. 32, 1912.

(2) Osservando lo stadio di neurula usata da SPEMANN (vedere le sue figure di p. 10 e p. 20 in « Zool. Jahrb. abt. Zool. und Phys. », vol. 32, 1912) si vede che le pieghe

differenziato in fibre e capsula. In altri 18 casi ⁽¹⁾ lo stadio variava da primo inizio di neurula, fino allo stadio in cui le docce neurali nella metà cefalica dell'embrione sono visibili, mentre nella metà caudale lo sono pochissimo ed il loro sollevamento è appena appena iniziato, sicchè al centro vi è un lievissimo avvallamento. In nessuno dei 18 casi ho avuto sviluppo dell'abbozzo lentogeno. In 4 di questi casi è rimasto un frammento di tessuto retinico che si è differenziato; queste retine sono venute a trovarsi distanti dall'ectoderma, e anche qui, ripeto, non ho avuto differenziamento del cristallino.

In questi 18 casi, asportando l'abbozzo retinico, ho rispettato l'archenteron sottostante; negli stadi in cui il cristallino è determinato fu invece quasi sempre asportato, il che non ha impedito che il cristallino si differenziasse lo stesso.

Da queste esperienze risulta che il territorio lentogeno raggiunge una stabile determinazione allo stadio di seconda metà di neurula. Tale determinazione non si raggiunge se si asporta l'abbozzo retinico allo stadio di prima metà di neurula. Ciò vuol dire che, come in tutti gli altri Anfibi studiati, anche in *Rana esculenta* l'abbozzo retinico è indispensabile alla determinazione dell'abbozzo lentogeno.

Consegue che non è più lecito distinguere tra gli Anfibi, specie con cristallino autodifferenziabile da specie con cristallino non autodifferenziabile. Si tratta solo che in *Rana esculenta* la determinazione avviene prima e nelle altre specie dopo, in tutte essendo indispensabile la presenza dell'abbozzo retinico. Il quale concetto finora era un'ipotesi, all'ipotesi le mie ricerche permettono di sostituire il fatto.

Ci sono ancora molti punti da chiarire, occorre anzitutto un'indagine molto approfondita sul valore e sul significato che ha il contatto tra abbozzo retinico ed ectoderma nella determinazione dell'abbozzo lentogeno, ed è soprattutto in questo senso che continueranno le mie ricerche ⁽²⁾.

2) Esperienze sull'importanza degli abbozzi del sistema nervoso e di organi di senso (oltre il retinico) nella determinazione dell'abbozzo lentogeno in *Rana esculenta*.

neurali sono nettamente visibili in tutta la loro estensione, e inoltre nella metà posteriore dell'embrione sono rilevate, e alquanto avvicinate.

(1) In altri pochi casi dello stesso gruppo di esperienze, l'abbozzo retinico è in parte rimasto. Si è differenziata una retina di discrete dimensioni, in normale rapporto con l'ectoderma, e con presenza del cristallino. Naturalmente non ho tenuto conto di questi casi.

(2) Le mie esperienze mi pare diano pure un'adequata interpretazione dei risultati della Daltrop, dove dicono che in giovanissime neurule di *Rana esculenta* togliendo la parte anteriore dell'abbozzo neurale non si ottiene cristallino (Roux, « Arch. f. Entw. Mech. », vol. 127, 1933).

Poichè anche in *Rana esculenta* esiste uno stadio ben determinato in cui insorge nell'abbozzo lentogeno la capacità a differenziarsi anche in assenza dell'abbozzo retinico, mi son proposto di vedere se per l'estrinsecarsi di tale capacità vi sia però bisogno, in tali condizioni, dell'influenza di altri organi nervosi e di senso. Tanto più che spesso, operando nello stadio di seconda metà di neurula, il cristallino sviluppandosi viene spesso a trovarsi assai vicino al tessuto nervoso, da cui è separato da cellule mesenchimali, le quali (come giustamente osserva il Dragomirow) vi si son potute interporre secondariamente.

Ricordo che dopo le ricerche di Dragomirow⁽¹⁾ e di Balinsky⁽²⁾ si ammette da molti che l'abbozzo del tessuto nervoso, dell'otocisti, del ganglio acustico, dell'organo olfattorio, abbiano potere lentogeno.

Spemann in alcune sue ricerche ha tolto i due abbozzi retinici e la zona corrispondente di abbozzo encefalico: non ebbe mai differenziamento del cristallino con fibre, ma ebbe solo vescicole che egli interpreta lentogene.

La tecnica migliore sarebbe stata quella degli espianti. Ne ho seguito pochi casi, con esito negativo. Ma poichè negli espianti intervengono fattori meccanici assai perturbatori, almeno nella tecnica oggi in uso, non credo dar valore a questi risultati negativi, comunque ripeterò queste esperienze.

In molti casi ho asportato la placca neurale per lo più insieme con sottostante tessuto mesodermico fino alla cavità dell'archenteron.

Nelle esperienze eseguite allo stadio di giovanissima neurula, è sempre rimasto un frammento di encefalo o di organi di senso: non ho mai avuto cristallino.

Nelle esperienze eseguite nella seconda metà di neurula, cioè nello stadio in cui il cristallino per svilupparsi non ha più bisogno della presenza dell'abbozzo retinico, non si sono mai verificate esattamente le condizioni volute dall'esperimento, nel senso che l'asportazione della placca neurale non è mai stata completa. Tuttavia ho ottenuto dei casi interessanti tra cui due particolarmente notevoli. In uno di essi c'è da un lato un cristallino ben sviluppato vicinissimo ad un ammasso di tessuto cartilagineo e lontano dall'otocisti e dall'abbozzo olfattorio, unici organi nervosi che nell'operazione non sono stati asportati. Nell'altro caso c'è un cristallino vicinissimo ad una otocisti: scorrendo le sezioni si nota dallo stesso lato un altro cristallino separato dal primo da numerose sezioni (per 130 μ) e lontano pure da qualsiasi altro frammento d'abbozzo d'organo nervoso rimasto. La presenza di due abbozzi lentogeni è qui certamente da riferirsi alla rottura del primitivo abbozzo, che, come ho già notato, operando nella seconda metà di neurula è difficile non ledere. Spemann ha dato simile

(1) N. DRAGOMIROW, «Roux Arch. f. Entw. Mech.», vol. 116, 1929.

(2) BALINSKY, «Roux, Arch. f. Entw. Mech.», vol. 122, 1930.

interpretazione per spiegare la presenza di due vescicole lentogene, in alcuni suoi casi.

Queste esperienze rendono assai probabile che l'abbozzo lentogeno di "Rana esculenta" già determinato non abbia bisogno, per estrinsecarsi, della presenza di abbozzi di organi nervosi o di senso

3) Esperienze sul successivo sviluppo del cristallino di *Rana esculenta*.

Spemann ha notato che l'abbozzo lentogeno può giungere fino allo stadio di un cristallino ben differenziato in fibre e capsula, quando l'abbozzo retinico venga tolto allo stadio di neurula. Io confermo questo risultato, sono anzi giunto fino alla scomparsa dei nuclei nella parte centrale del cristallino. In due casi ho notato segni che depongono nettamente per una trasparenza del cristallino. Non ho però ancora indagato fino a che stadio giungano questi cristallini, e se poi si distruggano.

Ho inoltre iniziato, in larve di *Rana esculenta*, ricerche tendenti a studiare il comportamento del cristallino quando venga impiantato nel cavo orbitario. Riservandomi di trattare più ampiamente questo argomento, mi limito per ora ad osservare di aver notato anzitutto che il cristallino non prosegue, almeno in modo evidente, nello sviluppo; e che inoltre soggiace poi a processi degenerativi, sulle cui modalità e sulla cui natura non ho ancora potuto trarre sicure deduzioni. Questi processi ricordano risultati analoghi conseguiti da Lewis e da Le Cron in *Amblystoma punctatum*; da Fischel in *Salamandra maculosa*, da Kruger in *Triton alpestris*.

Per quanto riguarda la cornea (e, precisamente, il suo strato esterno), noto che in queste esperienze d'impianto auto od omoplastico del cristallino, essa si è mantenuta trasparente per moltissimi giorni (in un caso operato in giugno, per 32 giorni) e solo successivamente appaiono i cromatofori. Se in ciò vi abbia importanza la presenza del cristallino, non posso dire con esattezza. Parrebbe anzi di no, perchè in alcuni casi in cui ho tolto la vescicola ottica insieme col cristallino, lasciando *in situ* lo strato esterno della cornea, questa si è similmente mantenuta trasparente per moltissimi giorni. Ricordo che Lewis, in *Amblystoma punctatum*, ha notato che in assenza dell'occhio, la cornea si mantiene per vario tempo trasparente, e poi compaiono i cromatofori.

Conclusioni.

1°) Anche in *Rana esculenta* per la determinazione dell'abbozzo lentogeno è indispensabile la presenza dell'abbozzo retinico; e questa determinazione diviene stabile all'inizio dello stadio di seconda metà di neurula.

2°) È assai probabile che l'abbozzo lentogeno, avvenuta la suddetta determinazione, non abbia bisogno dell'influenza di abbozzi di organi nervosi e di senso per svilupparsi in cristallino ben differenziato in capsula e fibre.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 2 febbraio 1936 Anno (XIV)

Presidenza del prof. F. MILLOSEVICH.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Su una proposizione fondamentale dell'Analisi matematica.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. L. TONELLI.

1 — Intendo riferirmi alla seguente proposizione, che enuncerò, per brevità, per gli insiemi di punti lineari, pur essendo noto che essa vale per gli insiemi di punti di uno spazio ad un numero qualsiasi (finito ⁽²⁾) di dimensioni:

PROPOSIZIONE A. — *Sia G un insieme limitato e chiuso di punti di una retta r e si supponga che, per ogni punto P di G , sia dato almeno un segmento I_P , della retta r , contenente P come punto interno. Nella totalità di tutti i segmenti I_P , relativi a tutti i punti di G , si può allora scegliere un numero finito di segmenti $I', I'', \dots, I^{(n)}$, in modo che ogni punto di G risulti interno ad almeno uno di questi segmenti.*

Questo teorema, dato per la prima volta e in altro modo da S. Pinner, fu ritrovato poi, in forma più particolare, da E. Borel e successivamente esteso da H. Lebesgue, F. Riesz, G. Vitali, W. H. Young; ed è ora di uso corrente nell'Analisi matematica. La sua grande importanza induce a ritenere che non sia privo di interesse il completarlo in modo da mettere in evidenza un'altra proprietà dell'insieme di tutti i segmenti I_P in esso considerati. È quanto farò in questa Nota provando un teorema (che chiamerò

(1) Presentata nella seduta del 2 febbraio 1936.

(2) La medesima proposizione può anche estendersi agli spazi a infinite dimensioni, purché, naturalmente, siano osservate certe cautele.

proposizione B) il quale, affermando più di quello che è contenuto nella proposizione A, si presta a maggiori applicazioni.

2. — PROPOSIZIONE B. — Sia G un insieme limitato e chiuso di punti di una retta r e si supponga che, per ogni punto P di G , sia dato almeno un segmento I_P , della r , contenente P come punto interno. Fissato ad arbitrio un numero $\lambda > 0$, si possono allora determinare dei segmenti della retta r , in numero finito, s_1, s_2, \dots, s_n (non necessariamente uguali), a due a due senza punti interni comuni, tutti di lunghezza minore di λ , e contenenti tutti i punti di G , in modo che, in ciascuno di questi s_k ($k = 1, 2, \dots, n$) esista almeno un punto P_k di G per il quale uno almeno dei dati intervalli I_{P_k} (relativi a P_k) contenga nel suo interno tutto s_k .

Per dimostrare quanto qui è affermato, consideriamo un segmento AB della retta r il quale contenga nel suo interno tutti i punti dell'insieme G che, per ipotesi, è limitato; e indichiamo con m il più piccolo numero intero positivo tale che la lunghezza della parte *mesima* di AB risulti minore del numero fissato λ . Ciò posto, dividiamo AB in m parti uguali e indichiamo con S_m il gruppo di quelle fra queste parti in ciascuna delle quali esiste almeno un punto P appartenente a G e tale che almeno uno dei dati intervalli I_P , relativi a P , contenga nel suo interno tutta la parte considerata. Indichiamo poi con S'_m il gruppo di quelle fra le parti rimanenti che contengono (anche soltanto come estremo) almeno un punto di G .

Suddividiamo ogni segmento di S'_m in due parti uguali e indichiamo con S_{m+1} il gruppo di quelle fra queste parti in ciascuna delle quali esiste almeno un punto P appartenente a G e tale che uno almeno dei dati intervalli I_P , relativi a P , contenga nel suo interno tutta la parte considerata.

Indichiamo poi con S'_{m+1} il gruppo di quelle fra le parti che restano nei segmenti di S'_m le quali contengono (anche soltanto come estremo) almeno un punto di G .

Suddividiamo ogni segmento di S'_{m+1} in due parti uguali, e così via finchè è possibile.

Mostriamo che, per un certo intero, positivo o nullo, μ , $S'_{m+\mu}$ non contiene alcun segmento.

Supponiamo, infatti, il contrario. Allora i gruppi $S'_{m+\mu}$ esisteranno per per tutti i valori interi e positivi di μ . Ognuno di questi gruppi è costituito da un numero finito di segmenti; e l'ampiezza di ciascun segmento tende a zero al crescere indefinito di μ . Inoltre, i segmenti di $S'_{m+\mu+1}$ sono tutti contenuti in quelli di $S'_{m+\mu}$.

Fissato un ordine sulla retta r , sia $A_{m+\mu}$ il primo punto di r appartenente ai segmenti di $S'_{m+\mu}$. Con ciò $A_{m+\mu+1}$ o coincide con $A_{m+\mu}$ oppure segue questo punto; e pertanto $A_{m+\mu}$ tende ad un limite A_∞ . Questo A_∞ deve appartenere ad almeno un segmento di $S'_{m+\mu}$, qualunque sia μ (perchè, se fosse esterno a tutti i segmenti di $S'_{m+\mu}$, tali sarebbero pure tutti i punti

$A_{m+\mu}$, per μ sufficientemente grande, mentre tutti questi punti per $\mu \geq \bar{\mu}$ appartengono a segmenti di $S'_{m+\bar{\mu}}$; e siccome l'ampiezza dei segmenti di $S'_{m+\mu}$ tende a zero per $\mu \rightarrow \infty$, ed in ognuno di questi segmenti esiste almeno un punto dell'insieme G , che è chiuso, A_∞ appartiene a G . Consideriamo perciò uno dei dati segmenti I_{A_∞} , relativi a A_∞ . Essendo A_∞ interno a I_{A_∞} , i segmenti del gruppo $S'_{m+\mu}$ che contengono A_∞ risultano per μ sufficientemente grande, interni a I_{A_∞} . E questo è impossibile, perchè, se così fosse, i segmenti indicati di $S'_{m+\mu}$ dovrebbero appartenere a $S_{m+\mu}$ e non a $S'_{m+\mu}$.

È dunque provato che, per un valore di μ , $\mu_0 (\geq 0)$ $S'_{m+\mu_0}$ non contiene alcun segmento.

Se allora consideriamo tutti i segmenti che costituiscono $S_m, S_{m+1}, \dots, S_{m+\mu_0}$ e li indichiamo con s_1, s_2, \dots, s_n , il noto teorema risulta dimostrato.

3. - È evidente che la *proposizione* B contiene in sé anche la *proposizione* A. È pure evidente che il ragionamento fatto al n. 2 si estende immediatamente agli insiemi G di uno spazio Σ_v ad un numero finito qualunque v di dimensioni ⁽¹⁾. Abbiamo così una proposizione generale, per enunciare la quale premetteremo due definizioni.

Dato un insieme \mathfrak{I} di punti di uno spazio Σ_v , diremo che un punto P di Σ_v , è *punto interno* dell'insieme \mathfrak{I} se appartiene a \mathfrak{I} e se esiste un $\rho > 0$ tale che tutti i punti di Σ_v distanti da P non più di ρ appartengano a \mathfrak{I} .

Chiameremo poi *cubo a v dimensioni* dello spazio Σ_v , e di lato di lunghezza l , l'insieme di tutti i punti di Σ_v che, in un riferimento di tale spazio ad un sistema cartesiano ortogonale (x_1, x_2, \dots, x_v) , hanno coordinate soddisfacenti alle disuguaglianze

$$a_1 \leq x_1 \leq a_1 + l, \quad a_2 \leq x_2 \leq a_2 + l, \dots, a_v \leq x_v \leq a_v + l.$$

Premesso ciò, abbiamo senz'altro:

Sia G un insieme limitato e chiuso di punti di uno spazio Σ_v (a v dimensioni, con v numero finito) e si supponga che, per ogni punto P di G , sia dato almeno un insieme \mathfrak{I}_P , di punti di Σ_v , contenente P come punto interno. Fissato ad arbitrio un numero $\lambda > 0$, si possono allora determinare dei cubi a v dimensioni dello spazio Σ_v , in numero finito, c_1, c_2, \dots, c_n (non necessariamente uguali), a due a due senza punti interni comuni, tutti di lato minore di λ , e contenenti tutti i punti di G , in modo che, in ciascuno di questi c_k ($k = 1, 2, \dots, n$), esista almeno un punto P_k di G per il quale uno almeno dei dati insiemi \mathfrak{I}_{P^k} (relativi a P_k) contenga come punti interni tutti i punti di c_k .

(1) In questa estensione, A_∞ sarà uno qualunque dei punti di accumulazione della successione $A_m, A_{m+1}, A_{m+2}, \dots$.

4. - Per dare un'idea della utilità della proposizione generale precedente, accenneremo alla sua applicazione alla dimostrazione di un teorema fondamentale per le funzioni monogene di una variabile complessa.

Nel piano π della variabile complessa z si abbia una curva C continua, chiusa, rettificabile, priva di punti multipli, e si indichi con Γ il dominio costituito da tutti i punti del piano π che sono interni alla curva C o sulla curva medesima (dominio che risulta semplicemente connesso). Detto Γ' un altro dominio del piano π che contenga come punti interni tutti i punti di Γ , sia $f(z)$ una funzione ad un valore definita in Γ' , la quale risulti, in ogni punto di Γ , continua e con derivata $f'(z)$ finita ⁽¹⁾.

Secondo il teorema integrale di Cauchy, si ha

$$\int_C f(z) dz = 0$$

e la validità di questa uguaglianza nelle semplici ipotesi riportate fu mostrata per la prima volta da E. Goursat. La dimostrazione datane dal Goursat ⁽²⁾ si fonda sulla possibilità di decomporre Γ in un numero finito di parti in ciascuna delle quali esista un z' tale che, per ogni altro z della parte stessa, sia

$$(1) \quad \left| \frac{f(z) - f(z')}{z - z'} - f'(z') \right| < \epsilon,$$

essendo ϵ un numero positivo arbitrariamente prefissato; intendendo che ogni parte risulti costituita da punti di Γ che, insieme eventualmente ad altri punti non appartenenti a Γ , formino un quadrato a lati paralleli agli assi reale e immaginario, con la condizione che i quadrati così risultanti da due parti distinte non abbiano punti interni comuni.

Ora la possibilità della decomposizione indicata risulta immediatamente dalla proposizione generale del n. 3. Basta, infatti, assumere in tale proposizione il dominio Γ come insieme G , il piano π come spazio Σ_v e i cerchi di π di centro P e raggio minore di un certo ρ_P come insiemì \mathfrak{P}_P , intendendo che, se z' è il valore di z corrispondente a P , ρ_P sia il limite superiore dei raggi dei cerchi di π di centro P in tutti i punti z dei quali (con $z = z'$) vale la disuguaglianza (1).

(1) Utilizzando l'enunciato del n. 5 invece di quello del n. 3, si può supporre, per quello che segue, che la $f(z)$ sia definita soltanto in Γ e non anche in Γ' . In questo caso, si intenderà per $f'(z)$, in un punto z di Γ , il limite del rapporto $\frac{f(z+h) - f(z)}{h}$, al tendere di h allo zero in modo che $z+h$ appartenga sempre a Γ .

(2) Cfr. E. GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique*, to. II, 1904, pp. 82-86.

5. — Introducendo la nozione di *punto interno di un insieme relativamente ad un altro insieme*, possiamo dare all'enunciato del n. 3 una forma più generale.

Dati due insiemi \mathfrak{I}_0 e \mathfrak{I}_1 dello spazio Σ_v , il secondo dei quali sia costituito tutto di punti appartenenti anche al primo, diremo che un punto P di Σ_v è *interno a \mathfrak{I}_1 relativamente all'insieme \mathfrak{I}_0* se appartiene a \mathfrak{I}_1 e se esiste un $\rho > 0$ tale che tutti i punti di \mathfrak{I}_0 distanti da P non più di ρ appartengano a \mathfrak{I}_1 . Con questa definizione, il teorema del n. 3 si generalizza nella forma seguente:

Sia Δ un insieme di punti di uno spazio Σ_v (a v dimensioni, con v numero finito). Sia poi G un insieme limitato e chiuso di punti di Δ e si supponga che, per ogni punto P di G sia dato almeno un insieme \mathfrak{I}_P di punti di Δ con la condizione che P risulti interno ad esso relativamente all'insieme Δ . Fissato ad arbitrio un numero $\lambda > 0$, si possono allora determinare dei cubi a v dimensioni dello spazio Σ_v , in numero finito, c_1, c_2, \dots, c_n (non necessariamente uguali), a due a due senza punti interni comuni, tutti di lato minore di λ , e contenenti tutti i punti di G , in modo che, in ciascuno di questi c_k ($k = 1, 2, \dots, n$), esista almeno un punto P_k di G per il quale uno almeno dei dati insiemi \mathfrak{I}_{P_k} (relativi a P_k) contenga come punti interni, relativamente all'insieme Δ , tutti i punti di Δ (e in particolare quelli di G) appartenenti a c_k .

Si osservi che, in questo enunciato, l'insieme Δ può essere identico all'insieme G .

Astronomia (Meccanica Celeste). — *L'eccentricità dei sistemi binari nel caso di masse variabili col tempo.* Nota ⁽¹⁾ del Socio G. ARMELLINI.

1. È noto che nei sistemi binari stellari con massa variabile, l'eccentricità osculatrice varia col tempo in funzione della massa del sistema, ed in proposito, io ho già dato alcuni teoremi ⁽²⁾ riguardanti il caso particolare in cui la massa tende ad annullarsi per trasformazione della materia in energia.

Ma, fin ad ora, nessuno aveva dato un'equazione generale che collegasse direttamente ed unicamente l'eccentricità, e le sue derivate, col tempo. Nel presente lavoro ho risoluto questo problema ed ho trovato che tale equazione è differenziale del secondo ordine, con coefficienti funzioni del tempo ed immediatamente calcolabili quando si conosca la legge con cui varia la massa m del sistema in funzione del tempo t .

(1) Presentata nella seduta del 2 febbraio 1936.

(2) Cfr. ARMELLINI, *Alcuni teoremi sul problema dei due corpi di masse decrescenti.* « Rendiconti Lincei », 1932, sem. II, fasc. 2.

Come si vedrà, l'equazione a cui giungo è notevolmente complicata e può essere ridotta alle quadrature solo in casi particolari. Ma essa ha una particolarità interessantissima e cioè permette di studiare facilmente quei sistemi binari in cui l'orbita osculatrice ha la forma di un'ellisse *molto schiacciata*. E ciò appare doppiamente importante, sia perchè tali sistemi erano *sempre sfuggiti* alle ricerche dei matematici per la loro difficoltà (come è notissimo, Poincaré, Jeans, ecc. hanno studiato le variazioni di massa soltanto nel caso di orbite prossime al cerchio), sia perchè effettivamente nei sistemi stellari binari le orbite molto schiacciate sono assai frequenti ed anzi assai più comuni delle orbite prossime al cerchio.

Premesse queste osservazioni, entriamo senza altro in argomento.

2. Indichiamo con m la massa di un sistema binario, composto di due astri che si attirano con la legge di Newton e supponiamo che m vari secondo una funzione nota del tempo: $m = m(t)$. Siano poi e, v, ω , l'eccentricità istantanea, l'anomalia vera e la posizione del perielio dell'ellisse osculatrice alla traiettoria descritta da uno dei due astri intorno all'altro: ellisse che ha per equazione

$$(1) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

dove si ha per definizione:

$$(2) \quad v = \vartheta - \omega$$

essendo ϑ l'anomalia dell'astro contata da una direzione fissa qualsiasi. Ovviamente, se la massa è variabile, il parametro p varia in funzione del tempo secondo la nota formola:

$$(3) \quad c^2 = pm$$

dove c indica la costante delle aree e dove, per semplicità, abbiamo scelto il coefficiente attrattivo eguale all'unità. Inoltre, in questo caso, gli elementi osculatori e ed ω variano anche essi in funzione del tempo; e precisamente, ponendo

$$(4) \quad E = em$$

io ho dimostrato in proposito le due equazioni ⁽¹⁾

$$(5) \quad \frac{dE}{dt} = -\cos v \frac{dm}{dt}$$

(1) Cfr. ARMELLINI, *Sopra la variazione dell'eccentricità nel problema di due corpi di masse variabili*. « Rendiconti Lincei », 1926, sem. I, fasc. 10. Notiamo che, nel lavoro indicato, io ho dimostrato queste equazioni scegliendo le unità di misura in modo da avere $c = 1$; ma esse restano invariate qualunque sia c ,

$$(6) \quad E \frac{d\omega}{dt} = - \operatorname{sen} v \frac{dm}{dt},$$

da cui si ricava immediatamente:

$$(7) \quad \left(\frac{dE}{dt} \right)^2 + E^2 \left(\frac{d\omega}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dm}{dt} \right)^2.$$

3. Ciò posto, derivando la (5) rispetto al tempo ed indicando per semplicità di notazione le derivate con apici, abbiamo subito:

$$(8) \quad E'' - m' v' \operatorname{sen} v + m'' \cos v = 0.$$

D'altra parte, la (2) e la (6) ci danno:

$$(9) \quad v' = \mathfrak{V}' - \omega' = \mathfrak{V}' + \frac{m' \operatorname{sen} v}{E}.$$

Inoltre, dalla legge delle aree abbiamo;

$$(10) \quad r^2 \mathfrak{V}' = c$$

e cioè, per la (1) e la (3):

$$(11) \quad \mathfrak{V}' = \frac{c}{p^2} (1 + e \cos v)^2 = \frac{m^2}{c^3} (1 + e \cos v)^2$$

onde la (9) diviene:

$$(12) \quad v' = \frac{m^2}{c^2} (1 + e \cos v)^2 + \frac{m' \operatorname{sen} v}{E}.$$

Sostituendo questo valore di v' in (8), abbiamo con facili riduzioni:

$$(13) \quad E'' - \frac{(m + E \cos v)^2}{c^3} m' \operatorname{sen} v - \frac{1 - \cos^2 v}{E} m'^2 + m'' \cos v = 0$$

dalla quale, eliminando $\cos v$ per mezzo della (5), otteniamo:

$$(14) \quad E'' - \frac{1}{c^3} \left[m - \frac{EE'}{m'} \right]^2 m' \operatorname{sen} v - \frac{m'^2}{E} \left[1 - \frac{E'^2}{m'^2} \right] - \frac{E' m''}{m'} = 0$$

e cioè:

$$(15) \quad m' \operatorname{sen} v = c^3 \frac{m'^2 EE'' - m'^4 + E'^2 m'^2 - EE' m' m''}{E (mm' - EE')^2}.$$

Quadrando ora la (15) e la (5) e sommando si ha infine:

$$(16) \quad E^2 (mm' - EE')^4 (E'^2 - m'^2) + \\ + c^6 m'^2 [(EE'' + E'^2 - m'^2) m' - EE' m'']^2 = 0$$

che è appunto l'equazione a cui volevamo giungere.

4. Come è facile vedere, la (16), è un'equazione differenziale del secondo ordine contenente soltanto l'incognita E e le sue derivate, mentre i coefficienti sono funzioni note del tempo, che si calcolano immediatamente appena data m in funzione di t . Ovviamente la (16) non è generalmente riducibile alle quadrature, ma dal suo esame possono ricavarsi proprietà interessanti come ci proponiamo di mostrare in Note successive. Per ora ci limitiamo ad alcune osservazioni.

5. Supponiamo, p. es., che l'eccentricità e si mantenga costante ed eguale p. es. a k . Avremo allora

$$(17) \quad E = km.$$

In particolare, se $k = 0$, si ha anche $E = 0$ e la (16) dà immediatamente $m' = 0$, ciò che del resto risultava anche dalla (7). In conseguenza, l'unico caso in cui l'eccentricità osculatrice può essere sempre eguale a zero, si ha quando la massa del sistema si conserva costante.

Supponiamo ora k positivo ($k < 1$) e diverso da zero. Sostituendo nella (16) si ha con pochi calcoli

$$(17) \quad k(1 - k^2)^{3/2} m^3 = c^3 m'$$

e quindi integrando, otteniamo:

$$(18) \quad m = \frac{1}{\sqrt{\alpha t + \beta}} \quad (\alpha = \text{cost} ; \beta = \text{cost})$$

vale a dire si ritrova il caso del Mestschersky, che è quindi l'unico in cui l'eccentricità osculatrice possa mantenersi costante, in accordo con quanto io stesso dimostrai⁽¹⁾ in altra occasione.

6. Osserviamo ora che la (16) ammette in ogni caso la soluzione particolare

$$(19) \quad E = m$$

corrispondente ad e costantemente eguale all'unità. Per vederne meglio il significato, notiamo che in tal caso, la (5) dà $\cos v = -1$ e quindi la (6) dà $\sin v = 0$, donde risulta $\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} = 0$. La (9) dà allora $\vartheta' = 0$ e quindi dalla (10) risulta che c si annulla; vale a dire, in questo caso il moto è rettilineo od - in altre parole - la conica osculatrice è un'ellisse infinitamente schiacciata.

(1) Cfr. ARMELLINI, Nota cit., in «Rendiconti Lincei», 1926.

Questa osservazione suggerisce la possibilità di studiare il movimento, nel caso che l'eccentricità osculatrice si conservi sempre molto prossima all'unità: caso che è precisamente quello più interessante per i sistemi stellari binari e che matematicamente si riduce ora allo studio di soluzioni prossime ad una soluzione particolare data. Basta, infatti, a tal fine, porre nella (16):

$$(20) \quad E = m - \varepsilon k(t)$$

dove ε è una costante estremamente piccola. Deve tenersi conto però che, in tal caso, anche la costante delle aree c risulta molto piccola e precisamente — come indica la (3) — c^2 risulta dell'ordine di grandezza di ε .

Per mancanza di spazio, ci limitiamo per ora a questo cenno, proponendoci in altra occasione di riprendere questo problema insieme nuovo ed interessante.

7. Terminando, notiamo che la (16) può porsi sotto forma più semplice ponendo:

$$(21) \quad E^2 = 2x$$

dove si ha subito:

$$(22) \quad EE' = x' \quad E'^2 + EE'' = x''$$

onde l'equazione si trasforma immediatamente in:

$$(23) \quad (mm' - x')^4 (x'^2 - 2xm'^2) + c^6 m'^2 [x''m' - x'm'' - m'^3]^2 = 0$$

od anche

$$(24) \quad \left(m - \frac{x'}{m'}\right)^4 \left(\frac{x'^2}{m'^2} - 2x\right) = -c^6 \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{x'}{m'} - m\right)\right]^2$$

e cioè:

$$(25) \quad c^3 \frac{\frac{d}{dt} \left[m - \frac{x'}{m'}\right]}{\left(m - \frac{x'}{m'}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{x'}{m'}\right)^2 - 2x}$$

che può anche scriversi sotto la forma:

$$(26) \quad c^3 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m - \frac{x'}{m'}} \right) + \sqrt{\left(\frac{x'}{m'}\right)^2 - 2x} = 0.$$

Dalla (26) otteniamo poi facilmente, ponendo $2x = E^2 = e^2 m^2$:

$$(27) \quad c^3 \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{m(1 - e^2) - e \frac{e'}{m' m^2}} \right] + em \sqrt{\left(m \frac{e'}{m'} + e\right)^2 - 1} = 0.$$

7. Possiamo anche prendere come variabile indipendente la m invece del tempo t . A tal fine notiamo che, conoscendo $m = m(t)$, derivando ed eliminando il tempo tra $m(t)$ ed $m'(t)$, si ha:

$$(28) \quad m' = \varphi(m)$$

dove φ può quindi riguardarsi come una funzione conosciuta.

Ora, per teoremi elementari di calcolo, abbiamo:

$$(29) \quad \frac{e'}{m'} = \frac{de}{dm} \quad ; \quad \frac{d}{dt} = \varphi(m) \frac{d}{dm}$$

onde la (27) diviene subito:

$$(30) \quad c^3 \varphi(m) \frac{d}{dm} \left[\frac{1}{m(1-e^2) - em^2 \frac{de}{dm}} \right] + \\ + em \sqrt{\left(m \frac{de}{dm} + e \right)^2 - 1} = 0.$$

Prendendo invece, in luogo di e , l'antica incognita $E = em$, la (16) si riduce a:

$$(31) \quad c^3 \varphi(m) \frac{d}{dm} \left[\frac{1}{m - E \left(\frac{dE}{dm} \right)} \right] + E \sqrt{\left(\frac{dE}{dm} \right)^2 - 1} = 0.$$

Analogamente la (26) si trasforma nell'equazione ancora più semplice:

$$(32) \quad c^3 \varphi(m) \frac{d}{dm} \left[\frac{1}{m - \frac{dx}{dm}} \right] + \sqrt{\left(\frac{dx}{dm} \right)^2 - 2x} = 0.$$

Fisica. — *A proposito delle induttività elettrica e magnetica.*
Nota⁽¹⁾ del Corrisp. G. GIORGI.

Alla Nota, densa di dottrina, che il prof. Puccianti ha pubblicato⁽²⁾ sull'argomento delle induttività prese in relazione all'introduzione dei sistemi a quattro unità fondamentali, desidero far seguire qualche commento.

La questione principale sollevata dal Puccianti è, se le grandezze denotate con ϵ_0 , μ_0 , nello spazio vuoto, siano da riconoscere come grandezze fisiche, e se abbiano il carattere di proprietà specifiche dello spazio vuoto stesso; e quale nomenclatura convenga adottare in conseguenza.

Non dimentichiamo che, nel dare una risposta, deve essere fatta distinzione tra la fisica macroscopica e quella atomica. La prima, di fronte alla critica del fisico, è un risultato di medie fatte sulle equazioni e sui valori che emergono dalla seconda. Ma non per questo si deve trascurarla: anzi tutto è quella che descrive la fenomenologia interessante la vita corrente e e la tecnica; e d'altra parte, quella che ora noi chiamiamo fisica atomica è forse a sua volta un risultato di altre medie e di conguagli, fatti sopra qualche fisica più approfondita, che l'avvenire deve rivelarci.

Nello studio della fenomenologia macroscopica, la schematizzazione faradayana rende ancora utili servigi; in questo indirizzo lo spazio libero e i corpi materiali si trattano in prima approssimazione alla stessa stregua, come se fossero dei mezzi che differiscono pel diverso valore di certi parametri. Questi parametri, secondo le convenzioni, si possono riguardare come dimensionati o no; e siamo tutti d'accordo che conviene riguardarli come dimensionati, non come numeri puri.

Più grave è la questione nell'ambito della fisica atomica; ed è in questo ambito che il prof. Puccianti ha inteso discutere. Non vi è dubbio che per la fisica atomica vi è un solo ambiente attraverso cui si trasmettono le azioni elettromagnetiche; e questo è lo spazio vuoto di materia ponderabile: attraverso di esso si muovono e reagiscono i granuli elettrici attivi, elettroni, positroni, protoni, o altri; e dobbiamo lasciare alle speculazioni dell'avvenire il decidere se altri mezzi si troveranno nell'interno dei corpuscoli elementari.

Ora tale spazio libero, fino a che punto è da riguardare come un mezzo fisico? Vi sono state teorie come quella del Ritz che negavano del tutto tale carattere; e la metrologia di Gauss-Hertz, nella quale non figuravano costanti

(1) Presentata nella seduta del 2 febbraio 1936.

(2) L. PUCCIANI, *Chiarimenti sulla induttività elettrica e magnetica, in rapporto alla nuova metrologia elettrica*. Questi «Rendiconti», vol. XXI (1935), pp. 733-739.

specifiche locali, riesce adatta particolarmente per esprimere questo punto di vista. Ve ne sono state altre, come appunto quella di Faraday-Maxwell, che facendo uso del vocabolo *etere*, alludevano a un ambiente con caratteristiche materiali.

Il punto di vista del prof. Puccianti si avvicinerebbe molto alle teorie del primo tipo. Ma io direi che le nostre conoscenze attuali si possono riassumere con asserzioni intermedie. Mi sia lecito qui precisare gli enunciati, perchè troppo spesso si ripetono asserzioni in termini equivoci.

Noi tutti ammettiamo che nello spazio vuoto può immagazzinarsi energia, sotto forma elettrica e sotto forma magnetica. Fino a quando si conoscevano solo i fenomeni statici e quasi statici, si poteva ancora chiudere gli occhi a certi ragionamenti di Maxwell che non erano probanti in modo decisivo, e riguardare le energie elettromagnetiche come localizzate nei corpuscoli anzichè nel campo. Ma nei fenomeni di radiazione, abbiamo energie di campi in plaghe lontane dalla materia; non si può negare questo, quando si tratta di onde elettromagnetiche (e in particolare, luminose) le quali si siano distaccate dai corpi emittenti. Dunque è certo che la localizzazione energetica avviene nei campi, cioè nello spazio libero. Per sfuggire a questa conclusione ultima, dovremmo rinunciare come Ritz al principio di conservazione dell'energia, o formare teorie secondo cui l'energia delle radiazioni elettromagnetiche venisse attribuita agli sciami dei fotoni, o al campo esso stesso come dotato di materialità autonoma, o altra cosa simile. Non siamo preparati attualmente a costruire schemi secondo queste visioni.

Pensando poi alla teoria di relatività, ricordiamo che se lo spazio vuoto non è atto a costituire riferimento per le velocità, può invece costituire riferimento per le accelerazioni. Vi sono bensì in ogni punto-istante del cronotopo infiniti sistemi inerziali, ma il loro insieme è circoscritto; cioè non ogni sistema è inerziale; il complesso delle piattaforme inerziali appartenenti a un singolo punto-istante costituisce un carattere meccanico locale dello spazio vuoto.

Quindi, siamo condotti a riassumere le nostre conoscenze, asserendo che lo spazio libero da materia ponderabile possiede *alcuni* degli attributi della materia. Non è l'etere materiale dei fisici antichi, non è nemmeno uno spazio puramente matematico. È invece l'etere astratto che Einstein nella sua conferenza del 1920 definiva come «l'insieme di tutte quelle proprietà che sussistono in assenza della materia». Opportunamente, a mio avviso, i fisici moderni hanno introdotto la denominazione di *spazio-etere* o *spazio fisico*.

Quali sono le proprietà dello spazio-etere che interessano l'elettromagnetismo? Sono due, traducibili in due valori ben caratterizzati, e misurabili con esperienze fisiche; e questi due valori possono additarsi sotto forma di tante coppie diverse, funzioni l'una dell'altra ⁽¹⁾. Una di queste coppie è

(1) V. la mia comunicazione: *Proprietà elettrotecniche dello spazio vuoto*, negli «Atti della Riunione dell'A. E. I. a Sorrento», 1933. I valori più aggiornati di ϵ_0 , μ_0 , c , R_0 ,

formata da ϵ_0 , μ_0 ; un'altra, dalla velocità della luce c , e dalla resistenza asintotica o resistenza d'irraggiamento (*Wellenwiderstand*) dello spazio intero, R_0 . Quest'ultima coppia è atta per mettere in evidenza che i due dati fisici sono dimensionati, e implicano una dimensione riconducibile a quelle meccaniche, e un'altra che giova considerare come indipendente. Le due c , R_0 , si definiscono facilmente con un riferimento all'esperienza; in funzione di esse, si ricavano ϵ_0 , μ_0 espresse così

$$(1) \quad \epsilon_0 = \frac{1}{R_0 c} \quad ; \quad \mu_0 = \frac{R_0}{c}.$$

Il significato fisico di ϵ_0 , μ_0 , si apprezza però meglio se queste due grandezze si definiscono direttamente, quali misura dell'attitudine che lo spazio-etero ha a caricarsi d'energia, quando è sollecitato da un campo di forza elettrica E , o da un campo di forza magnetica H , rispettivamente; precisamente, indicate con W_e , W_m le due energie per unità di volume, valgono le formole

$$(2) \quad W_e = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \quad ; \quad W_m = \mu_0 \frac{H^2}{2}.$$

da cui si ricavano i due valori in questione.

Il prof. Puccianti perviene alla medesima conclusione, di dover considerare ϵ_0 , μ_0 quali grandezze dimensionate; vi perviene per altri ragionamenti, che hanno molto valore, ma attraverso i quali non risulta per ϵ_0 , μ_0 il carattere di proprietà specifiche e locali del mezzo ambiente. Quindi egli preferisce riguardarle come costanti universali.

Sembra a me che nello stato attuale della scienza sia preferibile attenersi all'altra alternativa, che è messa in evidenza dalle equazioni (1) e non dalle (2). Il criterio discriminante più decisivo viene dal riflettere che tanto ϵ_0 quanto μ_0 possono essere variabili da punto a punto. In quelle plaghe dello spazio che Einstein chiama « galileiane », tutto è uniforme: ma nelle regioni dove lo spazio possiede curvature e torsioni, e dove entra in gioco la teoria di relatività seconda forma o terza forma, i parametri caratteristici dello spazio fisico sono funzioni del posto e del tempo; e questo aveva messo in evidenza anche Einstein sin dalla sua conferenza del 1920 già ricordata: in quelle plaghe, il principio d'equivalenza delle varie piattaforme inerziali fra loro incontra anche limitazioni, di guisa che le proprietà dello spazio-etero si avvicinano per qualche riguardo a quelle della materia. Quindi anche gli argomenti relativistici, di cui il prof. Puccianti tiene giustamente gran conto, conducono a localizzare i valori di ϵ_0 , μ_0 anzichè farli riguardare come costanti assolute. Mi sia lecito aggiungere che da uno scambio d'idee avuto

si troveranno nel mio articolo: *Le unità elettriche*, in « Bollettino Radiotelegrafico del R. Esercito », luglio-ottobre 1934 e gennaio-aprile 1935.

col prof. Sommerfeld ho appreso come l'insigne scienziato tedesco ritenga di poter trovare spiegazione di fatti della fisica elettronica in una teoria secondo cui ϵ_0 , μ_0 avrebbero variazioni di valore in certi punti dello spazio subatomico. E allora anche la fisica dei corpuscoli, nei suoi sviluppi più approfonditi, porterebbe ancora alla stessa conclusione.

Certamente, là dove ϵ_0 , μ_0 variano, lo stesso avviene anche per c , R_0 ; e questa ultima grandezza assume definizione meno semplice: è meglio, in tal caso, fissare l'attenzione sulle prime due grandezze anzichè sulle seconde.

AmMESSO che ϵ_0 , μ_0 esprimono proprietà locali dello spazio-etere, non per questo diminuisce d'importanza e di fondatezza l'osservazione del prof. Puccianti, che ϵ_0 , μ_0 non hanno lo stesso carattere delle ϵ , μ che si studiano nei corpi materiali. Ma questo è proprio uno dei punti in cui si deve far distinzione fra elettrotecnica macroscopica e fisica atomica. Quando si descrive la fenomenologia delle relazioni che cadono sotto i sensi, e i corpi si riguardano come continui, siamo in quel campo dove lo schema faradayano, come abbiamo detto, si applica ancora: un corpo paramagnetico si tratta allora *come se fosse* una plaga in cui il mezzo ha un μ locale diverso dal μ_0 delle regioni esterne: allora, detta $\bar{\mu}$ la permeabilità relativa (numero puro), si ha in $\mu = \bar{\mu} \mu_0$ una grandezza fisicamente omogenea con μ_0 ; ma questa grandezza esprime una proprietà media o risultante di tante azioni interne. Solamente quando si studiano i fatti più intimamente, il corpo continuo e la sua magnetizzazione, e così pure la sua polarizzazione dielettrica, si risolvono nei loro elementi; allora non si fa luogo a parlare di altri ϵ , μ che non siano ϵ_0 , μ_0 ; e la fisica elettronica deve tener conto dell'andamento complicato del campo elettromagnetico che negli spazi inframolecolari o infraatomici varia da punto a punto, fino a che a un certo momento anche lo schema lorentziano non è sufficiente e deve essere sostituito con quelli, più complicati, della meccanica quantistica.

In quanto all'utilità di denotare con un nome speciale e con un simbolo speciale la grandezza $B = \mu_0 H$, e l'analoga elettrica $Q = \epsilon_0 E$, non vedo come questa utilità venga meno. Beninteso, nella fisica atomica (limitata, come prima, allo schema lorentziano) non esistono altri B , Q se non questi $\mu_0 H$, $\epsilon_0 E$. Ma seguendo ancora il pensiero di Lorentz, conveniamo tutti nel ricordare che, quei Q , B veri essendo variabili fortemente da punto a punto nell'interno della materia, conviene per i calcoli macroscopici introdurre in equazione altri Q , B medi, i quali hanno medesime dimensioni fisiche, e presentano interesse perchè i loro flussi attraverso superficie finite coincidono praticamente coi flussi dei Q , B veri. Questi Q , B medi sono quelli di cui si serve l'elettrotecnico.

Mi sia ancora consentita un'osservazione a proposito di nomenclatura. Il prof. Puccianti non vorrebbe denominare induttività, elettrica e magnetica, le ϵ_0 , μ_0 . Ma questo nome di induttività, se non erro, è stato introdotto da Heaviside appunto per denotare la μ_0 e distinguerla dal numero puro $\bar{\mu}$, a

cui riserbava il nome di permeabilità; indi, con la qualifica di « elettrica » distinta da « magnetica » la stessa denominazione fu estesa alla ϵ_0 . Se due grandezze ϵ_0 , μ_0 venissero riguardate come costanti universali, il vocabolo induttività dovrebbe cadere, ma non mai essere applicato per denotare $\bar{\mu}$, $\bar{\epsilon}$. Sarebbe bene che anche nelle scienze fisiche fosse seguita la regola dei naturalisti, che un nome coniato per un certo scopo non debba essere adoperato in un significato del tutto differente.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Trasporti non lineari: geometria di un sistema di equazioni alle derivate parziali del 2° ordine.* — III. *Altri operatori differenziali intrinseci. Le proprietà descrittive del sistema.* Nota di ENEA BORTOLOTTI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. E. BOMPIANI.

6. In questa Nota si conclude l'esposizione riassuntiva di una mia ricerca sui sistemi alle derivate parziali

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = H_{\alpha\beta}^i (u^k, x^j, p_\gamma^l) \quad \left(p_\gamma^l = \frac{\partial x^l}{\partial u^\gamma} \right)$$

$$(i, j, h, k, l, g, f = 1, \dots, n; \alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots = 1, \dots, m; m \leq n)$$

cui ho già dedicato altre due Note recenti ⁽²⁾. A queste rimando sia per le citazioni che pel simbolismo adottato.

Mostrerò anzitutto come si colleghino gli operatori differenziali invarianti introdotti nella Nota II agli altri già utilizzati dagli Autori di precedenti lavori (passati in rassegna nella Nota I). Sia ad es. $A^i(u, x, p)$ un campo di vettori controvarianti. Poniamo

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \bar{D}_\alpha A^i &= \frac{\partial A^i}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial A^i}{\partial x^k} p_\alpha^k + \frac{\partial A^i}{\partial p_\lambda^k} H_{\lambda\alpha}^k - \frac{1}{m+1} \left(\frac{\partial H_{\alpha\beta}^i}{\partial p_\beta^h} - [G_{\alpha\beta}^{\beta} \delta_h^i] \right) A^h \\ &= D_\alpha A^i + D_h A^i \cdot p_\alpha^h + \frac{\partial A^i}{\partial p_\lambda^k} \Omega_{\lambda\alpha}^{i \cdot k} - \frac{1}{m+1} F_{\alpha\beta \cdot h}^{i \cdot \beta} A^h; \end{aligned}$$

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1936.

(2) Ved. le Note I (*Preliminari*) e II (*Le proprietà intrinseche del sistema*) a p. 16 e 104 di questo volume dei « Rendiconti ». Proseguo nella numerazione dei paragrafi e delle formule.

$$(6.2) \quad \overset{C}{D}_k A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \frac{1}{m+1} \left(\frac{\partial H_{\alpha\beta}^i}{\partial p_\beta^k} - [G_{\alpha\beta}^\beta \delta_k^i] \right) \frac{\partial A^i}{\partial p_\alpha^k} + \Gamma_{bk}^i A^b$$

$$= D_k A^i + \frac{1}{m+1} F_{\alpha\beta \cdot k}^{\cdot i \cdot \beta} \frac{\partial A^i}{\partial p_\alpha^k};$$

$$(6.3) \quad \overset{C}{d} p_\alpha^i = dp_\alpha^i - H_{\alpha\beta}^i du^\beta - \frac{1}{m+1} \left(\frac{\partial H_{\alpha\beta}^i}{\partial p_\beta^h} - [G_{\alpha\beta}^\beta \delta_h^i] \right) (dx^h - p_\gamma^h du^\gamma)$$

$$= \bar{d} p_\alpha^i - \Omega_{\alpha\beta}^{\cdot i \cdot \beta} du^\beta - \frac{1}{m+1} F_{\alpha\beta \cdot h}^{\cdot i \cdot \beta} (dx^h - p_\gamma^h du^\gamma);$$

$$(6.4) \quad \overset{C}{d} A^i = \overset{C}{D}_\alpha A^i \cdot du^\alpha + \overset{C}{D}_k A^i (dx^k - p_\alpha^k du^\alpha) + \frac{\partial A^i}{\partial p_\alpha^k} \overset{C}{d} p_\alpha^k$$

$$= \bar{d} A^i - \frac{1}{m+1} F_{\alpha\beta \cdot h}^{\cdot i \cdot \beta} A^h du^\alpha;$$

poi per un campo di vettori $A^i(x, p)$

$$(6.5) \quad \overset{C}{d} A^i = \overset{C}{D}_k A^i \cdot dx^k + \frac{\partial A^i}{\partial p_\alpha^j} \left\{ dp_\alpha^j - [G_{\alpha\beta}^\gamma p_\gamma^i du^\beta] - \frac{1}{m+1} \left(\frac{\partial H_{\alpha\beta}^i}{\partial p_\beta^k} - [G_{\alpha\beta}^\beta \delta_k^i] \right) dx^k \right\}$$

$$= D_k A^i \cdot dx^k + \frac{\partial A^i}{\partial p_\alpha^j} \bar{d} p_\alpha^j;$$

infine per $A^i(x)$:

$$(6.6) \quad \overset{K}{D}_\alpha A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} p_\alpha^j - \frac{1}{m+1} \left(\frac{\partial H_{\alpha\beta}^i}{\partial p_\beta^k} - [G_{\alpha\beta}^\beta \delta_k^i] \right) A^k$$

$$= D_j A^i \cdot p_\alpha^j - \frac{1}{m+1} F_{\alpha\beta \cdot k}^{\cdot i \cdot \beta} A^k.$$

Degli enti ora introdotti, come appare il legame con gli operatori da noi adottati, così risulta manifesto anche il carattere *tensoriale*. L'estensione a vettori covarianti o a tensori comunque (a indici della serie $ijk \dots$) risulterebbe agevole.

Supponiamo ora che le trasformazioni (1.3) sulle u^k si riducano alle (1.6) *lineari*: il che equivale a prendere in considerazione quelle che abbiamo detto (Nota I) *proprietà affini* del sistema (1.1). Per le (1.2), (1.6) $G_{\alpha\beta}^\gamma$ è un *tensore*: ne consegue che nelle attuali ipotesi, anche sopprimendo nelle precedenti formule, nei secondi membri, tutti i termini che contengono $G_{\alpha\beta}^\gamma$ (quelli posti entro parentesi quadre), permane il carattere *tensoriale* dei secondi, cioè anche dei primi membri. Supponiamo allora, di più, $m = 1$; ordinatamente

le espressioni indicate con $\overset{C}{D}_i A^i, \overset{C}{D}_k A^i, \overset{C}{d} p_\alpha^i, \overset{C}{d} A^i; \overset{S}{d} A^i, \overset{K}{D}_\alpha A^i$ si riducono alle derivate $A_{j\alpha}^i$ ed A_{jk}^i e ai differenziali $\tilde{\omega}_\alpha^i, DA^i$ del Cartan ⁽¹⁾; al differenziale δA^i dello Slobodžinski ⁽²⁾, alla « biderivata » $\mathfrak{D}(A)^i$ del Kosambi ⁽³⁾.

Credo che apparirà evidente la maggiore semplicità e uniformità (anche pel caso $m = 1$, l'unico considerato dagli Autori ora ricordati) della presente trattazione. Va detto però che, quando non si vogliano prendere in considerazione le trasformazioni (1.3) sui parametri u^λ , e quindi non ci sia bisogno di un sistema come $G_{\alpha\beta}^\gamma$, che dipende dalle derivate seconde e terze delle $H_{\alpha\beta}^i$ rispetto alle p_γ^i , allora può apparire vantaggioso, per definire un trasporto lungo le linee di una varietà integrale del sistema (1.1), valersi delle $\overset{C}{D}_\alpha A^i$ o — per vettori funzioni delle sole x^i — delle $\overset{K}{D}_\alpha A^i$, cioè, delle derivate di Cartan e di Kosambi generalizzate, anzichè di $\tilde{d}A^i$, in quanto così si fa ricorso soltanto alle derivate prime delle $H_{\lambda\mu}^i$, e invece Γ_{hk}^i dipende dalle derivate seconde.

7. Ma veniamo ora a considerazioni di carattere più prettamente geometrico.

Supponiamo ora che pel sistema (1.1) valgano le condizioni d'integrabilità; allora esiste una e una sola varietà integrale determinata dai valori iniziali $\overset{o}{x}^i, \overset{o}{p}_\alpha^i$ (arbitrari) delle x^i, p_α^i per $u^\lambda = \overset{o}{u}^\lambda$. Ma in generale i valori iniziali $\left(\overset{o}{x}^i, \overset{o}{p}_\alpha^i\right)$ e $\left(\overset{o}{x}^i, \kappa_{\alpha}^\beta \overset{o}{p}_\alpha^i\right)$, con κ_{α}^β cost., $|\kappa_{\alpha}^\beta| \neq 0$, daranno luogo a differenti varietà integrali. Se vogliamo invece che un punto e una m -direzione iniziali determinino la varietà integrale, dobbiamo sottoporre le $H_{\alpha\beta}^i$ ad opportune condizioni. Mi limito qui a indicare il risultato: è necessario e sufficiente che si abbia, identicamente nelle κ_{α}^β (ed essendo $\kappa_{\alpha}^\gamma \kappa_{\gamma}^\alpha = \delta_{\alpha}^\gamma$)

$$(7.1) \quad H_{\alpha\beta}^i(u^\tau, x^j, p_\gamma^i) - \kappa_{\alpha}^\lambda \kappa_{\beta}^\mu H_{\lambda\mu}^i(u^\tau, x^j, \kappa_{\gamma}^\nu p_\gamma^i) = \rho_{\alpha\beta}^\gamma p_\gamma^i,$$

le $\rho_{\alpha\beta}^\gamma$ essendo convenienti funzioni delle $u^\tau, x^j, p_\gamma^i, \kappa_{\gamma}^\alpha$. In conseguenza di queste si ha subito, derivando rispetto alla κ_{γ}^ω generica e ponendo poi $\kappa_{\gamma}^\omega = \delta_{\gamma}^\omega$,

$$(7.2) \quad \frac{\partial H_{\alpha\beta}^i}{\partial p_\gamma^i} p_\omega^i - H_{\alpha\beta}^i \delta_{\alpha}^\gamma - H_{\omega\alpha}^i \delta_{\beta}^\gamma = \sigma_{\alpha\beta\omega}^{\gamma\tau} p_\tau^i,$$

ove

$$(7.3) \quad \sigma_{\alpha\beta\omega}^{\gamma\tau} = \left(\frac{\partial \rho_{\alpha\beta}^\tau}{\partial \kappa_{\gamma}^\omega} \right)_{\kappa_{\gamma}^\omega = \delta_{\gamma}^\omega};$$

(1) É. CARTAN, *Observations...* (cit., Nota I), pp. 620-621.

(2) W. SLEBODZINSKI, *Sur deux connections...* (cit., I), p. 198.

(3) D. D. KOSAMBI, *Parallelism and Path Spaces* (cit., I), p. 614.

ma anche *viceversa*, se sussistono per opportuni valori delle $\sigma_{\alpha\beta\omega}^{\gamma\tau}$ (funzioni delle $u^\lambda, x^i, p_\lambda^j$) le (7.2), valgono pure le (7.1), con opportuni valori delle $\rho_{\alpha\beta}^\gamma$. Le (7.1) generalizzano la « proprietà d'omogeneità » di J. Douglas ⁽¹⁾, che corrisponde al caso in cui $\rho_{\alpha\beta}^\gamma = 0$; le (7.2) analogamente estendono le condizioni date da Douglas perchè valga la proprietà d'omogeneità ⁽²⁾, alla loro volta estensioni del *teorema di Eulero*.

Le (7.1), (7.2) in sostanza esprimono, riguardandovi α, β oppure $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ quali *indici ordinali*, che i vettori

$$H_{\alpha\beta}^i(u^\tau, x^j, p_\gamma^l) - \kappa_{\alpha}^\lambda \kappa_{\beta}^\mu H_{\lambda\mu}^i(u^\tau, x^j, \kappa_\gamma^\nu p_\nu^l), \quad \frac{\partial H_{\alpha\beta}^i}{\partial p_\gamma^j} p_\omega^j - H_{\omega\beta}^i \delta_\alpha^\gamma - H_{\omega\alpha}^i \delta_\beta^\gamma$$

della X_n ambiente sono *tangenziali alla X_m integrale* in oggetto: è interessante osservare che in conseguenza delle (7.1) o delle (7.2) anche

$$(7.4) \quad \Omega_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot i}, \quad \frac{\partial \Omega_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot i}}{\partial p_\gamma^j} p_\omega^j, \quad B_{klj}^{\cdot\cdot i\gamma} p_\alpha^k p_\beta^l p_\omega^j, \quad Q_{\alpha\beta\cdot j}^{\cdot\cdot i\gamma\tau} p_\omega^j p_\mu^l,$$

(ved. le (4.8), (5.4), Nota II) quando gli *indici greci* si pensino quali *indici ordinali*, sono *vettori tangenziali*. Per $\Omega_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot i}$, precisamente, si ha

$$(7.5) \quad \Omega_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot i} + G_{\alpha\beta}^\gamma p_\gamma^i = - \frac{1}{m(m+1)} \left(m \sigma_{\nu\beta\alpha}^{\gamma\gamma} + \sigma_{\nu\tau\beta}^{\gamma\gamma} \delta_\alpha^\gamma + \frac{\partial \sigma_{\nu\tau\beta}^{\gamma\gamma}}{\partial p_\tau^j} p_\alpha^j \right) p_\gamma^i$$

In particolare nel caso $m = 1$ si trova

$$(7.6) \quad \Omega^i (= \Omega_{ii}^{\cdot\cdot i}) = \frac{n-2}{n(n-1)} \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial p^b} p^i - \frac{\partial \Gamma_{ik}^i}{\partial p^b} p^b \right) p^k;$$

cosicchè si vede che per $m = 1, n = 2$ (valendo le (7.1)) $\Omega_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot i}$ è *sempre nullo*. Ma tornando al caso generale: valendo le (7.1) e quindi le (7.2) risulta dunque lecito porre

$$(7.7) \quad G_{\alpha\beta}^\gamma p_\gamma^i + \Omega_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot i} = \mathcal{G}_{\alpha\beta}^\gamma p_\gamma^i,$$

ove $\mathcal{G}_{\alpha\beta}^\gamma$, di cui una effettiva espressione si ha dalle (7.5), ha la *stessa legge di trasformazione* di $G_{\alpha\beta}^\gamma$: cosicchè può anche prendere il ruolo di $G_{\alpha\beta}^\gamma$ in tutti gli sviluppi in cui non è essenziale la validità della (3.3) (Nota II): e anche, con agevoli modificazioni, nei rimanenti sviluppi. Si può osservare che la stessa legge di trasformazione di $G_{\alpha\beta}^\gamma, \mathcal{G}_{\alpha\beta}^\gamma$ ha anche

(1) Ved. Nota I, form. (2.5); v. anche J. DOUGLAS, *System of K-dimens. manifolds...* (cit. ibid.), p. 711, form. (3.12).

(2) J. DOUGLAS, loc. cit., p. 712, form. (4.9).

$$(7.8) \quad g_{\alpha\beta}^{\gamma} = -\sigma_{\alpha\beta\tau}^{\tau\gamma},$$

che dipende dalle sole derivate prime di $H_{\alpha\beta}^i$, avendosi

$$(7.9) \quad g_{\alpha\beta}^{\gamma} p_{\gamma}^i = -\frac{\partial H_{\alpha\beta}^i}{\partial p_{\gamma}^j} p_{\gamma}^j + 2 H_{\alpha\beta}^i.$$

Ma su questo non ci tratteremo.

8. Resta ad affrontare il problema più difficile, quelle delle proprietà *descrittive*, del sistema (1.1) (ved. Nota I): che in sostanza sono le proprietà *topologiche* della totalità delle varietà integrali. La più generale trasformazione delle $H_{\alpha\beta}^i$ che non altera le varietà integrali è della forma

$$(1.5) \quad \hat{H}_{\alpha\beta}^i = H_{\alpha\beta}^i + \tau_{\alpha\beta}^{\gamma} p_{\gamma}^i$$

ove le $\tau_{\alpha\beta}^{\gamma}$ sono soggette a condizioni — le (8.7) indicate poco oltre — che agevolmente si ricavano dalle condizioni d'integrabilità delle (1.1), e del resto sono arbitrarie funzioni delle $u^{\lambda}, x^j, p_{\alpha}^i$. Le proprietà *descrittive* del sistema (1.1) sono, fra le proprietà intrinseche (cioè: invarianti per le (1.2), (1.3)) quelle *invarianti per le (1.5)*.

Posto per semplicità (cfr. Douglas, *System of K-dim. manifolds*, p. 719)

$$(8.1) \quad A_h = -\frac{1}{m(m+1)} \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}^{\beta}}{\partial p_{\alpha}^h} \quad (8.2) \quad B_{hk}^{\gamma} = -\frac{1}{m(m+1)} \frac{\partial^2 \tau_{\alpha\beta}^{\gamma}}{\partial p_{\alpha}^h \partial p_{\beta}^k}$$

e inteso sempre che valgano le (7.2), abbiamo in conseguenza delle (1.5)

$$(8.3) \quad \hat{\Gamma}_{hk}^i = \Gamma_{hk}^i + A_h \delta_k^i + A_k \delta_h^i + p_{\gamma}^i B_{hk}^{\gamma},$$

$$(8.4) \quad \hat{\mathcal{G}}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \mathcal{G}_{\alpha\beta}^{\gamma} + \tau_{\alpha\beta}^{\gamma} + A_h p_{\alpha}^h \delta_{\beta}^{\gamma} + A_h p_{\beta}^h \delta_{\alpha}^{\gamma} + B_{hk}^{\gamma} p_{\alpha}^h p_{\beta}^k,$$

$$(8.5) \quad \hat{\sigma}_{\alpha\beta\mu}^{\gamma\lambda} = \sigma_{\alpha\beta\mu}^{\gamma\lambda} + \tau_{\alpha\beta}^{\gamma} \delta_{\mu}^{\lambda} - \tau_{\mu\alpha}^{\lambda} \delta_{\beta}^{\gamma} - \tau_{\mu\beta}^{\lambda} \delta_{\alpha}^{\gamma} + \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}^{\lambda}}{\partial p_{\gamma}^i} p_{\mu}^i.$$

Vediamo qualche conseguenza: ci si potrebbe proporre di rendere, approfittando dell'arbitrarietà delle $\tau_{\alpha\beta}^{\gamma}$, $\hat{\mathcal{G}}_{\alpha\beta}^{\gamma} = 0$. Questo per $m = 1$ è sempre possibile: non lo è in generale per $m > 1$. Infatti dalla (8.4) imponendo $\hat{\mathcal{G}}_{\alpha\beta}^{\gamma} = 0$ si ha

$$(8.6) \quad \frac{\partial^2 \tau_{\lambda\mu}^{\gamma}}{\partial p_{\alpha}^h \partial p_{\mu}^k} p_{\alpha}^h p_{\beta}^k + \frac{\partial \tau_{\mu\lambda}^{\gamma}}{\partial p_{\mu}^h} (p_{\alpha}^h \delta_{\beta}^{\gamma} + p_{\beta}^h \delta_{\alpha}^{\gamma}) - m(m+1) (\tau_{\alpha\beta}^{\gamma} + \mathcal{G}_{\alpha\beta}^{\gamma}) = 0;$$

ma d'altra parte dalle condizioni d'integrabilità per le (1.1) segue

$$(8.7) \quad \frac{\partial \tau_{\lambda\beta}^{\gamma}}{\partial u^{\mu}} - \frac{\partial \tau_{\mu\beta}^{\gamma}}{\partial u^{\lambda}} + \frac{\partial \tau_{\lambda\beta}^{\gamma}}{\partial x^j} p_{\mu}^j - \frac{\partial \tau_{\mu\beta}^{\gamma}}{\partial x^j} p_{\lambda}^j + \left(\frac{\partial \tau_{\lambda\beta}^{\gamma}}{\partial p_{\nu}^i} \tau_{\nu\mu}^{\alpha} - \frac{\partial \tau_{\mu\beta}^{\gamma}}{\partial p_{\nu}^i} \tau_{\nu\lambda}^{\alpha} \right) p_{\alpha}^{\nu} + \\ + \tau_{\beta\lambda}^{\delta} \tau_{\delta\mu}^{\gamma} - \tau_{\beta\mu}^{\delta} \tau_{\delta\lambda}^{\gamma} + \frac{\partial \tau_{\lambda\beta}^{\gamma}}{\partial p_{\nu}^i} H_{\nu\mu}^i - \frac{\partial \tau_{\mu\beta}^{\gamma}}{\partial p_{\nu}^i} H_{\nu\lambda}^i + \sigma_{\lambda\beta\alpha}^{\nu\gamma} \tau_{\nu\mu}^{\alpha} - \sigma_{\mu\beta\alpha}^{\nu\gamma} \tau_{\nu\lambda}^{\alpha} = 0,$$

ed è evidente che (escluso il caso banale $m = 1$) le conseguenze differenziali di queste non rientrano, in generale, nelle (8.6); e d'altra parte queste possono ridursi a forma normale, risolvendole rispetto a una derivata seconda di ciascuna funzione incognita $\tau_{\alpha\beta}^{\gamma}$. Poi: le (8.5) ci mostrano che se $m = 1$ si può rendere, disponendo di $\tau_{\alpha\beta}^{\gamma}$, $\sigma_{\alpha\beta\mu}^{\gamma\lambda} = 0$, e cioè rendere soddisfatta per $H_{\alpha\beta}^i$ la proprietà d'omogeneità; la cosa invece è generalmente impossibile per $m > 1$. Questo porta per conseguenza che per $m = 1$, la teoria sviluppata da J. Douglas ⁽¹⁾ è abbastanza generale, nei riguardi delle proprietà descrittive, per un qualunque sistema (2.1); mentre per $m > 1$ la « geometria delle m -estensioni » di Douglas ⁽²⁾ anche nei riguardi delle proprietà descrittive non ha validità per un qualunque sistema (1.1) ⁽³⁾.

Pure la possibilità di una conveniente estensione della teoria del Douglas al caso generale appare, se si cerca di costruire anche per questo caso un sistema Π_{hk}^i che sia invariante per le (1.5) e appaia come una generalizzazione del sistema delle « componenti della connessione proiettiva » secondo T. Y. Thomas. Effettivamente seguendo il procedimento che adotta il Douglas ⁽⁴⁾ per il caso particolare da lui trattato, troviamo questo sistema, invariante per le (1.5):

$$(8.8) \quad \Pi_{hk}^i = \Gamma_{hk}^i - \frac{I}{n+1} \left(\Gamma_{jk}^i \delta_h^j + \Gamma_{jh}^i \delta_k^j \right) - \frac{I}{n-m} \left(\frac{\partial \Gamma_{hk}^i}{\partial p_{\mu}^j} - \frac{I}{n+1} \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial p_{\mu}^j} - \frac{I}{n+1} \frac{\partial \Gamma_{jh}^i}{\partial p_{\mu}^j} \right) p_{\mu}^i - \\ - \frac{I}{m(m+1)} \left\{ \frac{I}{n+1} \left(\frac{\partial \sigma_{\gamma\lambda\delta}^{\gamma\delta}}{\partial p_{\lambda}^k} \delta_h^j + \frac{\partial \sigma_{\gamma\lambda\delta}^{\gamma\delta}}{\partial p_{\lambda}^h} \delta_k^j \right) - \right. \\ \left. - \frac{I}{(n-m)(n+1)} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{\gamma\lambda\delta}^{\gamma\delta}}{\partial p_{\lambda}^h \partial p_{\mu}^k} + \frac{\partial^2 \sigma_{\gamma\lambda\delta}^{\gamma\delta}}{\partial p_{\lambda}^k \partial p_{\mu}^h} \right) p_{\mu}^i + \frac{I}{n-m} \frac{\partial^2 \sigma_{\lambda\gamma\delta}^{\mu\delta}}{\partial p_{\lambda}^h \partial p_{\mu}^k} p_{\mu}^i \right\}.$$

Quando sia $\sigma_{\alpha\beta\mu}^{\gamma\lambda} = 0$, si ha il sistema Π_{hk}^i di J. Douglas, e se inoltre le Γ_{hk}^i sono indipendenti dalle p_{α}^i , si ritrova il sistema Π_{hk}^i di T. Y. Thomas. L'espressione (8.8) presenta una complessità non lieve, ciò forse è nella natura delle cose. Ma non è escluso che, ciò nonostante, il sistema Π_{hk}^i dato dalla (8.8) possa servire utilmente per l'ulteriore sviluppo della teoria. Su questo punto mi propongo di tornare prossimamente.

(1) J. DOUGLAS, *The general geometry of paths...* (cit., Nota I), p. 156 e sg.

(2) J. DOUGLAS, *System of K-dimens. manifolds...* (cit., I), p. 716 e sg.

(3) Intendiamo qui sempre riferirci a sistemi pei quali valgano le (7.1) o (7.2).

(4) *System of K-dimens. manifolds...*, pp. 721-722.

Matematica. — *Qualche teorema sulle curve di Jordan.*

Nota di G. SCORZA DRAGONI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nel corso di una ricerca, che si svolge nell'ordine di idee che culmina nel non ancora dimostrato teorema generale di traslazione del Brouwer, io avrò spesso occasione di utilizzare alcuni teoremi sulle curve semplici aperte o chiuse (immagini topologiche, cioè biunivoche e bicontinue, di un segmento o di una circonferenza) e sulle linee semplici e aperte (immagini topologiche di una retta).

Di questi teoremi darò le dimostrazioni qui ed in una Nota successiva, che sarà pubblicata nel « Bollettino dell'Unione matematica italiana ».

1. Premettiamo un lemma, secondo il quale

Se j è una curva semplice e chiusa del piano α ; J l'insieme dei punti di j e di quelli che j separa dall'infinito; ν una curva semplice ed aperta, i cui estremi siano punti di j ed i cui punti interni (cioè, diversi dagli estremi) siano tutti esterni a J ; allora dei due insiemi, delimitati dalle due curve semplici e chiuse ottenute associando ν a ciascuno dei due archi in cui gli estremi di ν dividono j ⁽²⁾, uno conveniente contiene per intero la somma dell'altro più J .

Questo lemma è stato già dimostrato da Carathéodory, se j è un poligono e ν una spezzata poligonale; ma il ragionamento di Carathéodory è di natura strettamente topologica ⁽³⁾ e si presta quindi a stabilire anche il lemma qui enunciato.

Il che si poteva prevedere, osservando che il lemma in discorso non è topologicamente più ampio di quello di Carathéodory; previo un opportuno omeomorfismo (omeomorfismo = trasformazione topologica) del piano α in sè, si può sempre supporre — e ciò è notorio ⁽⁴⁾ — che j sia appunto un poligono e ν una poligonale.

Quanto si è detto costituisce già di per sè un'altra dimostrazione del lemma enunciato.

(1) Nella seduta del 2 febbraio 1936.

(2) In questi insiemi vanno inclusi tutti i loro punti frontiera.

(3) C. CARATHÉODORY, *Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete*. [« Mathematische Annalen », vol. 73 (1913), pp. 323-370], p. 326.

(4) Cfr. V. KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie*. [Springer, Berlino, 1923], vol. I, cap. II, § 6.

2. Ed osserviamo anche che:

Se le curve

$$v_1, v_2, v_3, \dots$$

semplici, aperte e prive a due a due di punti interni in comune appartengono ad una medesima curva j semplice, aperta o chiusa, allora il diametro di v_p è infinitesimo per $p \rightarrow +\infty$, intendendo per diametro di un insieme l'estremo superiore delle distanze delle coppie de' suoi punti.

Il lemma si stabilisce immediatamente osservando che la proprietà in esso espressa è palese, se j si riduce ad un segmento o ad una circonferenza; mentre, della proprietà in esso espressa, il teorema della continuità uniforme garantisce l'invarianza di fronte agli omeomorfismi.

3. Siano

$$j_1, \dots, j_n \quad (n \geq 2)$$

n curve semplici e chiuse del piano α e sia J_p l'insieme dei punti di j_p e di quelli che j_p separa dall'infinito ($p = 1, \dots, n$); allora, se J_1, \dots, J_n hanno in comune, a due a due, almeno un punto interno, esiste una, ed una sola, curva semplice e chiusa j_0 tale che ogni suo punto appartenga ad una almeno delle j_1, \dots, j_n e che ogni punto di J_1, \dots, J_n appartenga a j_0 oppure sia separato mediante j_0 dall'infinito.

I punti che j_0 non separa dall'infinito sono tutti e solo quelli che si possono unire con l'infinito mediante una semilinea⁽¹⁾ priva di punti in comune con j_1, \dots, j_n .

Questo teorema, nella sua prima parte, è stato dato da Carathéodory⁽²⁾ per due e quindi⁽³⁾ anche per) più poligoni.

Esso però non si può ricondurre al teorema di Carathéodory, previo un omeomorfismo del piano α in sè, perchè due curve semplici e chiuse possono avere in comune un'infinità (numerabile) di curve semplici aperte e prive a due a due di punti interni in comune, mentre per due poligoni le curve siffatte si riducono sempre ad un numero finito.

È però evidente che basta (sempre) stabilire il teorema nell'ipotesi $n = 2$ (per n qualunque potendosi allora procedere per induzione) pur di avere stabilito senza fare questa ipotesi che la curva j_0 , se esiste, è unica; e quest'ultima cosa si ottiene subito applicando un mio ragionamento⁽⁴⁾.

Precisamente, siano c_1 e c_2 due curve che godano delle proprietà in-

(1) Immagine topologica di una semiretta (che contenga l'origine); l'immagine dell'origine della semiretta sarà l'origine della semilinea.

(2) Loc. cit., n. 5.

(3) Cfr. G. SCORZA DRAGONI, *Una estensione dell'ultimo teorema geometrico di Poincaré*. [«Memorie della Reale Accademia d'Italia, classe di Scienze», vol. IV (1933), pp. 213-269], nota (88) a piè di pagina 261.

(4) Loc. cit., nota precedente, n. 49.

dicare per j_0 ; C_1 e C_2 siano gli insiemi che rispetto a c_1 e c_2 hanno il significato di J_p rispetto a j_p .

Se P è un punto di c_1 , P appartiene ad una almeno delle curve j_1, \dots, j_n , cioè a uno degli insiemi J_1, \dots, J_n , quindi P appartiene a C_2 ; in maniera analoga si riconosce che i punti di c_2 appartengono tutti a C_1 . Vale a dire la frontiera di C_1 appartiene a C_2 e la frontiera di C_2 appartiene a C_1 ; ma queste due frontiere sono entrambe due curve semplici e chiuse, quindi C_1 contiene C_2 e C_2 contiene C_1 .

Di qui si trae $C_1 \supseteq C_2$, e quindi, come volevamo, $c_1 = c_2$.

E supponiamo ora $n = 2$.

Indichiamo con J'_1 e J'_2 i campi (campo=insieme aperto e connesso) dei punti esterni a J_1 e J_2 ; e con J'_0 il campo dei punti di α tali che, dettore P uno di essi, P si possa unire col punto all'infinito mediante una semilinea semplice ed aperta di origine P e priva di punti in comune sia con j_1 che con j_2 .

Se diciamo j'_0 la frontiera di J'_0 , allora è evidente che ogni punto P_0 di j'_0 appartiene od a j_1 , od a j_2 ; infatti, se così non fosse, P_0 avrebbe una distanza positiva sia da j_1 che da j_2 ; e quindi i segmenti che uniscono P_0 ai punti di un suo conveniente intorno sarebbero tutti privi di punti in comune sia con j_1 che con j_2 ; ma allora, poichè fra i punti di questo intorno vi sono punti di J'_0 , anche P_0 appartenerrebbe a J'_0 , contro il supposto.

E questa frontiera si riduce a una delle curve j_1 e j_2 , se J_1 appartiene a J_2 o viceversa — come accade in particolare se j_1 e j_2 non hanno in comune alcun punto o ne hanno uno solo; e ciò perchè J_1 e J_2 hanno in comune un punto interno —.

Escluso questo caso, la frontiera j'_0 di J'_0 contiene sia punti di j_2 esterni a J_1 , che punti di j_1 esterni a J_2 .

Sia P_2 un punto di j_2 , interno a J'_1 , che appartenga a j'_0 .

Allora P_2 è interno ad un sottoarco semplice aperto v , avente i soli estremi su j_1 (se v fosse chiuso, j_1 e j_2 avrebbero solo un punto comune e si ricadrebbe in un caso già escluso).

Ora è agevole riconoscere che ogni punto di v appartiene a j'_0 .

A ciò basta far vedere che questo accade per ogni punto Q_2 , interno a v .

Sia infatti v' l'arco di v di estremi P_2 e Q_2 ; v' è esterno a J_1 ; indi la sua distanza da j_1 è positiva; diciamola ρ .

Inoltre, poichè P_2 è punto d'accumulazione per J'_0 , noi potremo trovare un arco v'' , di estremi Q_2 e R_2 , tale che v'' incontri j_2 solo in Q_2 , che R_2 sia un punto di J'_0 (e dell'intorno di P_2) e che ogni punto di v'' disti da v' per meno di ρ — l'affermazione fatta è evidente se j_2 è una circonferenza; ed a questo si può ridurre sempre il caso generale, previo un omeomorfismo del piano $\alpha^{(1)}$ —.

(1) Cfr. G. SCORZA DRAGONI, *Intorno ad alcuni teoremi sulle traslazioni piane*. [Vol. cit. delle «Memorie della Reale Accademia d'Italia», pp. 159-212], n. 1.

Allora: v'' non incontra mai j_1 ; ogni punto di v'' , distinto da Q_2 , non appartiene a j_2 ; R_2 appartiene a J'_0 ; indi ogni punto di v'' distinto da Q_2 , appartiene a J'_0 ; ciò basta per dedurre che Q_2 appartiene a j'_0 , perchè non può appartenere a J'_0 , in quanto punto di j_2 , pur essendo punto d'accumulazione per J'_0 .

Due archi del tipo dell'arco v considerato non possono evidentemente avere un punto interno in comune senza coincidere; indi la curva j_2 può contenere al più un'infinità numerabile di archi del tipo della curva semplice ed aperta v (mentre ne contiene di certo almeno uno).

Siano v_1, v_2, v_3, \dots gli archi di j_2 in discorso.

Delle due curve semplici e aperte in cui gli estremi di v_p ($p = 1, 2, \dots$) dividono j_1 , diciamo μ_p quella (v. n. 1) i cui punti interni sono separati dall'infinito mediante la curva semplice e chiusa formata dall'altra sottocurva di j_1 e da v_p . Allora è evidente che μ_p non può contenere nell'interno un estremo di μ_q , perchè ogni punto interno di μ_p è esterno a J'_0 , mentre gli estremi di μ_q sono punti frontiera per J'_0 ; indi μ_1, μ_2, \dots sono a due a due privi di punti interni in comune.

E per ogni valore di p , rimpiazziamo nella j_1 l'arco μ_p mediante v_p ; otterremo così un insieme di punti che diremo j_0 , riserbandoci di far vedere ch'esso coincide con la frontiera di J'_0 e si riduce ad una curva semplice e chiusa. Di guisa che j_0 sarà una curva semplice e chiusa formata da punti di j_1 e j_2 e tale che un punto di J_1 o di J_2 (non potendo evidentemente appartenere a J'_0) sarà o punto di j_0 o punto separato dall'infinito mediante j_0 .

Che j_0 si possa porre in corrispondenza biunivoca e (bicontinua o semplicemente) continua con una curva semplice e chiusa (e quindi sia essa stessa una curva semplice e chiusa) è immediato.

Infatti noi possiamo porre una corrispondenza biunivoca e continua fra μ_p e v_p ⁽¹⁾ nella quale gli estremi (che μ_p e v_p hanno in comune) siano uniti.

Dopo di ciò, ad ogni punto di j_0 che sia anche punto di j_1 facciamo corrispondere se stesso; ad ogni punto di j_0 che sia punto di v_p facciamo corrispondere il punto di μ_p ad esso precedentemente associato.

In tal modo otteniamo una corrispondenza fra j_0 e j_1 che evidentemente è biunivoca. Se riusciamo a dimostrare che il punto P_0 variabile su j_0 è anche funzione continua del punto P_1 ad esso associato e variabile su j_1 , avremo dimostrato una prima parte del nostro assunto.

La continuità di P_0 al variare di P_1 , è evidente in un punto R_1 di j_1 tale che in un suo intorno (rispetto a j_1) vi siano punti di un numero finito (che, se l'intorno è abbastanza piccolo, sarà necessariamente o zero,

(1) Basterà porre una simile corrispondenza fra i due archi di circonferenza di cui μ_p e v_p sono le immagini topologiche.

o uno, o due, perchè μ_1, μ_2, \dots sono due a due privi di punti interni in comune) degli archi μ_1, μ_2, \dots .

Se P_i cade invece in un punto R_i di j_i tale che in ogni suo intorno (preso rispetto a j_i) vi siano punti di infiniti degli archi μ_1, μ_2, \dots , procediamo nel modo che segue.

Osserviamo intanto che allora, se μ_p ($p = 1, 2, \dots$) ha un punto in un intorno di R_i (su j_i), uno almeno degli estremi di μ_p appartiene a questo intorno — dato che altrimenti R_i sarebbe interno a μ_p , mentre nelle ipotesi nostre ciò è impossibile perchè μ_1, μ_2, \dots sono a due a due privi di punti interni in comune —.

Indi, nelle ipotesi poste, R_i è anche un punto di j_o , perchè punto d'accumulazione per l'insieme degli estremi di μ_1, μ_2, \dots e quindi punto non interno nè a μ_1 , nè a μ_2, \dots .

Indi ad R_i corrisponde il punto R_i medesimo; e dovremo far vedere che se P_i è contenuto in un intorno conveniente di R_i (su j_i) il punto P_o , trasformato di P_i , dista da R_i per meno di ε , ε essendo un numero positivo arbitrario.

Sia infatti i_i un arco aperto di j_i che contenga R_i nell'interno ed abbia un diametro minore di $\frac{\varepsilon}{2}$; e supponiamo, com'è lecito, che siano minori

di $\frac{\varepsilon}{2}$ e il diametro dell'immagine della porzione appartenente a i_i di quello eventuale, μ_{p_o} , degli archi μ_1, μ_2, \dots che abbia in R_i un estremo⁽¹⁾ e (v. n. 2) il diametro degli archi $\nu_{p_1}, \nu_{p_2}, \dots$ associati a quelli, $\mu_{p_1}, \mu_{p_2}, \dots$, degli archi μ_1, μ_2, \dots distinti da μ_{p_o} ed aventi un punto (e quindi un estremo) in i_i .

Allora ad ogni punto P_i di i_i o corrisponde se stesso, se P_i appartiene anche a j_o , in particolare quindi se P_i è estremo di μ_{p_1} , o di μ_{p_2}, \dots ; o corrisponde un punto che dista da R_i di meno che $\frac{\varepsilon}{2}$, se P_i appartiene a μ_{p_o} ; o, se non è verificata nessuna delle alternative precedenti (di guisa che P_i appartiene a μ_{p_1} , od a μ_{p_2}, \dots), corrisponde un punto o di ν_{p_1} , o di ν_{p_2}, \dots , punto che, in virtù delle ipotesi poste, dista per meno di ε da R_i (infatti $\nu_{p_1}, \nu_{p_2}, \dots$ hanno tutti un diametro minore di $\frac{\varepsilon}{2}$ mentre uno almeno dei loro estremi dista per meno che $\frac{\varepsilon}{2}$ da R_i).

Indi j_o è, come volevamo, una curva semplice e chiusa.

Diciamo J_o l'insieme dei punti di j_o e di quelli che j_o separa dall'infinito.

Allora è evidente che un punto di J_o non appartiene di certo a J'_o ; un punto di J_o non si può infatti unire con l'infinito mediante una semilinea

(1) Di archi siffatti ne esiste al più uno nelle nostre ipotesi.

semplice ed aperta e priva di punti in comune (con j_0 e quindi) con j_1 e j_2 .

Invece un punto P esterno a J_0 si può unire con l'infinito mediante una semilinea semplice e aperta l e avente l'origine in P e priva di punti in comune con j_0 .

Allora l non incontra v_1, v_2, \dots perchè questi archi appartengono tutti a j_0 ; non incontra j_1 , perchè un punto interno a μ_1 , o μ_2 , o μ_3, \dots è interno a J_0 per costruzione (come appare evidente se si ammette, il che è lecito, che j_1 sia una circonferenza) mentre un punto di j_1 non interno ad uno degli archi detti appartiene a j_0 ; indi l non incontra nemmeno la frontiera j'_0 di J'_0 , perchè un punto di questa che non appartenga a v_1, v_2, \dots (e quindi che non sia esterno a J_1) è un punto di j_1 ; indi è $j_0 = j'_0$.

La dimostrazione del teorema è così completa.

4. Dal teorema del n. 3 si deduce subito, mediante una inversione, che:

Se $j_1, \dots, j_n; J_1, \dots, J_n$ hanno il solito significato e se J_1, \dots, J_n hanno in comune un punto O a tutti interno, allora l'insieme dei punti che si possono unire ad O mediante una curva semplice aperta e priva di punti in comune sia con j_1, \dots , sia con j_n è delimitato da una curva semplice e chiusa ⁽¹⁾.

Matematica. — *Sulle varietà luoghi di ∞^1 spazi.* Nota di A. TERRACINI, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. FUBINI.

1. Consideriamo in uno spazio S_r una totalità ∞^1 di S_h , tale che lo S_h generico del sistema ∞^1 sia incidente a quello infinitamente vicino secondo uno S_p : si suppone, per non cadere in casi ovvi, $r \geq 2h + 1 - p$. Il significato preciso da attribuire a tale frase abbreviata è ben chiaro: se lo S_h generico del sistema ∞^1 è assegnato come congiungente di $h + 1$ punti linearmente indipendenti funzioni di un parametro t , siano $a_0(t), a_1(t), \dots, a_h(t)$ (dove per brevità supponiamo le funzioni che entrano in considerazione addirittura analitiche regolari), bisognerà ricorrere ai determinanti di ordine $2h + 2 - p$ estratti dalla matrice

$$|a_0(t), a_1(t), \dots, a_h(t), a_0(t_1), a_1(t_1), \dots, a_h(t_1)|.$$

Qualunque sia il sistema ∞^1 di S_h , quei determinanti sono infinitesimi almeno di ordine $h + 1 - p$, rispetto a $t_1 - t$ come infinitesimo principale: si parlerà dunque di incidenza in uno S_p se l'ordine minimo di infinitesimo $\rho^{(p)}$ di tutti quei determinanti è invece maggiore della quantità

(1) Questo teorema si trova ammesso in v. KERÉKJÁRTÓ, loc. cit., p. 223 (ultimo capoverso).

(2) Nella seduta del 2 febbraio 1936.

considerata; e precisamente si parlerà di *incidenza secondo uno S_p con ordine di incidenza $\sigma^{(p)}$ ($\sigma^{(p)} > 0$) se*

$$\sigma^{(p)} = p^{(p)} - h - 1 + p$$

mentre $p^{(p+1)} = h - p$ (per non avere incidenza secondo uno S_{p+1}).

Si tratta in sostanza di un minore o maggiore ordine di approssimazione in cui ha luogo l'incidenza di uno S_h del sistema con quello infinitamente vicino. Nel caso più noto delle ordinarie rigate sviluppabili, non vi è luogo a nessuna discriminazione di casi, in quanto per esse è costantemente $\sigma^{(0)} = 2$: un valore di $\sigma^{(0)}$ maggiore di due conduce necessariamente a un sistema ∞^1 di rette a due a due incidenti. Analogamente, qualunque sia h , se $p = h - 1$. Ma negli altri casi, il valore di $\sigma^{(p)}$ non risulta più univocamente determinato.

In un lavoro in corso di pubblicazione, ho cercato di approfondire la nozione così posta: riassumo qui alcuni dei risultati ottenuti⁽¹⁾.

Avvertiamo subito che la definizione posta ha carattere intrinseco, vale a dire è indipendente dalla particolare rappresentazione analitica adottata per il sistema ∞^1 di S_h .

L'osservazione, del resto ovvia, fatta per i sistemi ∞^1 di rette, lascia già prevedere che anche nel caso generale i valori possibili per $\sigma^{(p)}$ risultino in qualche modo limitati. Effettivamente si trova anzitutto che *l'ordine di incidenza è necessariamente un numero pari*⁽²⁾. Inoltre *si ha necessariamente*

$$\sigma^{(p)} \leq \left(\frac{2h - 2p + 2}{h - p + 1} \right) - 2 - h + p$$

oppure

$$\sigma^{(p)} \leq \left(\frac{2h - 2p + 2}{h - p + 1} \right) - 1 - h + p$$

secondochè $h - p$ è pari oppure dispari; a meno che gli $\infty^1 S_h$ del sistema siano a due a due incidenti secondo S_p , nel qual caso diremo che l'ordine di incidenza è $\sigma^{(p)} = \infty$.

2. Il primo fra i casi che offrono interesse, dando luogo a molteplici valori dell'ordine di incidenza $\sigma^{(p)}$, è quello di un sistema ∞^1 di piani dello S_5 , di cui due piani infinitamente vicini incidenti in un punto. Qui,

(1) Escludiamo senz'altro dal seguito il caso in cui gli $\infty^1 S_h$ passano per punti fissi: le proprietà relative a questo caso si otterrebbero subito per proiezione da quelle relative al caso generale, trattato nel testo.

(2) Nel caso particolare in cui h è pari, e $r = 2h + 1$, questo risultato si trova già in C. SEGRE, *Le linee principali di una superficie di S_5 e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese*. Questi « Rendiconti », ser. 5^a, vol. XXX, 1921.

secondo quanto precede, $\sigma^{(0)}$ che chiamiamo ora σ è certamente un numero pari, tale che

$$2 \leq \sigma \leq 16, \quad \text{oppure} \quad \sigma = \infty.$$

Mi sono proposto di approfondire questi diversi casi. Da quanto si dirà risulta implicitamente che essi sono tutti effettivamente possibili.

Il sistema ∞^1 è notoriamente formato da piani tangenti a una linea Γ dello S_5 ; supponendola descritta dal punto $x(t)$, un piano generico del sistema appare come congiungente il punto $x(t)$ col punto suo derivato $x'(t)$ e con un ulteriore punto $y(t)$ situato fuori del piano osculatore alla linea Γ nel punto $x(t)$. Prescindendo da casi particolari senza interesse l'ipotesi $\sigma > 2$ (cioè $\sigma \geq 4$) equivale a quella che risulti

$$y' = Ax + Bx' + Cx'' + Dx''' + Ey,$$

con A, B, C, D, E funzioni della t , mentre l'ipotesi $\sigma \geq 6$ implica ulteriormente

$$x^v = h_0 x + h_1 x' + h_2 x'' + h_3 x''' + 5 \left(E - \frac{D'}{D} \right) x^{iv} + h_5 y,$$

con h_0, h_1, h_2, h_3, h_5 pure funzioni di t . Quindi, per $\sigma \geq 6$, si ha da considerare il sistema formato da queste due equazioni: il sistema si può opportunamente semplificare e ridurre alla forma

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} y' = Ax & + x''', \\ x^v = h_0 x + h_1 x' + h_2 x'' & + h_5 y. \end{cases}$$

Un tale sistema individua una classe di sistemi ∞^1 di piani tutti proiettivamente equivalenti fra loro; è quindi naturale che i vari casi $\sigma \geq 6$ si possano ulteriormente distinguere in base a particolari relazioni a cui devono soddisfare le funzioni che compaiono quali coefficienti nel sistema (Σ) . Precisamente, calcoli non semplici conducono ai seguenti risultati. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè risulti $\sigma \geq 2m + 2$ è che sia $\sigma \geq 2m$, e che inoltre sia verificata l'equazione (I_{2m+2}) dove (posto $h_2 + h_5 = s$)*

$$\sigma \geq 8, \quad (I_4) \quad A = \frac{9}{7} s - h_2,$$

$$\sigma \geq 10, \quad (I_5) \quad 14 h_0 - 7 h_1' + 3 s'' = 0,$$

$$\sigma \geq 12, \quad (I_6) \quad 5 s h_1 = 5 s s' + 2 s' h_2 - 2 s h_2',$$

$$\sigma \geq 14, \quad (I_7) \quad 150 s' s'' - 70 s' h_2'' + 70 s'' h_2' + 25 s'' h_1 - 175 s' h_1' + \\ + 6 s (5 s - 7 h_2) (11 s - 7 h_2) = 0,$$

$$\sigma \geq 16, \quad (I_8) \quad 525 s'' s''' - 280 s'' h_2''' + 280 s''' h_2'' + 175 s''' h_1' - 700 s'' h_1'' + \\ + 6160 s s'^2 - 1320 s^2 s'' + 336 s^2 h_2'' - 7056 s s' h_2' + 2352 s s'' h_2 - 7133 s'^2 h_2 + \\ + 1344 s h_2'^2 - 294 s h_2'' h_2 + 4144 s' h_2' h_2 + 1645 s' h_2 h_1 - 882 s' h_2^2 = 0.$$

Quanto alla effettiva possibilità di realizzare queste condizioni, le (I_4) , (I_5) danno intanto rispettivamente i valori di A , b_0 . Quanto alle successive, esse sono certo ovviamente soddisfatte se $s = 0$, cioè — come si trova cercando il significato geometrico di tale condizione — se il sistema ∞^1 di piani appartiene a uno dei due sistemi ∞^3 di piani esistenti su una quadrica irriducibile dello S_5 . Esclusa questa eventualità, la (I_6) porge il valore di b_1 , e le equazioni ulteriori contengono soltanto più s , b_2 , oppure s , λ se si pone $b_2 = \lambda s$, cosicchè la (I_7) viene a scriversi

$$(I_7) \quad s \Phi \lambda' = 3 s^3 (7 \lambda - 5) (7 \lambda - 11), \quad \text{dove} \quad \Phi = 7 s'^2 - 6 s s''.$$

Ad essa si soddisfa (adottata una $s = s(t)$ arbitraria)

a) o cercando una λ costante, la quale risulta necessariamente

$$\lambda = \frac{5}{7} \quad \text{oppure} \quad \lambda = \frac{11}{7};$$

b) oppure adottando (purchè s non sia tale da annullare la Φ)

$$\frac{7 \lambda - 11}{7 \lambda - 5} = e^{\frac{126}{5} \int \frac{s^3 dt}{\Phi}}.$$

Volendosi poi realizzare ulteriormente anche la (I_8) , essa sussiste già senz'altro se la (I_7) è soddisfatta secondo il sottocaso a), e allora è già $\sigma = \infty$. Altrimenti, la funzione s non è più arbitraria, ma deve soddisfare a una certa equazione differenziale del quart'ordine

$$\Omega(s) = 0$$

mentre la λ si ha in termini finiti.

Al di là di $\sigma = 16$, non si può avere che $\sigma = \infty$. In tal caso, i piani del sistema ∞^1 sono a due a due incidenti in un punto: utilizzando un bel teorema del Morin⁽¹⁾, il quale ha determinato per via algebrica tutti i sistemi infiniti (continui) di piani a due a due incidenti, ho caratterizzato i sistemi ∞^1 di piani con $\sigma = \infty$, nell'ordine di idee che precede, nel modo seguente: *perchè sia $\sigma = \infty$ è necessario e sufficiente che sia soddisfatta una delle tre condizioni*

$$s = 0 \quad , \quad \lambda = \frac{5}{7} \quad , \quad \lambda = \frac{11}{7}$$

dove rispettivamente:

(1) *Sui sistemi di piani a due a due incidenti.* « Atti del R. Istit. Veneto », to. LXXXIX, 1930. Il teorema del Morin si potrebbe ritrovare con metodo completamente diverso da quello, algebrico, da lui seguito, proseguendo nel procedimento differenziale da me adottato per i valori finiti di σ .

nel primo caso restano arbitrarie nel sistema (Σ) le funzioni h_1 e h_2 , mentre A e h_0 si desumono dalle (I_4), (I_5) e $h_5 = -h_2$;

nel secondo e nel terzo caso resta arbitraria la funzione $s(t)$ (supposta non identicamente nulla) mentre le funzioni A , h_0 , h_1 si ricavano dalle (I_4), (I_5), (I_6) e $h_2 = \lambda s$, $h_5 = s - h_2$. I tre casi corrispondono ordinatamente alle tre soluzioni determinate dal Morin (esclusi naturalmente i sistemi elementari, formati o da piani per un punto fisso, o da piani di uno S_4 , o da piani incidenti in rette in un piano fisso): piani appartenenti a uno stesso sistema ∞^3 di piani esistente su una quadrica irriducibile, piani tangenti a una superficie di Veronese, e infine piani di coniche appartenenti a una superficie di Veronese.

3. La caratterizzazione dei vari casi corrispondenti ai vari valori di σ , quale fu esposta nel numero precedente, ha carattere puramente analitico, salvo quanto riguarda il caso $\sigma = \infty$, dove si ha già un significato geometrico. Ho quindi cercato di interpretare geometricamente anche le condizioni trovate per i casi precedenti, in un ordine di idee che si riattacca precisamente alla interpretazione geometrica valida nel caso estremo $\sigma = \infty$.

Dal punto di vista intuitivo, se la circostanza che due piani consecutivi di un sistema ∞^1 si verifica in un ordine di approssimazione elevato, è plausibile rappresentarsi la cosa nel senso che un certo numero di piani consecutivi, dipendente da quell'ordine di approssimazione, abbiano a due a due un punto comune e quindi offrano a ipersuperficie algebriche destinate a contenerli un numero di condizioni inferiore rispetto a quello che sarebbe offerto da altrettanti piani generici, dove l'abbassamento del numero di condizioni si calcola facilmente *a priori*, salvo il presentarsi di circostanze particolari che possono p. es. intervenire per $\sigma = 16$, circostanze sulle quali qui sorvoliamo. Naturalmente per l'ordine di quelle ipersuperficie si dovrà adottare un valore abbastanza elevato perchè esse possano effettivamente passare per un certo numero di piani consecutivi (anche se questi offrono meno condizioni dell'ordinario). Per ottenere un risultato espressivo, soltanto per $\sigma = 2$ si può adottare un iperpiano come congiungente di due piani consecutivi; ma per valori più elevati bisogna ricorrere a quadriche, o a ipersuperficie cubiche. Effettivamente si trova che:

un sistema ∞^1 di piani dello S_5 tale che il piano generico sia incidente a quello infinitamente vicino in un punto con ordine di incidenza σ ($2 \leq \sigma \leq 8$) gode della proprietà caratteristica che:

1) per $\sigma \geq 2$ esiste un sistema ∞^9 di V_4^2 (generalmente irriducibili) passanti per un piano generico del sistema e per il consecutivo;

2) per $\sigma \geq 4$ — in aggiunta a 1) — esiste una quadrica *IRRIDUCIBILE*, e quindi ∞^5 , passanti per un piano generico del sistema e per altri due consecutivi;

3) per $\sigma \geq 6$ — in aggiunta a 1), 2) — esiste una quadrica *IRRI-*

DUCIBILE, e quindi ∞^2 , passante per un piano generico del sistema e per altri tre consecutivi;

4) per $\sigma \equiv 8$ — in aggiunta a 1), 2), 3) — esiste una quadrica irriducibile passante per un piano generico del sistema e per altri quattro consecutivi.

Inoltre: per $\sigma \equiv 8$ si hanno $\infty^{15} V_4^3$ passanti per un piano del sistema e per altri quattro consecutivi. Ciascuno dei casi $\sigma \equiv 10$, $\sigma \equiv 12$, $\sigma \equiv 14$ è caratterizzato rispetto a quello che lo precede, dal fatto che esistono rispettivamente ∞^{10} , ∞^6 , $\infty^3 V_4^3$ passanti per un piano generico e per altri rispettivamente cinque, sei, sette piani consecutivi. Non ci fermiamo sull'interpretazione analoga per $\sigma \equiv 16$, perchè qui le condizioni trovate nel n. 2 non si ricoprono completamente con quelle che esprimono l'esistenza di un sistema ∞^1 di V_4^3 congiungenti un piano con otto ulteriori ad esso consecutivi, cosa che riesce naturale a chi rifletta sull'essenza geometrica della questione. Il passo successivo verso $\sigma = \infty$ conduce invece a inquadrare questi risultati con quello del Morin, ricordato al numero precedente.

Fisica. — *Una nuova interpretazione della propagazione nel secondo mezzo nella riflessione totale.* Nota di G. USIGLIO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio Q. MAJORANA.

1. Non consta, come è noto, che sia stata data, fino ad ora, una interpretazione esauriente del meccanismo che regola la propagazione della perturbazione nel secondo mezzo, nel fenomeno della riflessione totale. Una simile interpretazione dovrebbe prestarsi specialmente a chiarire, senza il sussidio di particolari ipotesi supplementari, il meccanismo di tale propagazione per il caso in cui il fascio incidente, invece che essere illimitato così come lo si considera di solito nella teoria generale, sia limitato, così come lo sono, necessariamente, tutti i fasci sperimentali; nonchè a coordinare armonicamente i risultati fin qui ottenuti anche in quelle particolari esperienze in cui, in conseguenza della limitazione di apertura dei fasci in esame, le manifestazioni nel secondo mezzo finiscono per avere il carattere di fenomeni di diffrazione.

Scopo della presente Nota è, anzitutto, quello di esporre la prima approssimazione di un modello che permetta di stabilire, per ogni valore dell'angolo di incidenza e per ogni punto del secondo mezzo, la provenienza in esso della perturbazione che, in ogni istante, ne caratterizza lo stato e di mostrare poi come esso si presti al coordinamento di vari fatti sperimentali osservati fino ad ora.

(1) Nella seduta del 2 febbraio 1936.

2. Si consideri l'arrivo, sulla superficie di separazione tra due mezzi dei quali il secondo meno rifrangente del primo, di un'onda elettromagnetica che si suppone, per semplicità, polarizzata in modo da avere il vettore elettrico nel piano di incidenza. Essa determina, come si è altra volta mostrato, una distribuzione di fase, sulla superficie di separazione, che possiede una velocità di propagazione apparente $V' = \frac{V_1}{\sin i} = \frac{V_2}{n \sin i}$ (dove V_1 e V_2 sono, al solito, le velocità di propagazione nei due mezzi, i l'angolo di incidenza, n l'indice di rifrazione) e che dà luogo, nel caso dell'incidenza inferiore a quella critica ($V' > V_2$) ad un passaggio continuo (ben s'intende in direzione e senso), di energia attraverso la superficie di separazione; energia che costituisce il fascio rifratto.

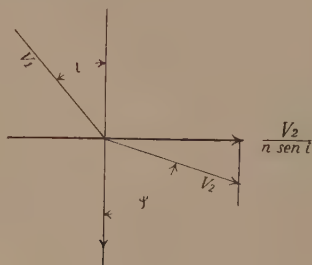


Fig. 1.

È noto che tale passaggio cessa all'incidenza limite ($V' = V_2$), per ricominciare, in qualche modo, allorché essa venga oltrepassata. Appare quindi spontaneo il pensare che, anche in questo caso, l'arrivo dell'onda incidente determini il passaggio attraverso il piano rifrangente, di una perturbazione penetrante nel secondo mezzo, con continuità su tutta la superficie di tale piano; la quale perturbazione non potrà però propagarsi nel secondo mezzo con le stesse modalità di quella per onde piane in quanto il fatto di essere la velocità di propagazione in esso superiore a quella apparente impressa nella sezione dall'onda incidente, glielo impedisce.

Si ritiene opportuno osservare fino da ora che una analoga perturbazione che dal secondo mezzo si dirigesse verso il primo simmetricamente alla ipotetica propagazione prima posta, potrebbe invece, per le ragioni inverse a quelle ora accennate, propagarsi nel primo mezzo, al di là del piano separatore, sotto forma di onde piane e, si può aggiungere, nella direzione del fascio riflesso.

Premesse queste considerazioni, si riprenda in esame la perturbazione incidente e si consideri un punto qualsiasi posto nel secondo mezzo a distanza non troppo grande dalla superficie rifrangente. Secondo le vedute sopra esposte, a tale punto dovrebbe, in ogni determinato istante, competere una perturbazione proveniente con continuità da un corrispondente punto del piano

separatore ⁽¹⁾. Per stabilire ora la direzione di provenienza di tale perturbazione, si faccia la seguente considerazione: le espressioni che forniscono i valori delle componenti dei vettori rifratti esprimono, nel caso dell'incidenza inferiore a quella critica, che la perturbazione si sposta in linea retta con velocità di fase V_2 caratteristica del mezzo in cui essa si svolge. Nelle formule stesse compare poi l'angolo di rifrazione il quale, ad incidenza limite superata, si trova ad avere perduto ogni significato reale; ciò che, secondo le vedute di Fresnel ⁽²⁾, comporta la perdita di quella continuità della fase tra i vettori incidente e riflesso attinenti ad uno stesso punto del piano rifrangente, che faceva parte delle ipotesi sulle quali le relazioni stesse erano state impostate.



Fig. 2.

Si può anche pensare, d'altronde, che tale perdita di significato reale, sia in istretto rapporto col sorgere, nel secondo mezzo, di un tipo di propagazione (la cui ripercussione sui fenomeni svolgentesi nel primo, comporti la perdita della continuità di fase ora menzionata), che non possa venire rappresentata dalla forma in cui le espressioni sono state poste (che è esclusivamente riservata alle normali onde piane), ma che mantenga immutate alcune altre caratteristiche. Sotto tale punto di vista, siccome, tuttavia, una propagazione esiste anche in questo caso, nulla vieta di pensare che la perturbazione si sposti ancora nel secondo mezzo con la velocità di fase V_2 ; venendosi con ciò ad ammettere che sia questo uno dei fatti fisici fondamentalmente espressi dalle formule.

Procedendo su questa via è facile vedere quali siano le direzioni rettilinee che, partendo da un punto della superficie di separazione, giungono ad un punto qualsiasi dell'interno del secondo mezzo in modo che la velocità di fase sia precisamente V_2 . Se si osserva che la velocità di propagazione

apparente è $V' = \frac{V_2}{n \sin i}$, per tutti i piani paralleli a quello rifrangente (esso

compreso), si ricava immediatamente che le direzioni cercate sono tutte quelle che formano con la normale al piano separatore l'angolo ψ tale che

$$\sin \psi = \frac{1}{n \sin i}.$$

(1) Si osservi che parlare di propagazione della perturbazione da un punto ad un altro, può essere, nel caso in esame, ancor meno rigoroso di quanto non lo sia in quello relativo alle onde piane; tuttavia l'espressione verrà egualmente usata come atta a fornire una prima approssimazione del modello in istudio.

(2) FRESNEL, *Oeuvres*, I, 781.

3. Il complesso delle direzioni ora stabilite, costituirebbe quindi un fascio penetrante nel secondo mezzo; la perturbazione ad esso dovuta dovrebbe allora venire rappresentata, in ciascun punto, da quella componente del vettore ellittico dato dalla teoria, che è normale alla direzione stessa; si verrebbe in tal modo ad ottenere un fascio che si propagherebbe nel secondo mezzo con velocità V_2 , i cui vettori, in fase su piani normali alla direzione di propagazione apparente, andrebbero rapidamente attenuandosi. Giova, a questo punto, richiamarsi all'analogia esistente tra il fascio ora considerato e quello relativo alle onde che si propagano nei mezzi assorbenti ⁽¹⁾; in questo, i cui campi pure si attenuano rapidamente, non si è esenti da dissipazione di energia per parte del mezzo; in quello, invece (la cui propagazione avviene in un dielettrico ideale), dovrà ritenersi che l'energia abbandonata lungo il percorso, si costituisca integralmente in un fascio di ritorno che, rinforzando i suoi campi lungo la via a spese di quanto viene ceduto dal fascio primitivo, giunga al piano di separazione; propagandosi poi nel primo mezzo, sotto forma di onda piana.

Fatte queste necessarie premesse, si consideri il complesso delle direzioni simmetriche a quelle prima definite per la perturbazione entrante, e si ponga mente, per ciascun punto di ognuna di esse, al vettore loro normale che, sommato a quello prima definito, ricostituiscce quello ellittico complessivo dato dalla teoria; si è così precisata, almeno nei riguardi del vettore elettrico, una perturbazione che, sovrapposta alla prima, può completare la descrizione dello stato effettivo dei vari punti.

Una scomposizione analoga dovrebbe farsi per il vettore magnetico; per il quale però talune condizioni si presenterebbero in modo differente in conseguenza della diversa giacitura e di altre considerazioni che, per ora, si omettono. Se poi la polarizzazione fosse diversa da quella presa in esame e, conseguentemente, il vettore elettrico avesse anche una componente nel piano normale a quello di incidenza, si dovrebbe operare la scomposizione anche per questa; varrebbe, in tal caso, la considerazione della giacitura fatta sopra. La differenziazione che ne consegue nelle condizioni di scomposizione e particolarmente in quella della fase, sarebbe una delle cause della ben nota ellitticità della luce totalmente riflessa.

Finalmente si osserva che i vettori di ciascuna delle due propagazioni attinenti ad uno stesso punto della superficie rifrangente, non sarebbero tra loro in fase; il loro sfasamento apparirebbe non appena oltrepassata l'incidenza limite ed aumenterebbe con l'incidenza stessa. Il che, del resto, deve essere, se vi è passaggio di energia attraverso il piano separatore; ciò che comporta, di necessità, l'esistenza di una componente tangenziale che, a sua volta, per esistere quale risultante di due vettori simmetrici e di eguale ampiezza, esige il loro sfasamento.

(1) Cfr., p. es., BOUASSE, *C. de Phys.*, vol. V, p. 261.

Riassumendo verrebbe così ad essere definita una perturbazione che, proveniente dell'onda incidente, si propagherebbe nel secondo mezzo esaurendosi rapidamente nel generarne una seconda la quale, rinforzandosi con pari rapidità, rientrerebbe nel primo sotto forma di onda piana, sovrappoentesi a quella direttamente riflessa (1).

I due fasci, componendosi, darebbero origine ai campi voluti dalla teoria; il loro sfasamento in ogni punto della superficie di separazione darebbe luogo alla pulsazione alterna di energia traverso a quest'ultima, pure voluta dalla teoria; l'azione del fascio rientrante essendo, in ogni punto del piano rifrangente, sfasata rispetto a quella direttamente rinviata dal piano stesso, darebbe, nella sovrapposizione, un'onda totalmente riflessa sfasata rispetto a quella incidente.

Si può quindi concludere che, almeno per quanto riguarda i rapporti con le propagazioni del primo mezzo le cose vanno esattamente come se i due fasci ora definiti esistessero. Per meglio giustificare tale loro esistenza, sarà necessario vedere come essi si comportino nel caso in cui sia possibile osservarli separatamente. Su questo punto si ritornerà tra breve. Si fa però presente fino da ora che le esperienze classiche di Newton (2) e Quincke (3) danno risultati che concordano col modello ora esposto.

4. Nella discussione della formula $\sin \psi = \frac{1}{n \sin i}$ occorre distinguere il caso dell'incidenza vicinissima a quella limite dall'altro relativo ad incidenza sufficientemente lontana da essa.

1° Caso. La formula sopra scritta mostra che (essendo al limite $n \sin i = 1$) le direzioni di propagazione del fascio entrante sono pressoché parallele alla faccia rifrangente. L'espressione che dà le componenti vettoriali, mostra che la decrescenza esponenziale è poco sentita, tendendo essa a scomparire all'incidenza limite (per la quale si ha: $K = \sqrt{n^2 \sin^2 i - 1} = 0$).

Abbinando questi due risultati si può concludere che, in questo caso, i vettori del fascio che si è chiamato entrante, vanno decrescendo in ampiezza assai lentamente con l'allontanamento radiale dalla superficie rifrangente; siccome, d'altra parte, la decrescenza, se pure piccola, esiste, si conclude che, trascorso un sufficiente intervallo di tempo, i punti dello spazio occupato dal secondo mezzo sono per buona parte perturbati; mentre i rimanenti non lo saranno mai, anche per intervalli di tempo tendenti all'infinito, pur trovandosi essi a distanze finite (per quanto grandi). Il fascio si presenta con

(1) Alcune particolarità della propagazione ora definita, dovrebbero venire ulteriormente approfondite; come, per esempio, la fase della perturbazione entrante in rapporto a quella incidente.

(2) NEWTON, *Opt.*, lib. II, obs. I, 4, 7.

(3) QUINCKE, « Pogg. Ann. », 127, I, 199, 1866.

caratteri analoghi a quello emergente in condizioni di incidenza simmetriche rispetto all'angolo critico: infatti il piano di egual fase è pressochè normale alla direzione di propagazione; ma se ne differenzia nettamente per alcune caratteristiche sostanziali: infatti, per esempio, non gode della proprietà di propagare indefinitamente i propri campi senza diminuzione della loro ampiezza.

2° Caso. Per poco che l'incidenza si allontani dal valore prima considerato, diminuisce l'angolo che le direzioni di propagazione formano con la normale al piano rifrangente e, nel contempo, si accresce rapidamente l'importanza del fattore esponenziale negativo. Il fenomeno viene a limitarsi in profondità ed assume l'aspetto che gli ha valso il nome di *evanescente*. In tali condizioni sono perturbati i soli punti di una porzione di spazio limitata da un piano parallelo e vicinissimo a quello rifrangente; essendo la distanza tra essi dell'ordine della lunghezza d'onda.

Riassumendo, in definitiva, quanto si riferisce alla rifrazione di un fascio di radiazioni parallele nel passaggio da un mezzo ad un altro meno rifrangente, si può dire che:

si passa dalla propagazione *illimitata* del caso dell'incidenza inferiore a quella critica (velocità reale nel secondo mezzo inferiore a quella apparente nella sezione), a quella *limitata* del caso di incidenza superiore ad essa (velocità reale superiore a quella apparente), attraverso la propagazione *nulla* del caso limite (eguaglianza tra le due velocità). Per valori vicinissimi al limite, ma ad esso superiori, il fascio entrante, quasi parallelo alla superficie rifrangente, si spinge a notevole distanza radiale prima di potersi considerare esaurito; per poco però che l'incidenza aumenti, la distanza radiale raggiunta dal fascio in discorso diviene assai piccola, assumendo valore dell'ordine della lunghezza d'onda.

Si accenna infine alla analogia che l'interferenza dei due fasci proposti offre con quella di due fasci paralleli identici e propagantesi nella stessa direzione; come questi, i due primi non danno luogo a frangie, mentre il fatto che abbiano direzione di propagazione che formano un angolo diverso da zero, rende poi possibile l'effettivo stabilirsi dei campi voluti dalla teoria generale.

5. Allo scopo di dare un'apparenza di legittimità alla interpretazione fornita, occorrerà vedere, come si è fatto presente in un altro lavoro, se essa è in accordo coi risultati sperimentali osservabili fuori della zona comune ai due fasci. Ora è facile comprendere che, a tal fine, occorrerà riferirsi alle incidenze vicinissime a quella critica in quanto, usando un fascio limitato e giovandosi della notevole distanza radiale cui dovrebbe giungere il fascio entrante nel secondo mezzo, si potrà nutrire speranza di ottenere in esso delle manifestazioni osservabili. Ciò sia detto per quelle esperienze che ver-

tono su lunghezze d'onda dell'ordine della gamma luminosa; per mezzo delle onde hertziane possono, come sarà riferito in altra occasione, ottenersi verifiche anche per incidenze notevolmente distanti da quelle limite.

Si consideri allora un fascio parallelo monocromatico che sia fatto cadere, con incidenza vicina a quella limite, ma ad essa *inferiore*, su di un prisma a riflessione totale; si otterrà, naturalmente, nel secondo mezzo un fascio emergente la cui sezione dipenderà dall'angolo di incidenza e dalla apertura del fascio incidente, oltre che dal rapporto tra le velocità nei due mezzi. Tale fascio emergente, come è noto, si diffrange secondo una semplice legge trovata e verificata da Chakrawarty ⁽¹⁾.

Se si tenta ora di prevedere che cosa debba accadere nel secondo mezzo per una incidenza ancora poco distante da quella limite, ma ad essa *superiore*, si è tratti a pensare che, data la somiglianza del nuovo fascio emergente con l'altro, debba aversi ancora diffrazione retta dalle stesse leggi che valgono per quello; come pure che analogo risultato debba aversi nel caso limite (nel quale la teoria generale, che indica penetrazione nulla, non può venire direttamente applicata in causa della limitazione del fascio e, se si vuole, dell'imperfezione insita nei mezzi sperimentali); caso però che appare costituire una naturale transizione tra i due tipi di propagazione.

Se si pensa poi che l'incidenza aumenti, si vede che il fascio entrante, nel mentre modifica la sua direzione avvicinandosi alla normale, viene a ridursi rapidamente nella distanza radiale raggiunta; il rapporto quindi tra la sua base (larghezza della zona illuminata dal fascio incidente) e la sua dimensione radiale diviene rapidamente grande, ciò che fra prevedere una pronta sistemazione del processo con conseguente scomparsa dei fenomeni di diffrazione. *le deduzioni di cui sopra sono state pienamente verificate dall'esperienza, come mostrano le ricerche che Raman ha condotto per incidenze superiori a quella limite* ⁽²⁾.

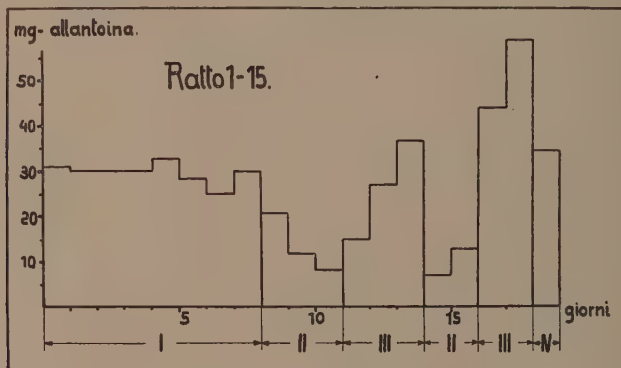
Si noti infine che il modello proposto, interpreta il problema dei bordi anteriore e posteriori di un fascio limitato in modo che, per quanto si riferisce agli scambi energetici, appare, almeno ad un primo esame, del tutto simmetrico. Ciò non è privo di importanza in quanto, nelle varie interpretazioni vi è tendenza ad ammettere la dissimetria tra le funzioni dei due bordi stessi; mentre Raman ebbe a constatare, nel corso delle esperienze citate, l'aspetto perfettamente eguale dei bordi della zona illuminata dal fascio in esame. La fig. 2 mostra schematicamente, ciò che, secondo il modello, avverrebbe ai bordi di un fascio limitato.

(1) CHAKRAWARTY, *On the diffraction of Light Incident at nearly the Critical Angle on the Boundary between two Media*. «Proc. of t. R. Soc.», 99, 503, 1921.

(2) RAMAN, *On the Nature of the Disturbance in the Second Medium in Total Reflexion*. «Phil. Mag.», 50, 812, 1925.

Chimica biologica. — *Variazioni dell'escrezione dell'allantoina nel ratto, in rapporto a diete chetogene e antichetogene*⁽¹⁾.
Nota di G. BERGAMI, P. BAER, E. BOERI, presentata⁽²⁾ dal Socio C. Foà.

Durante lo svolgimento di alcune ricerche sui fattori che regolano l'eliminazione dell'acido urico nell'uomo, attualmente in corso in questo Istituto, si è avuto occasione di confermare la diminuzione dell'escrezione urinaria dell'acido urico per effetto di una alimentazione molto ricca in grassi e povera di carboidrati, già osservata da alcuni Autori.



Eliminazione urinaria dell'allantoina nel Ratto 1-15.
Sull'asse delle ascisse sono indicati i giorni, su quello delle ordinate i mg di allantoina totale eliminate *pro die*.
I numeri romani (tra le frecce) indicano i tipi di diete sperimentati nei giorni limitati dalle frecce stesse.

Noi abbiamo voluto successivamente indagare se questa influenza esercitata dalle diete chetogene sull'escrezione dell'acido urico, si esplica anche su quella dell'allantoina, prodotto terminale del metabolismo dei nucleoproteidi nei comuni animali di laboratorio.

Noi abbiamo sperimentato per ora su ratti albinì di razza Wistar pura, adulti, del peso da gr. 250 a 370 circa. I ratti sono stati mantenuti in gabbie per ricambio completamente in vetro; le urine venivano raccolte giorno per giorno per la determinazione quantitativa dell'allantoina (Larson), dell'azoto

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 2 febbraio 1936.

totale (Kjeldahl) e dall'acido urico. Data la scarsa quantità di acido urico eliminata giornalmente dai ratti nelle nostre condizioni sperimentali, abbiamo dovuto, dopo vari tentativi, isolare l'acido urico con lattato di argento e usare il metodo di Benedict, modificato da Christman e Ravwitch.

In un primo periodo, i ratti sono stati alimentati con una dieta ricca in carboidrati con scarse proteine e pochissimo azoto purinico, circa 3 mg. pro-die (patate bollite, insalata, 3-5 gr. di salame; dieta I).

In un secondo periodo, si è somministrata una dieta particolarmente ricca in grassi e apurinica (lardo e una foglia di insalata; dieta II, chetogena).

In un terzo periodo si è somministrata una dieta ricca in carboidrati e apurinica (mele e marmellata di cotogne; dieta III antichetogena).

In un quarto periodo si è ripresa l'alimentazione a base di grassi (dieta II).

In un quinto periodo si è dato ancora la dieta di carboidrati (dieta III).

I risultati ottenuti sono stati perfettamente concordi in tutti gli animali. Come risulta dalla grafica riassuntiva riferentesi ad uno degli animali sperimentati (ratto 1-15); l'eliminazione dell'allantoina, che durante il periodo di dieta iniziale mista (dieta I) oscillava sui 35 mg. giornalieri, è bruscamente discesa durante l'alimentazione con grassi (dieta II) per risalire durante la successiva somministrazione di carboidrati (dieta III).

Ritornando ancora alla dieta di grassi (dieta II) l'escrezione dell'allantoina è ancora una volta diminuita fortemente, per tornare poi ad aumentare notevolmente al di là del livello iniziale, per effetto di una nuova somministrazione di carboidrati (dieta III). Quando si è infine messo l'animale a dieta mista tipicamente apurinica (dieta IV), l'escrezione dell'allantoina è ritornata al valore medio iniziale.

L'acido urico, eliminato dai ratti nelle nostre condizioni solo in quantità in genere inferiori a 1,5 mg., presentò nel corso degli esperimenti, piccole variazioni dello stesso segno di quelle dell'allantoina (escrezione massima = circa 7 mg. pro-die).

L'azoto totale variò naturalmente a seconda del tipo di alimentazione, ma non in rapporto con l'eliminazione dell'azoto purinico.

Al termine dell'esperimento il peso dei ratti non ha presentato variazioni degne di nota.

Dato il carattere preliminare di questa comunicazione noi ci limitiamo per ora ad affermare la possibilità d'influenzare per mezzo di diete più o meno ricche in grassi, l'eliminazione dell'allantoina nel ratto.

Geologia. — *Una spiaggia pleistocenica a «Strombus bubonius» presso Palidoro (Roma)*⁽¹⁾. Nota di A. C. BLANC, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. G. STEFANINI.

Il Pleistocene marino delle coste laziali, noto per i lavori di Bleicher, Meli, Gignoux, De Angelis d'Ossat ecc. è assai povero di giacimenti fossiliferi contenenti fauna tipica. Nel Lazio settentrionale Gignoux⁽³⁾ ha segnalato dei depositi marini corrispondenti ad almeno due diversi piani quaternari. Una serie di depositi, che si trovano a 40–60 m. s. l. m., è stata riconnessa dall'A. al piano Siciliano (*sensu lato*): questa attribuzione è basata sul solo criterio stratigrafico, non essendo stata ivi rinvenuta alcuna forma tipica. Un'altra serie di giacimenti, situati a 15–30 m. s. l. m. è stata attribuita al piano Tirreniano: in questo caso l'applicazione del criterio stratigrafico è stata suffragata dal riconoscimento, operato da Gignoux, di un esemplare di *Conus testudinarius* Mart. tra il materiale fossile raccolto in un lembo di spiaggia a Corneto Tarquinia e custodito presso il R. Ufficio Geologico di Roma. In quel medesimo giacimento è stato rinvenuto, a maggior conferma, uno *Strombus bubonius* Lamk.⁽⁴⁾ Gli altri depositi di « panchina », più o meno fossiliferi, di Civitavecchia, I Due Ponti, Monteroni, Palo, Anzio e Nettuno le cui faune sono state studiate da Bleicher⁽⁵⁾, Meli⁽⁶⁾, Gignoux⁽⁷⁾, non hanno fornito che elenchi di specie banali, senza alcun significato stratigrafico. Solo recentemente ho rinvenuto la fauna tipica a *Strombus bubonius* sul litorale di Nettuno e nel sottosuolo dell'Agro Pontino⁽⁸⁾.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta 2 febbraio 1936.

(3) M. GIGNOUX, *Les formations marines pliocènes et quaternaires de l'Italie du Sud et de la Sicile*. Lyon, 1913, p. 295 sgg.

(4) R. MELI, *Sopra un lembo di argille plioceniche affioranti presso la salina di Corneto Tarquinia in provincia di Roma*. « Boll. Soc. Geol. It. », XXXIV, 1915, p. 321 sgg.; e M. GIGNOUX, *Les couches à Strombus en Sardaigne, en Corse et dans la Province de Rome*. « Annales de l'Université de Grenoble », XXVIII, 1916, n. 1.

(5) BLEICHER, *Recherches géologiques faites dans les environs de Rome*. « Bull. Soc. d'Histoire Nat. de Commar », 1866.

(6) R. MELI, *Sui dintorni Civitavecchia*. « Atti R. Accademia Naz. dei Lincei », CCLXXXVII, 1879, 1880. Per le opere di Meli sui depositi di Anzio e Nettuno, v. Bibliografia in A. C. BLANC, *Delle formazioni quaternarie di Nettuno e loro correlazione con la stratigrafia dell'Agro Pontino*. « Boll. Soc. Geol. It. », LV, 1935.

(7) M. GIGNOUX, op. cit., p. 297.

(8) A. C. BLANC, op. cit. e *Stratigrafia del canale Mussolini nell'Agro Pontino*. « Proc. Verb. Soc. Tosc. Sc. Nat. », 14 marzo 1935; *Sulla fauna quaternaria dell'Agro Pontino*. « Proc. Verb. Soc. Tosc. Sc. Nat. », dicembre 1935. DE ANGELIS D'OSSAT, *Quaternario marino presso Anzio*. « Atti Pont. Acc. Sc. Nuovi Lincei », LXXXIV, 1931, aveva già at-

Sono adesso in grado di segnalare un giacimento marino pleistocenico, situato alla quota di circa 19 m. s. l. m. e contenente la fauna a *Strombus bubonius* Lmk., a Casale di Statua, presso Palidoro.

Questo lembo di spiaggia è stato tagliato dalla Via Aurelia, la quale, un poco a Nord del km. 32, appena attraversato il fosso Cupino, incide una collinetta su cui si ergono i ruderi di due torri. La scarpata stradale, al piede di questi ruderi mostra, nello spessore osservabile di circa m. 3,50, la successione stratigrafica seguente ⁽¹⁾:

- | | |
|---|---------|
| A) Terreno vegetale | m. 1.40 |
| B) Sabbia gialla con fauna marina . . | » 0.30 |
| C) Tufo sabbioso con abbondanti minerali vulcanici e ciottoli prevalentemente silicei | » 1.70 |

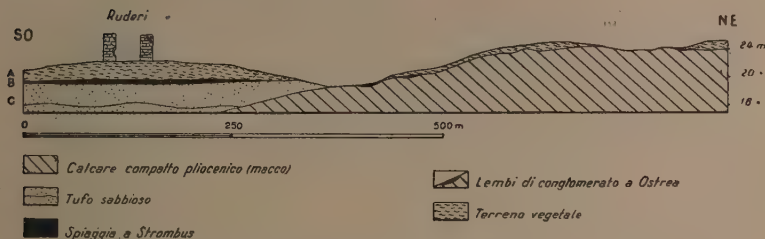


Fig. 1. - Schema della stratigrafia dei depositi pliocenici e quaternari di Casale di Statua (Palidoro).

Nello strato B), che ha un andamento suborizzontale, ho raccolto e determinato la fauna seguente:

1. *Ostrea edulis* L.
2. *Anomia ephippium* L.
3. *Arca Noae* L.
4. » *lactea* L.

tribuito al « piano a Strombus » i tufi vulcanici con conchiglie marine ed il conglomerato sottostante, segnalati dal Meli, e che affiorano a Le Grottaacce, a sud di Nettuno. Questa attribuzione cronologica è stata pienamente confermata dai trovamenti recenti. Ad un piano quaternario più antico del « piano a Strombus » debbono invece assegnarsi le sabbie fossilifere sottostanti i tufi vulcanici compatti o conglomerati di quel litorale. La loro continuità stratigrafica con le marne a *Isocardia cor* e la presenza dei generi *Plicatula* e *Brocchia* (tipicamente pretirreniani) mi hanno fatto ritenere, col Meli, che esse rappresentino i depositi litorali del medesimo mare, regressivo, in cui si erano deposte quelle marne, attribuibili ad un piano quaternario inferiore, probabilmente al Siciliano. Vedi BLANC A. C., *Delle formazioni quaternarie di Nettuno ecc.*, loc. cit.

(1) La presenza di una strato a fauna marina nella scarpata stradale è stata osservata dall'ing. Jourdan, che tengo a ringraziare della segnalazione fattami.

5. *Arca pulchella* Reeve
6. *Pectunculus violacescens* Lmk.
7. *Cardita calyculata* L.
8. *Cardium tuberculatum* L.
9. *Chama gryphoides* L.
10. *Venus gallina* L.
11. » *verrucosa* L.
12. *Donax trunculus* L.
13. » *venustus* Poli
14. *Macra corallina* L.
15. *Corbula gibba* Olivi
16. *Jagonia reticulata* Poli
17. *Loripes lacteus* L.
18. *Nassa* sp.
19. *Raphitoma* sp.
20. *Odostomia* sp.
21. *Strombus bubonius* Lmk.
22. *Bittium reticulatum* Da Costa
23. *Trochus* sp.
24. *Dentalium* (*dentalis* L.?).
25. *Cladocora caespitosa* L.
26. *Odontaspis ferox* Agassiz⁽¹⁾.

Nello strato *C* si intercala, verso la base, una crosta di tufo più compatto, ondulata. I ciottoli silicei, sparsi senza stratificazione in seno al deposito, che ha i caratteri di un sedimento subaereo, presentano la superficie estremamente lucida.

Circa trecento metri a monte, risalendo il fosso Cupino, affiora il calcare compatto pliocenico, noto col nome di « macco »⁽²⁾, presentante uno spessore visibile oltre sei metri. Ho notato che in alcuni punti aderiscono in superficie al macco, fortemente cementati, dei lembi di un conglomerato calcareo, contenente ciottoli silicei (analoghi per dimensioni e per natura a quelli raccolti nello strato *C*) e frammenti di *Ostrea*. Questi conglomerati, discordanti sul macco, si trovano ad altezze non superiori ai 22 m. s. l. m.: ciò posto, e data la prossimità della spiaggia a *Strombus*, credo si possano attribuire anch'essi al mare tirreniano.

La grotta ossifera da me segnalata in questa stessa località⁽³⁾ si apre nel macco a una quota lievemente inferiore ai suddetti lembi marini: essa

(1) Questi fossili sono conservati nel Museo Geologico della R. Università di Pisa.

(2) R. MELI, *Sui dintorni di Civitavecchia*, loc. cit.

(3) A. C. BLANC, *Di una grotta ossifera nei pressi di Palo*. « Proc. Verb. Soc. Tosc. Sc. Nat. », XLIV, 14 marzo 1935.

è stata dunque sommersa durante la trasgressione tirreniana. Non è escluso che l'azione marina abbia contribuito alla sua formazione.

Un altro giacimento fossilifero, costituito da un conglomerato di ciottoli e conchiglie, per lo più ridotti in frammenti, di circa m. 4 di spessore visibile, trovasi sul lato nord della strada che da Palidoro conduce a La Macchia, a circa m. 800 da Palidoro. Vi ho raccolto soltanto specie banali, ma dato che anche questo deposito è situato a circa 20 m. s. l. m. ed ha un andamento suborizzontale, credo sia parimenti da riconnettersi al piano tirreniano.

Tutti i lembi qui descritti fanno parte di un medesimo sistema di depositi terrazzati, nettamente accusato dalla morfologia della regione, alle quote di 20–30 m. s. l. m. ed al quale si ricollega anche il deposito fossilifero segnalato da Gignoux nella prossima località de I Due Ponti ⁽¹⁾.

È dunque confermata l'esistenza, anche sulla costiera laziale settentrionale, dei segni di un movimento regressivo pleistocenico pre-tirreniano, di cui ho segnalato testimonianze particolarmente evidenti nella stratigrafia della costiera Pontina ⁽²⁾. Durante questo periodo di emersione, i depositi marini del quaternario inferiore (Siciliani *sensu lato*) sono stati quasi ovunque (e particolarmente nelle località qui segnalate) erosi e dilavati. I depositi trasgressivi tirreniani ricoprono infatti indifferentemente il calcare eocenico (Civitavecchia), il macco pliocenico, i tufi vulcanici (Palidoro), e le alluvioni costiere (I Due Ponti), formatesi verosimilmente all'inizio del movimento ascendente del livello di base e prima che il mare trasgressivo sommergesse quella parte della pianura ⁽³⁾.

Mentre dall'esame dei depositi costieri dell'Agro Pontino sembra risultare che l'attività vulcanica del gruppo laziale abbia preceduto ed accompagnato, cronologicamente, la trasgressione tirreniana, fino a persistere forse

(1) M. GIGNOUX, *Les formations marines* ecc., loc. cit. Data l'assenza di fauna caratteristica, l'A. non aveva potuto datare con certezza questo interessante giacimento.

(2) A. C. BLANC, *Delle formazioni quaternarie di Nettuno* ecc., loc. cit. Durante la recente campagna di ricerche svolta sotto gli auspicj dell'Istituto di Geologia della R. Università di Pisa, ho constatato quanto segue: presso Foce Verde il canale Mussolini incide un potente banco di tufo vulcanico litoide, che si sovrappone a marne marine analoghe a quelle affioranti a Le Grottacce (probabilmente siciliane) ed è ricoperta dai sedimenti trasgressivi del mare tirreniano, che vi ha deposto la tipica fauna a *Strombus bubonius* Lmk. Questo tufo litoide che, a differenza di quello de Le Grottacce, è completamente privo di fauna marina, contiene un gran numero di filliti calcarizzate, in ottimo stato di conservazione, che indicano un ambiente nettamente continentale. È questa la prima segnalazione di una vegetazione fossile pre-tirreniana, datata dalla sua posizione stratigrafica, in relazione con sedimenti marini contenenti faune caratteristiche.

Lo studio botanico dell'abbondante materiale raccolto in questa località è in corso per opera del dott. E. Tongiorgi, che mi accompagnava durante la suddetta campagna di ricerche.

(3) A. C. BLANC, *Lo studio stratigrafico di pianure costiere*. «Boll. Soc. Geol. It.», LV, 1935, p.

anche durante il periodo iniziale della regressione würmiana ⁽¹⁾, a Palidoro la spiaggia a *Strombus* ricopre gli ultimi tufi vulcanici e non ho potuto osservare alcun segno di depositi di tale natura posteriore a quei lembi marini, i quali sono ricoperti soltanto da sabbia incoerente e terra vegetale. Ciò costituisce un'indicazione sulla cessazione dell'attività del gruppo sabatino, che sembra essere avvenuta precocemente rispetto a quella del gruppo laziale.

Il trovamento della fauna tipica a *Strombus* nei depositi terrazzati di Palidoro, completa utilmente il quadro dei giacimenti tirreniani delle coste laziali. Da Corneto Tarquinia a Civitavecchia, I Due Ponti, Monteroni, Casale di Statua, Palidoro, Nettuno e Foce Verde, la linea di riva tirreniana, i cui depositi costieri si riconnettono, nel bacino del Tevere, al basso terrazzo fluviale ⁽²⁾, ha lasciato le sue traccie ad altezze che non superano i 30 m. s. l. m.

Ciò sembra dimostrare una relativa stabilità della costiera compresa fra Tarquinia e la pianura Pontina, dopo il Tirreniano.

(1) Cfr. G. DAINELLI, *Contemporaneità dei depositi vulcanici e glaciali in provincia di Roma*. «Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei», XV, 16 dicembre 1906.

(2) T. LIPPARINI, *I terrazzi fluviali e marini nella valle inferiore del Tevere*. «Giorn. di Geol.», IX-bis, 1935; A. C. BLANC, *Saccopastore II e i Terrazzi del Tevere*. «Atti e Memorie Istituto Italiano di Paleontologia umana», I, 1936.

Geologia. — *Nuove basi geologiche per la ricerca dei fosfati in Libia* ⁽¹⁾. Nota di A. DESIO, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. DAINELLI.

Fra i risultati raggiunti dalla Missione della Reale Accademia d'Italia in Libia va segnalata, per la sua portata pratica, specialmente la scoperta di una vasta plaga di terreni eocenici che comprende buona parte della Sirtica occidentale e del Fezzan orientale ⁽³⁾. Chi è informato intorno alle condizioni stratigrafiche dei principali giacimenti fosfatiferi dell'Africa settentrionale e conosce almeno nelle linee generali la costituzione geologica della nostra colonia libica e particolarmente della Tripolitania, potrà facilmente apprezzare l'importanza pratica di tale scoperta, la quale prospetta la soluzione del problema dei fosfati libici su criteri geologici analoghi a quelli che hanno guidato al ritrovamento dei fosfati nella regione più prossima, la regione algero-tunisina.

Due parole di riassunto sulle condizioni di questa regione.

I giacimenti fosfatiferi più importanti e, comunque, tutti quelli sfruttati industrialmente dell'Africa nord-occidentale (Tunisia, Algeria e Marocco) sono contenuti, com'è noto, nei terreni dell'Eocene inferiore e per lo più nel Londiniano ⁽⁴⁾. Ma i terreni di tale età non sono sempre fosfatiferi.

Delle quattro facies (tre secondo altri) che si possono riconoscere nell'Eocene del territorio algero-tunisino solo due hanno presentato giacimenti fosfatiferi d'importanza industriale e sono le facies di mare meno profondo, caratterizzate una (facies 3^a) dai calcari nummulitici, l'altra (facies 4^a) dai calcari ad Ostree.

Ecco le serie caratteristiche corrispondenti a tali facies:

Facies 3^a.

Eocene medio . . .	{	7. — Calcari a <i>Nummulites curvispira</i> Mgh. e <i>N. gizehensis</i> Forsk.
		6. — Calcari marnosi e calcari a <i>Nummulites atatica</i> Leym. e <i>N. gizehensis</i> Forsk.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 2 febbraio 1936.

(3) *Missione Scientifica della Reale Accademia d'Italia a Cufra (1931)*, vol. I; A. DESIO, *Studi geologici sulla Cirenaica, sul Deserto Libico, sulla Tripolitania e sul Fezzan orientale*. Roma, 1935.

(4) C. PILOTTI, *Cenni sui giacimenti di fosfato dell'Algeria e della Tunisia*. Roma, 1908; M. L. BERTHON, *Les reserves de la Tunisie en acide phosphorique*. Madrid, 1929; O. STUTZER, W. WETZEL, *Phosphat-Nitrat*. Berlino, 1932.

Eocene inferiore . .	{	5. — Banco di calcare fosfatifero con <i>Nummulites planulata</i> Lamk., <i>N. elegans</i> Sow. associato con calcare glauconioso a <i>Eupsammia</i> .	} Londiniano.
		4. — Calcarei e calcari marnosi a Globigerine ed <i>Eupsammia</i> .	
Creta superiore . .	{	3. — Marne nere dette « Marne suessoniane ».	} Maestrichtiano e Daniano (?).
		2. — Calcarei giallastri nodulosi alternanti con marne grigie.	
		1. — Calcarei bianchi a Inocerami.	Campaniano.

Facies 4^a.

Eocene medio . .	{	8. — Selci in noduli e lenti localmente con <i>Schizaster Meslei</i> Th. e Gauth. e talora con qualche nummulite <i>N. irregularis</i> Desh., <i>N. distans</i> Desh., <i>N. Pomeli</i> Fich.	}
		7. — Calcarei massicci e lumachelle ad <i>Ostrea multicosata</i> Desh.	
Eocene inferiore . .	{	6. — Alternanza di 4 strati ricchi di fosfato di calcio, con marne e resti di pesci e rettili.	} Londiniano.
		5. — Gessi.	
		4. — Lumachelle, marne, calcari marnosi, calcari con mescolanza di fossili eocenici (<i>Ostrea multicosata</i> Desh., e var. <i>strictiplicata</i> Gauth. ecc.) e cretaciici (<i>Cardita Coquandi</i> Loc.).	Montiano.
Creta superiore . .	{	3. — Lumachelle a <i>Nautilus</i> e <i>Ostrea pumica</i> Thom.	} Daniano.
		2. — Marne grigie a celestina ed a <i>Exogyra Overwegi</i> Coq. con piccolo letto fosfatifero ferruginoso ove abbondano resti di <i>Corax pristodonius</i> Ag.	
		1. — Calcarei bianchi a Inocerami.	Campaniano.

In Tripolitania sono noti da molti anni i terreni della Creta superiore e sino ad un certo punto se ne conosce anche la stratigrafia. Per i confronti che a noi ora interessano ci basta però di sapere qualcosa intorno ai livelli più elevati della serie cretacea. Questi compongono la superficie dell'altipiano tripolitano specialmente nell'interno, avvicinandosi solo qua e là all'orlo del gebel che sovrasta la zona costiera. Ma mentre nella parte centrale ed

occidentale i terreni della Creta rappresentano i livelli più elevati della serie stratigrafica, nella Tripolitania orientale ai suddetti terreni fanno seguito quelli dell'Eocene di cui ho fatto cenno sopra e quindi tale regione offre in questa questione particolare, interesse maggiore.

Nella Tripolitania orientale è noto da tempo ed è diffuso il Maestrichtiano sopra gli altri livelli della Creta superiore. Tanto il primo quanto i secondi sono abbastanza ben caratterizzati dai fossili contenuti. Il Maestrichtiano è rappresentato per lo più da una successione di argille e marne verdastre, spesso gessifere, e di calcari più o meno compatti o marnosi, ad *Exogyra Overwegi* v. Buch, successione ricca specialmente di molluschi e di Echini di cui varie specie sono comuni al Maestrichtiano della Tunisia. Recentemente è stato indicato nell'Uadi Sofeggin — ove l'orizzonte a *Exogyra Overwegi* è pure assai diffuso — un livello con resti di pesci ⁽¹⁾ fra cui anche *Corax pristodontus* Ag. che, come abbiamo visto or ora, caratterizza insieme con l'*Exogyra* il livello 2 della facies 4^a della Tunisia. Sopra a questo esiste il banco a *Nautilus* del Daniano al quale potrebbe corrispondere il banco a *Nautilus desertorum* indicato nell'Uadi Sofeggin.

Occorre tuttavia prospettare il caso che la serie della Tripolitania corrisponda a quella dell'Egitto e precisamente a quella di Kosseir, come ha fatto opportunamente il Checchia-Rispoli, anche se il giacimento egiziano dista ben 2000 km., al posto dei 500 di quelli tunisini. In realtà varie specie di pesci sono comuni a quelli del banco fosfatifero di Kosseir e gli strati soprastanti contengono sia in Tripolitania, sia in Egitto il *Nautilus desertorum* Zitt.

Ma le forme fossili menzionate non sono fra quelle che hanno valore stratigrafico ed in Egitto sono accompagnate da specie ben più significative. Inoltre alcune sono presenti anche in Algeria e Tunisia. Il fatto più importante, però, è che a Kosseir i fossili in questione sono contenuti proprio negli strati fosfatiferi, che alcuni attribuiscono al Maestrichtiano (Di Stefano), altri (Ball) al Campaniano. Se in Tripolitania tale livello — che è stato identificato — non ha fornito percentuali di fosfato tricalcico di importanza pratica è ragionevole pensare che sia piuttosto da paragonarsi al liv. 2 della facies 4^a sopra citata, che in Tunisia presenta pure una certa fosfatizzazione, ma senza valore industriale ⁽²⁾.

Le condizioni stratigrafiche della serie cretacica marina egiziana, che ha per base il complesso arenaceo-quarzoso noto col nome di «arenarie nubiche», si ritrova però anche in Libia e precisamente nel Fezzan. Qui

(1) G. CHECCHIA-RISPOLI, *La ittiofauna del Maestrichtiano della Tripolitania, la sua importanza per la ricerca dei fosfati*. «Periodico di Mineralogia», anno III, n. 1. Roma, 1932.

(2) Io stesso ho trovato presso Sahabi in Sirtica un giacimento miocenico (anche nella regione algero-tunisina il Miocene presenta talora banchi fosfatiferi (ma privi di valore industriale) contenente noduli che presentano sino al 64 % di fosfato tricalcico, ma il giacimento non ha importanza pratica.

la Missione della R. Accademia d'Italia ha identificato con sicurezza solo l'Eocene nella serie calcarea soprastante a dette arenarie; esistono indubbiamente però livelli calcarei più bassi che nei pochissimi punti ove sono stati osservati non hanno fornito fossili, nè fosfati, ma che potrebbero contenerne altrove e che comunque sembrano appartenere alla Creta superiore. Il problema merita qualche attenzione.

Per quanto riguarda la Cirenaica, le osservazioni finora compiute sui limitati affioramenti cretacici della regione non lascerebbero prevedere condizioni favorevoli alla sviluppo di giacimenti fosfatiferi.

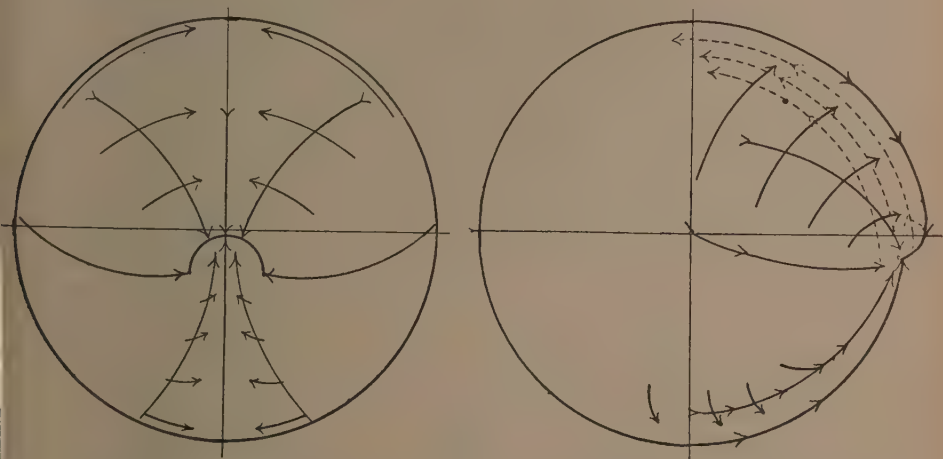
Ritornando alla Tripolitania vera e propria, se nel Cretacico superiore si sono fatte ricerche, indubbiamente utili, anche se per quel che pare infruttuose, per accertare l'esistenza di giacimenti fosfatiferi, mi sembra che ora sarebbe conveniente prendere in esame il problema dal nuovo punto di vista, il quale promette di portare una soluzione, speriamo positiva, comunque verosimilmente decisiva al problema dei fosfati. Va qui aggiunto che la Missione della R. Accademia d'Italia, che non aveva come suo compito la ricerca dei fosfati, ha potuto individuare giacimenti fossiliferi attribuibili tanto all'Eocene inferiore, quanto all'Eocene medio. L'identificazione precisa è avvenuta naturalmente in un secondo tempo, ossia con lo studio dei materiali paleontologici e quindi non sarebbe stato possibile sviluppare allora sul posto le ricerche dei livelli di eventuale interesse pratico. Va segnalato inoltre che l'Eocene presenta in Sirtica almeno due facies, una limitata al nord caratterizzata dalla presenza delle *Nummuliti* (*Nummulites gizehensis* Forsk.) ed ancora pochissimo conosciuta, l'altra caratterizzata dalla grande diffusione delle Ostree e specialmente dell'*Ostrea multicostata* Desh. e di forme affini.

I caratteri litologico-paleontologici di questi orizzonti rivelano analogie dell'ambiente sedimentario con la regione tunisina, ma il piccolo numero di forme raccolte specialmente nell'Eocene inferiore e la scarsità della fauna, finora illustrata, dei giacimenti coevi algero-tunisini, non hanno consentito per ora buoni paragoni, che riescono, invece, assai facili con la fauna egiziana, ripetutamente studiata e bene illustrata.

I dati suesposti in forma schematica rappresentano solo un primo appunto su una serie di ricerche da me iniziate da tempo con mezzi molto modesti, ed ancora in corso, ricerche sulle quali avrei conservato più a lungo il riserbo che mi ero proposto, se il momento attuale non imponesse a tutti di contribuire, ciascuno con le proprie forze, alla soluzione dei problemi nazionali con la maggiore sollecitudine possibile.

Zoologia. — *La gastrulazione dell'uovo di Lampreda* («*Lampetra fluviatilis* L.»). *Spostamenti dei materiali durante la gastrulazione* ⁽¹⁾. Nota di MILENA PITOTTI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. F. RAFFAELE.

In una Nota precedente ⁽³⁾ ho esposto alcune ricerche eseguite con il metodo delle colorazioni vitali localizzate, per stabilire la relazione esistente tra i primi piani di segmentazione dell'uovo e il piano di simmetria dell'embrione. Ho potuto utilizzare le numerose uova con colorazioni vitali localizzate in diversi punti della gastrula, delle quali era facile seguire il destino, per uno studio degli spostamenti che subiscono i materiali della superficie della gastrula, prima di venire invaginati.



Schemi rappresentanti i movimenti superficiali che avvengono durante la gastrulazione:
a sinistra, gastrula vista dal blastoporo; a destra, gastrula vista di fianco.

Prima di esporre i singoli movimenti, credo opportuno accennare brevemente al modo come avviene la gastrulazione nei Petromizonti.

L'uovo di Lampreda si divide secondo una segmentazione totale e disuguale che porta alla formazione di una blastula, nella quale si distinguono

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 2 febbraio 1936.

(3) Questi «Rendiconti», vol. XXI (1935), pp. 205-207.

molto bene i micromeri, che costituiscono un foglietto teso, bianchissimo e trasparente, dai macromeri, carichi di tuorlo, opachi e giallastri. Il blastocele è spostato verso la metà animale dell'uovo.

La gastrulazione nei Petromizonti è preceduta da un forte cambiamento di forma della blastula. Questa è perfettamente sferica o leggermente schiacciata nel senso dell'asse polare: prima che si inizi la gastrulazione, ad un certo punto, al limite tra macromeri e micromeri, si forma una protuberanza che spesso è molto accentuata. Questa protuberanza ha un limite piuttosto netto e scosceso verso i micromeri, mentre scende gradatamente verso i macromeri. La protuberanza indica la posizione del blastoporo, che si formerà appunto in essa.

La gastrulazione della Lampreda differisce da quella degli Anfibi, con cui l'uovo ha molti punti di somiglianza, per varie ragioni, ma soprattutto perchè il blastoporo forma soltanto un arco dorsale, e non compare un solco ventrale. Non vi è quindi un anello blastoporale, nè vi è il tappo vitellino.

Ventralmente vi è pure uno scorrimento di materiali, come vedremo, ma essi non si inflettono su di un solco. La direzione della invaginazione è verso la volta del blastocele. Si possono seguire agevolmente i processi della invaginazione per la trasparenza del tetto del blastocele, trasparenza che scompare man mano che si avanza il materiale invaginato.

I movimenti di trasporto dei materiali hanno inizio col primo accenno del blastoporo, che, come ho detto, si forma nella zona al limite tra macromeri e micromeri e cioè nella protuberanza. Questi movimenti durano per tutto il periodo della gastrulazione, e, pur essendo contemporanei, hanno il massimo d'intensità in tempi diversi, così che è possibile descriverli separatamente. Il primo movimento è laterale e si osserva all'apparire della prima invaginazione. Consiste in una rapida convergenza dei materiali laterali equatoriali verso il blastoporo, e questo viene così a delimitarsi nettamente sulle labbra laterali, mentre quasi non ne è ancora accennato il labbro dorsale. L'ampiezza di questo movimento è tale da trasportare fino al blastoporo i materiali che si trovano a 15°-20° da esso.

Questo primo movimento è rapido, ma non è il solo di questa zona, perchè in seguito l'invaginazione procede più lentamente, ma è molto estesa e trasporta fino al blastoporo i materiali che si trovavano a 90° di distanza, mentre quelli che erano più vicini vengono invaginati e si possono vedere in trasparenza a formare il mesoderma.

Dopo il primo movimento di convergenza dei materiali laterali, il massimo di intensità è raggiunto dai movimenti dorsale e ventrale che trasportano verso il blastoporo i materiali del dorso e del ventre della gastrula. Come ho già detto, nella Lampreda non si forma mai un labbro ventrale e l'invaginazione dei materiali ventralmente avviene senza l'inflessione su di un solco. Il trasporto dei materiali a questo stadio è contemporaneo in tutta la superficie dell'uovo, però la velocità massima si ha lungo la linea

mediana dorsalmente e ventralmente. Sul dorso, però, l'intensità e l'estensione del movimento sono minori che sul ventre della gastrula: lungo la linea mediana dorsale, l'estensione della invaginazione è di circa 45° – 50° . Concomitanti con questi sono dei movimenti latero-dorsali, che sollevano i materiali laterali verso il dorso della gastrula, e dei movimenti latero-ventrali verso la linea mediana ventrale. Questo movimento di convergenza ventrale è molto più debole di quello dorsale.

Quando per il movimento latero-dorsale i materiali laterali sono giunti verso la linea mediana dorsale, scorrono lungo questa e raggiungono il blastoporo e di essi vengono invaginati quelli che si trovavano a meno di 50° di distanza dal blastoporo. Questi poi si possono vedere per trasparenza nella neurula formare il mesoderma (somiti), mentre quelli che erano più distanti resteranno a formare l'ectoderma neurale e dorsale del tronco.

Il movimento che trasporta i materiali ventrali verso il blastoporo è molto esteso; esso ha un massimo contemporaneamente alla invaginazione dorsale ed è esteso per circa 90° . Però questa invaginazione continua dopo la gastrulazione allo stadio di neurula. Con tale invaginazione tardiva vengono trasportati fino al blastoporo i materiali che dopo il primo movimento erano rimasti a circa 30° di distanza da esso. I movimenti rappresentati nello schema sono quelli che avvengono fino allo stadio di gastrula completa, quindi non è riportata questa invaginazione tardiva.

I movimenti che avvengono negli ottanti dorsali e ventrali sono nello schema rappresentati da linee che sono le risultanti dei movimenti che avvengono lungo le linee mediane (dorsale e ventrale) e lungo le linee laterali con quelli latero-dorsali e latero-ventrali.

Fisiologia. — *Saggi biologici e chimici sul prodotto di irradiazione con raggi ultravioletti dell'ormone follicolare* ⁽¹⁾. Nota di M. LAPORTA e C. VACCA, presentata ⁽²⁾ dal Socio F. BOTTAZZI.

Le considerazioni teoriche che ci hanno indotto a intraprendere queste ricerche si basano su una serie di fatti venuti in luce dopo le ricerche di Butenandt, di Doisy, di Marrian e di Girard sulla natura chimica delle sostanze estrogene. Lo studio di queste sostanze dal punto di vista chimico ha fatto rilevare che la loro molecola contiene il nucleo tetraciclico fondamentale del colesterolo, degli acidi colanici e dell'ergosterolo. La differenza consiste nel possedere queste ultime sostanze una catena laterale unita al quarto ciclo pentametileno, della quale è privo invece l'ormone follicolare. Dal paragone poi fra il nucleo costitutivo dell'ormone e quello dell'ergosterolo risalta una più stretta analogia: l'ormone estrogeno possiede nel suo nucleo tre doppi legami, mentre l'ergosterolo ne possiede due, in luogo dell'unico doppio legame esistente nel colesterolo e derivati.

Se, dunque, come è ormai notorio, dall'ergosterolo sottoposto alla irradiazione si generano una serie di sostanze di cui una è la vitamina antirachitica, data la stretta parentela chimica dell'ormone follicolare con l'ergosterolo, è logico attendersi che sottoponendo ad un simile trattamento una delle sostanze estrogene, questa debba subire trasformazioni analoghe a quelle dell'ergosterolo, per cui l'ormone potrebbe acquistare nuove proprietà biologiche oppure perderne alcune.

Tra le tante azioni biologiche assegnate all'ormone follicolare, ne abbiamo preso in esame soltanto alcune, che ci sembrarono di interesse particolare e le abbiamo studiate in preparati ormonici prima e dopo la irradiazione al fine di stabilire un confronto sicuro; abbiamo pertanto preso in esame l'azione sul ciclo estrale, quella antimascolina e quella ipercalcemizzante.

Sul primo di questi tre effetti, consistente in quelle modificazioni della mucosa vaginale e uterina, che caratterizzano il ciclo estrale dei mammiferi, non è il caso di intrattenersi a lungo, giacchè troppo note ormai in tutte le loro fasi e le meglio studiate.

Quanto all'azione *antimascolina*, così definita da Laqueur e dalla sua scuola, confermata da Pepe e Vacca ⁽³⁾ ed ormai universalmente accettata, di-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia sperimentale della R. Università di Napoli.

(2) Nella seduta del 2 febbraio 1936.

(3) « Boll. Soc. It. Biol. sperim. », 1933, 8, 1782.

ciamo brevemente in che essa consiste. L'ormone follicolare, iniettato in un maschio (ratto) esplica la sua azione dapprima sull'epitelio seminifero, poi sul testicolo *in toto*. Le sezioni microscopiche di testicolo di ratto sottoposto a trattamento con follicolina fanno rilevare, in seguito ad un trattamento breve, un arresto della spermiostogenesi e, per un trattamento più lungo, una involuzione di tutti gli elementi che compongono la linea seminale; infine involuzione di tutti gli elementi che compongono il testicolo: forte diminuzione del lume dei tubuli, che si mostrano vuoti quasi del tutto di elementi germinali e ridotti alla sola membrana propria; aumento modico del connettivo; scomparsa delle cellule di Leydig; fortissima diminuzione del peso del testicolo, in confronto a quello medio di animali di controllo del medesimo peso e della stessa età.

Circa l'azione ipercalcemizzante posseduta dall'ormone follicolare, si devono considerare a tal proposito conclusive le ricerche di Saviano ⁽¹⁾. Questo A. ha dimostrato che il calcio ematico aumenta soltanto dopo un certo tempo dall'inizio del trattamento con l'ormone, in animali (cani) maschi e che, raggiunti un determinato valore, la calcemia declina più o meno rapidamente, raggiungendo valori uguali a quelli precedenti il trattamento ormonico.

Allo studio del come si modificano queste tre azioni biologiche dell'ormone follicolare in seguito alla esposizione di esso ai raggi ultravioletti, sono state rivolte queste ricerche.

Gli ormoni usati, e che dobbiamo alla cortesia di due grandi ditte ⁽²⁾, rispondono, come individui chimici, uno all'estrone (chetoidrossiestrina), l'altro ad un suo prodotto di riduzione l'*estradiol* di David. Di queste due sostanze a potere estrogeno noto, si preparava una soluzione in diossano (o benzolo), che, dopo eventuale irradiazione, veniva versata in pallone tarato contenente una soluzione alcalina, così composta: NaCl 0,5%; Na_3PO_4 0,5%; NaOH 0,04%. La miscela veniva poi liberata dal solvente organico mediante distillazione nel vuoto a bassa temperatura ed infine riportata a volume con altra soluzione alcalina. In qualche caso l'irradiazione fu eseguita sulla soluzione acquosa dopo aver allontanato il solvente organico.

Per lo studio dell'azione estrogena ci siamo serviti di ratte castrate e per la titolazione delle soluzioni di ormone, della prova di Allen e Doisy. Non sono mai state usate meno di 10 ratte.

L'azione antimascolina è stata seguita su giovani ratti (non meno di 5) dai quali, alla fine del trattamento, si prelevava un testicolo. Il peso di questo veniva confrontato con quello del testicolo di ratti di uguale età non trattati, e dopo, con la tecnica usuale, si allestivano alcuni preparati istologici. Quanto al trattamento ci siamo attenuti alle direttive generali seguite nelle citate ricerche di Pepe e Vacca.

(1) « Mem. R. Acc. Lincei », 1935, ser. 6^a, vol. III, p. 165.

(2) Cogliamo qui l'occasione di ringraziare la ditta Degewop e la G. Richter per la cortesia usataci.

Per lo studio della calcemia siamo ricorsi al cane maschio normale, preferendo il maschio alla femmina, non soltanto per metterci al riparo di eventuali variazioni cicliche del calcio ematico dipendenti dal ciclo estrale, ammesse da molti AA.; ma anche perchè la somministrazione di dosi relativamente elevate di ormone può produrre sul maschio effetti più cospicui che nella femmina, il cui organismo è abituato alle grandi dosi di ormone. Il calcio è stato determinato col metodo di Kramer e Tisdall su almeno due campioni di siero di sangue estratto dalla giugulare esterna.

La irradiazione è stata eseguita esponendo alla luce di una lampada in quarzo a vapori di mercurio (del tipo Gallois) l'ormone sciolto in benzolo o in diossano, in strati non superiori a 2 mm. La durata della irradiazione si è creduto di mantenerla costante: 30 minuti di esposizione a 30 cm. di distanza dalla sorgente luminosa.

RISULTATI.

1. *Azione estrogena.* — La risposta alla iniezione di 1 unità internazionale dei due ormoni non irradiati in 12 ratte castrate e in stato di diestro è stata del 100%; e l'estro è durato in media 24 ore; gli stessi ormoni irradiati, iniettati in quantità corrispondenti a 1 unità han provocato l'estro in tutti gli animali, è durato ben 4 giorni.

2. *Azione antimascolina.* — Di 22 ratti normali in periodo pubere, 4 furono usati come controlli (ricevevano *pro die* 1 cc. della semplice soluzione alcalina per via ipodermica); 9 vennero trattati con estrone e col suo prodotto di irradiazione, e precisamente: 3 ricevettero 50 U. I. *pro die*, 3 una quantità uguale del suo prodotto di irradiazione e 3 una quantità doppia di quest'ultimo. Altri 9 animali furono trattati con l'estradiol, e precisamente: 3 ricevettero 50 U. I. *pro die* dell'ormone non irradiato, 3 una uguale quantità del prodotto di irradiazione e 3 una quantità doppia di quest'ultimo. Dopo 30 giorni di trattamento tutti gli animali furono emicastrati, tranne 4 che vennero lasciati integri, e che erano stati trattati coi prodotti di irradiazione, due con 50 unità e 2 con 100 U. *pro die*. Dei testicoli, dopo averne annotato il peso, furono allestiti preparati istologici.

Il peso dei testicoli degli animali trattati con gli ormoni non irradiati risultò metà circa di quello dei testicoli dei ratti controllo e di quello dei ratti trattati con i prodotti di irradiazione dei due ormoni. L'esame istologico comparativo dimostrò che non vi era differenza tra i testicoli di ratti normali di controllo e quelli degli animali trattati coi prodotti della irradiazione degli ormoni; mentre quelli degli animali trattati con gli ormoni non irradiati erano in piena atrofia. Inoltre i ratti, non castrati, che avevano ricevuto 50 e 100 unità dei prodotti della irradiazione, posti in compagnia di femmine vergini, le ingravidarono.

3. *Azione sulla calcemia.* — Dalle esperienze eseguite su 4 cani, iniettando dosi di 500 U. I. *pro die* si è visto che l'azione ipercalcemizzante, posseduta dagli ormoni con cui si è sperimentato, scompare se l'irradiazione venne eseguita sul materiale sciolto in diossano o benzolo, mentre permane qualitativamente e quantitativamente inalterata se la irradiazione venne eseguita su soluzioni acquose. Gli ormoni, però, irradiati in soluzione acquosa, conservano il potere estrogeno, ma non quello antimascolino.

4. *Variazioni di alcune costanti chimico-fisiche degli ormoni sottoposti all'irradiazione.* — Sono stati studiati il punto di fusione e la rotazione specifica. In tutti e due gli ormoni è stata constatata una forte depressione del punto di fusione e della rotazione specifica, che diviene sempre più spiccata col procedere della irradiazione.

La reazione colorata di Kober (all'acido fenolsolforico), specifica dell'ormone follicolare non scompare. Si è notato un aumento della fluorescenza verde nei prodotti dell'irradiazione.

Senza voler, almeno per ora, entrare in discussioni circa la interpretazione dei risultati ottenuti, si può concludere che:

L'estrone (e il suo prodotto di riduzione, l'estradiol) sottoposto alla irradiazione ultravioletta in soluzione benzenica o in diossano:

a) conserva la sua attività di indurre l'estro nella ratte castrate e l'estro dura più a lungo che non col prodotto non irradiato;

b) l'azione antimascolina, caratteristica delle sostanze estrogene, scompare completamente;

c) l'azione ipercalcemizzante va anch'essa perduta, quando l'irradiazione sia stata fatta in solvente organico; è conservata, invece, quando l'irradiazione è stata fatta in soluzione acquosa;

d) la rotazione specifica diminuisce e il punto di fusione si abbassa col progredire della irradiazione; permane invece la reazione di Kober (colorazione rosa con acido fenolsolforico a caldo).

È da presumere che con la irradiazione si generano dagli ormoni estrogeni, analogamente a quanto accade per l'ergosterolo, isomeri ad azioni biologiche differenti.

Fisiologia. — *Composizione chimica e valore energetico di diete consumate in due Colonie Marine* ⁽¹⁾. Nota di A. CARTENÌ e C. VACCA, presentata ⁽²⁾ dal Socio F. BOTTAZZI.

Sono state esaminate per due settimane consecutive le diete consumate in due Colonie Marine, una femminile ed una maschile, composta di ragazzi dai 6 ai 12 anni.

Il metodo seguito consisteva nel raccogliere per ogni pasto una razione scelta a caso fra quelle distribuite, nel dissecarla in un bagno d'aria e nel determinarne i principi alimentari. Da questo si è proceduto al calcolo del valore calorifico della razione, adottando i coefficienti di Rubner.

Il risultato è stato il seguente:

1° Il valore calorifico della razione oscilla tra 1557 e 2343 Cal. con una media *pro die e pro capite* di 2069 Cal. (ved. Tabella I). Questo valore,

TABELLA I (*Colonie Marine*).

N. pasti	Peso della razione disseccata gr.	Composizione % degli alimenti disseccati			Calorie calcolate con i coefficienti di Rubner	Calorie calcolate secondo Benedict
		Protidi gr.	Lipidi gr.	Glucidi gr.		
1	573	11,25	5,14	72,88	2250,3	2865
2	521	12,69	6,95	72,02	2145,9	2605
3	536	18,12	6,30	68,16	2210,1	2680
4	448	14,00	4,52	73,59	1797,2	2240
5	367	16,56	7,58	69,74	1557,3	1835
6	510	10,81	4,64	77,28	2062,0	2550
7	530	13,87	5,80	72,62	2165,3	2650
8	516	13,00	6,04	72,33	2095,1	2580
9	498	15,12	11,00	64,77	2140,6	2490
10	584	13,44	3,56	76,32	2342,6	2920
11	555	12,63	3,44	75,14	2174,8	2775
12	438	13,37	5,89	71,14	1757,6	2190
13	518	13,81	6,26	71,60	2115,5	2590
14	541	16,69	8,48	65,47	2249,0	2705
Media 509		13,95	6,11	71,64	2069,0	2548

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Napoli.

(2) Nella seduta del 2 febbraio 1936.

può ritenersi soddisfacente se si assume, in conformità della scala consigliata dalla Conferenza di Roma del 1932, il coefficiente di famiglia 0,7 per ragazzi dell'età di 10 anni. Meno soddisfacente appare, invece, la ripartizione delle calorie fra i tre principî alimentari organici. Risulta infatti, che i ragazzi presi in esame ingerivano *pro die* 70 gr. di protidi, 364 gr. di glucidi e 31 gr. di lipidi. È evidente la scarsenza dei lipidi.

2° Contemporaneamente abbiamo esaminato, con lo stesso procedimento, le diete consumate da due studiosi dell'età rispettivamente di 30 e di 65 anni, in perfetto stato di salute (ved. Tabella II). Per il primo abbiamo trovato che il valore calorifico della razione oscillava da 1712 a 3342 Cal. con una media di 2291 Cal.; per il secondo, da 1565 a 1801 calorie con una media di 1696 Cal. La dieta era costituita nel primo caso da 87 gr. di protidi, 259 di glucidi, 91 di lipidi; nel secondo caso da 74 gr. di protidi, 260 di glucidi e 62 di lipidi. Sebbene si tratti di uomini dediti soprattutto allo studio, che compivano quindi un lavoro fisico molto limitato, tuttavia non si può fare a meno di notare che il valore calorifico della razione, particolarmente nel soggetto di età più avanzata è notevolmente inferiore a quello che si suole assegnare a tale categoria di lavoratori.

3° Nel corso di queste ricerche, avendo ridotto a secchezza la razione giornaliera degli individui in esame, abbiamo voluto calcolare il valore calorifico di essa moltiplicando il peso secco per 5, conforme a quanto ha fatto Benedict⁽¹⁾ con ottimo risultato per le diete dei suoi connazionali. È risultato che per le diete dei due uomini adulti, le calorie calcolate dall'analisi chimica erano leggermente inferiori (di circa il 4%) a quelle calcolate col coefficiente di Benedict; per le diete delle Colonie Marine, invece, quelle calcolate dall'analisi chimica sono risultate del 20% circa inferiori a quelle calcolate secondo Benedict. Questa differenza trova la sua spiegazione nella scarsa percentuale di grasso contenuta nella dieta delle Colonie Marine. È facile, infatti, dimostrare che il coefficiente per cui va moltiplicato il residuo secco (preparato secondo le istruzioni di Benedict) varia da 3,57 per una dieta priva di grasso a 8,1 per una dieta di soli grassi⁽²⁾. Il fattore di Bene-

(1) G. BENEDICT, « Bull. de la Soc. scientifique d'Hygiène alimentaire », 17, 321, 1929

(2) Ammesso, infatti, con Benedict, che il residuo alimentare dissecato contenga il 10% di umidità e inoltre, secondo risulta dalle nostre analisi, il 3% di ceneri; indicando con F il coefficiente si ha, per una dieta composta esclusivamente di protidi e glucidi,

$$F = 4,1 - \left(\frac{13}{100} 4,1 \right) = 3,57$$

e per una dieta composta di soli lipidi

$$F = 9,3 - \left(\frac{13}{100} 9,3 \right) = 8,091.$$

Con formula generale, interpolando, si ottiene l'equazione

$$F = 3,567 + 0,052 p$$

in cui *p* è il % di lipidi.

dict, quindi, se è applicabile alle diete del popolo americano, è un po' alto per le classi benestanti della nostra popolazione, ed altissimo per la razione delle classi meno abbienti, cioè per la gran massa della popolazione.

TABELLA II.

N. pasti	Peso della razione disseccata gr.	Composizione % degli alimenti disseccati			Calorie calcolate con i coefficienti di Rubner	Calorie calcolate secondo Benedict
		Protidi gr.	Lipidi gr.	Glucidi gr.		
Soggetto 1° (anni 30, peso Kg. 66,5)						
1	473,6	17,22	13,27	60,97	2102,7	2368,0
2	431,5	19,00	16,24	57,38	2003,0	2157,5
3	367,3	20,44	20,86	45,94	1712,2	1836,5
4	527,0	15,87	17,75	59,36	2495,4	2635,0
5	430,0	19,69	21,64	52,55	2139,0	2150,0
6	458,0	16,69	18,59	54,36	2126,0	2290,0
7	474,0	21,25	19,12	51,64	2245,0	2370,0
8	451,0	18,56	18,25	55,43	2135,0	2256,5
9	458,6	18,59	18,64	56,31	2196,0	2293,0
10	402,5	19,37	20,27	50,36	1909,5	2012,5
11	544,0	16,87	20,14	55,94	2642,9	2720,0
12	726,0	15,13	19,14	53,72	3341,6	3630,0
13	511,0	19,10	18,64	49,96	2332,7	2555,0
14	483,6	18,25	23,44	50,01	2407,6	2418,0
15	514,3	13,75	25,65	50,52	2582,0	2571,5
	Media 483,5	17,98	18,84	53,63	2291,4	2417,6
Soggetto 2° (anni 68, peso Kg. 97)						
16	362,0	20,98	15,72	53,17	1629,8	1810,0
17	381,0	18,75	20,44	50,18	1801,0	1905,0
18	384,0	18,69	17,21	55,77	1786,9	1920,0
19	350,0	22,00	14,21	54,80	1564,6	1750,0
	Media 369,3	20,1	16,89	53,48	1696,0	1846,2

Biologia (Morfologia sperimentale). — *Esperienze coi raggi X e col radio sulla ninfosi degli Insetti* ⁽¹⁾. Nota di C. GUARESCHI, presentata ⁽²⁾ dal Socio F. SILVESTRI.

Con la presente Nota, in relazione alle ricerche già esposte in lavori precedenti ⁽³⁾, mi propongo di dar conto di esperienze da me compiute sulla influenza dei raggi X e del radio sulla ninfosi degli Insetti olometaboli.

Come ho già avuto modo di accennare, coi raggi X, due autori francesi, Hufnagel e Jolly ⁽⁴⁾, se avevano ottenuto risultati che possono benissimo ricollegarsi ai miei, ne avevano però tratto conclusioni del tutto diverse dalle mie. Essi infatti avrebbero notato, almeno nei Ditteri, la persistenza di organi larvali che normalmente avrebbero dovuto sparire, e l'assenza di organi neoformati che avrebbero dovuto svilupparsi a spese delle cellule imaginali. E ciò sarebbe, secondo essi, dovuto ad un'azione specifica di inibizione esercitata dalle radiazioni sulle cellule embrionali dei dischi imaginali, a qualunque regione essi appartengano, azione capace di impedirne la moltiplicazione e il differenziamento. Per contro, invece, io ritenni (naturalmente pur senza negare l'azione peculiare dei vari agenti, propria di tali modalità sperimentali), che le malformazioni, con l'aspetto e la disposizione con cui si mettono in evidenza in tali casi, debbano attribuirsi a proprietà particolari degli Insetti in metamorfosi, cosicchè, qualunque sia la causa (e quindi *indipendentemente dalla natura di essa, purchè sia capace di disturbare il regolare andamento della ninfosi*), l'effetto dovrebbe essere sempre lo stesso, cioè ritardo o, secondo l'intensità, arresto dello sviluppo, più sensibile nella zona addominale, meno sensibile nella testa e nel torace. Ho quindi, in tal modo, indentificato delle zone di differente suscettibilità, disposte in modo da formare una specie di gradiente assiale.

Queste conclusioni erano basate sui soli risultati ottenuti cogli agenti fino allora da me usati; non potevo però esimermi dal valutare anche quelle azioni sperimentali usate da Autori i quali mostravano di dissentire nella loro conclusione, dalle mie interpretazioni.

In questo nuovo gruppo di esperienze ho usato, per ora, come materiale, il *Bombyx mori*, le cui uova mi sono state gentilmente fornite dalla R. Stazione

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 2 febbraio 1936.

(3) Questi « Rendiconti », vol. XIX, ser. 6^a, 1^o sem., fasc. 9, maggio 1934; vol. XX, ser. 6^a, 2^o sem., fasc. 1-2, luglio 1934; « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », vol. 9, fasc. 9, 1934; « Arch. Zool. Ital. », vol. XXII, 1935.

(4) « C. R. Ac. Sc. », to. 187, p. 431, 1928; to. 196, p. 726, 1933; to. 196, p. 962, 1933.

di Gelsicoltura e Bachicoltura di Ascoli Piceno, e, tra i Ditteri, la *Calliphora vomitoria* e la *Lucilia caesar* e ho irradiato larve, ninfe e pupe immediatamente prima e a periodi vari dopo la muta ninfale per mezzo dell'apparecchio Univalvo Rangoni e del Radio posseduti dal nostro Istituto.

Nella maggior parte delle esperienze ho usato i Raggi X; con essi ho eseguito, sul *Bombyx mori*, varie serie di ricerche con dosi diverse di raggi; le serie che mi hanno dato migliori risultati sono state quelle irradiate a 18 cm. dalla lampada (Müller, Media-Metalix-Wa, 6 KW.) per trenta minuti e per un'ora, con un voltaggio di 55 KV. e un amperaggio di 4 MA. Come si vede ho dovuto usare raggi molto molli e sono stato quindi costretto (dato il forte assorbimento di tali raggi da parte dell'aria) ad avvicinare molto gli esemplari alla lampada. Così facendo potevo temere un eccessivo riscaldamento degli esemplari irradiati, che però in pratica è stato così piccolo (5-6 gr. al disopra della temperatura ambiente) da far ritenere (vedi mie esperienze sulle alte temperature) senza alcun dubbio nulla la sua influenza sui risultati raggiunti.

I quali, pur non essendo giunti a quei massimi che ottenni lo scorso anno con altre specie ⁽¹⁾ e con altri agenti, e ciò evidentemente perchè sarebbe necessario aumentare ancora il periodo di esposizione, o ripetere il trattamento per due o più volte in tempi successivi, concordano perfettamente con quanto ebbi già più volte a descrivere: rigonfiamenti degli intersegmenti addominali, macchie scure sull'addome, accartocciamento delle ali. Risultati simili si sono avuti col Radio dopo un'ora di esposizione a circa 1 cm. di distanza da una laminetta di circa 5 mgr. di bromuro di Radio ricoperto da una sottile laminetta di mica.

Ho ottenuto solo per ora, come ho già avvertito, i risultati minori e, come di regola, *non ho mai avuto alterazioni della testa e delle sue appendici, nè del torace e delle zampe.*

Per quanto riguarda la *Lucilia* e la *Calliphora* i risultati coi Raggi X (con un'ora di irradiazione e le stesse caratteristiche già ricordate a proposito del Baco da seta) sono stati molto più manifesti: (Fig. 1) la maggior parte degli esemplari è morta senza spupare; pochi sono usciti dal pupario solo con la testa e il torace o con la sola testa (e queste zone appaiono normali); pochissimi, infine sono sputati completamente e presentano gravi malformazioni limitate all'addome. Col Radio (esposizione per un'ora a un centimetro) i risultati sono stati simili ma ancora più gravi.

Tutto ciò per quanto riguarda l'esame esterno: non sono stati ancora eseguiti controlli istologici; però per la somiglianza delle malformazioni esterne ottenute sia con gli uni che con gli altri agenti, mi sento autorizzato

(1) Col *Bombyx mori* non sono mai riuscito, con nessun agente, ad avere i risultati più appariscenti, il che può esser dovuto a varie cause, fra cui principalissima quella della delicatezza di questa forma, da secoli allevata in schiavitù, delicatezza che non permette di adoperare dosi molto forti degli agenti.

a provvedere che anche il quadro istologico sarà identico: presenza di masse adipose ninfali più o meno abbondanti e quasi esclusivamente limitate alla zona addominale, indice che in questa zona la metamorfosi è stata maggiormente ritardata rispetto alla parte anteriore. Nel lavoro in esteso darò naturalmente conto anche dei controlli istologici in rapporto con i fatti anatomici già accertati dall'esperienza.

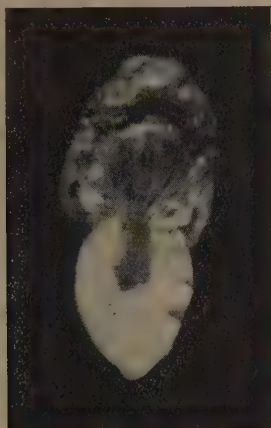


Fig. 1. — Esemplare di *Calliphora vomitoria* irradiato con raggi X appena impupato per 1^h a 18 cm. dalla lampada, con 55 KV. e 4 MA.

L'esemplare non è spupato ed è stato estratto artificialmente dal pupario. L'addome, bianco, è completamente ninfale; il torace, ancor poco sviluppato nella parte posteriore, lo è completamente in quella anteriore; la testa e le sue appendici, come pure le zampe, sono normali; le ali sono accartocciate e in posizione ninfale, ma hanno la consistenza di quelle dell'adulto.

Ingrandimento ca. 6 volte.

Come avevo supposto quindi, anche con i Raggi X e con il Radio si possono mettere in evidenza, sia le zone di differente suscettibilità da me già ammesse negli Insetti durante il periodo della ninfosi, zone che sono disposte in modo da formare un gradiente assiale, sia le disarmonie di sviluppo già individuate con gli altri agenti.

Ancora una volta, e anche per la ninfosi (che è il campo di indagine quasi vergine sotto questo punto di vista e che io ho voluto cimentare), si dimostra che i più diversi agenti sperimentali, e quindi i più diversi stimoli, si traducono, su di una determinata costituzione biologica, in una medesima risposta morfogenetica.

Biologia (Embriologia sperimentale). — *Ricerche sugli espianti del pronefro negli Anfibi* ⁽¹⁾. Nota II di ELENA FAGIOLO, presentata ⁽²⁾ dal Socio F. SILVESTRI.

Già in una precedente Nota ⁽³⁾ ho esposto alcuni risultati che si riferiscono all'autodifferenziamento che si può ottenere espiantando l'abbozzo del pronefro o rene cefalico degli Anfibi. Le mie esperienze, su cui è prossima la pubblicazione di un lavoro in esteso, si sono rivolte in primo tempo allo studio dello sviluppo dei canalicoli pronefrici dal punto di vista puramente morfologico, mentre in un secondo tempo, accertate le possibilità di sviluppo, e la maniera con cui esso avviene, ho voluto indagare sulle possibilità funzionali di questi organi espantati.

Già nella nota precedente ho fatto un breve cenno su quanto fino ad oggi alcuni Autori, che sono si occupati di problemi analoghi a questo, credono di dover ammettere sulla funzionalità del pronefro e anche del mesonefro in condizioni anormali (trapianto).

In tali condizioni il funzionamento è stato ammesso dallo Shimasaki nei trapianti omoplastici ed eteroplastici ⁽⁴⁾, e dalla Ruzza nei trapianti xenoplastici, in un modo molto vago, « e senza nascondersi le obiezioni che si potrebbero muovere » ⁽⁵⁾. Questi Autori si basano soltanto sul fatto che quando nei loro trapianti manca ogni comunicazione tra tuboli e cloaca attraverso il dotto collettore, i canalicoli si mostrano dilatati. Questo fenomeno, che non può essere attribuito ad immissione di materiali dall'esterno, poichè manca con esso ogni comunicazione, viene attribuito alla secrezione dei canalicoli stessi.

Poichè anche io, nelle mie esperienze di espianto del rene cefalico, avevo ottenuto la formazione di canalicoli terminanti costantemente a fondo cieco, e con lume notevolmente dilatato, mi trovavo in condizione di ammettere, fondandomi sulla stessa ipotesi, lo stesso fatto della funzionalità. Una funzionalità d'altronde era stata accertata nei riguardi di altri organi, almeno per alcuni caratteri come la contrazione muscolare del cuore (Ekman) ⁽⁶⁾ e dell'intestino (Boccardi) ⁽⁷⁾; l'Holtfreter poi, ⁽⁸⁾ per molti organi anche ghian-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 2 febbraio 1936.

(3) « Monit. Zool. Ital. », vol. 45, suppl. N. 254-257 (1935).

(4) « Japan Journ. of Medical Scien. », I Anat., vol. II, N. 3 (1930).

(5) « Rend. R. Acc. Lincei », vol. XVIII, ser. 6^a, 2° semestre, fasc. 5-6 (1933).

(6) « Ov. Finska, Vet. Soc. Froh. », Helsingfors 63, A N. 5.

(7) « Monit. Zool. Ital. », vol. 45, suppl. N. 175-177, (1935).

(8) « Int. Zellforscherkongr. », Cambridge, Fitzg. VIII (1934).

dolari, ammette una funzionalità sia in condizioni di espianto che in quelle di esogastrulazione.

Ma poichè al contrario, dalle ricerche che Mc. Clure aveva eseguito su larve edematose di Anuri, risultava come fosse precisamente la dilatazione e l'accorciamento dei tuboli, che si accompagna alla non funzionalità di essi, ho pensato che fosse necessario esaminare più da vicino il problema, per accertare con mezzi più evidenti la questione controversa.

Il metodo di studio che ho seguito nelle successive esperienze mi è stato suggerito dalle ricerche di istofisiologia comparata che Gérard e Cordier ⁽¹⁾ hanno eseguito sul pronefro e mesonefro di vari Anuri, con lo scopo di dimostrare per i tuboli contorti come le due opposte teorie, quella di Bowmann-Heidenhein che ammette la sola secrezione, e quella di Ludwig-Cushny che ammette solo l'assorbimento, fossero perfettamente conciliabili tra loro. Questi Autori per dimostrare ciò hanno iniettato in larve di varie specie di Anfibi Anuri diverse sostanze coloranti di differente grandezza micellare (Trypanblau, Carminio ammoniacale, Thorotrast, Inchiostro di China Pelikan 54, Cinabro ecc.).

Quando tali sostanze vengono a contatto con le cellule dei tuboli renali, avviene il fenomeno della granulopessi o ultrafagocitosi, la qualcosa non sarebbe altro che l'accumulo, dopo la flocculazione, di questi colori colloidali dentro le cellule. Tale fenomeno è stato osservato dai precedenti Autori sia nei tuboli pronefrici che in quelli mesonefrici, sia in quelli aperti (con nefrostomi) che in quelli chiusi, potendo queste sostanze, a seconda della loro dispersione micellare, filtrare attraverso il glomerulo, o penetrare direttamente attraverso il nefrostoma, per essere assorbite al momento del loro passaggio nell'interno del canalicolo. Questa granulopessi dimostra il potere che hanno le cellule dei tuboli contorti di assumere sostanze dentro di loro.

Le diverse parti di questi tubuli hanno d'altronde un potere di assunzione differente che è in rapporto con il grado di dispersione dei colloidi iniettati. I più dispersi vengono assunti nella porzione più iniziale del tubolo, cioè la più vicina al glomerulo.

Riguardo la secrezione Gérard e Cordier hanno studiato l'eliminazione di sostanze diverse dal rene normale e dal rene privato della sua irrigazione glomerulare, ed hanno visto che anche in queste condizioni di interrotta circolazione arteriosa nel glomerulo, rimaneva invariata la funzione renale normale di eliminazione di coloranti basici e di acido urico, come per l'indigocarminio avevano già visto prima Bensley e Steen.

Dall'insieme di tutte le esperienze essi ne hanno tratto la conclusione: « Que certaines substances sont secrétées par les tubes contournés », e poi « Que d'autres substances, celles qui s'accumulent dans ces mêmes tubes par athrocytose, sont résorbées par eux ».

(1) « Zeitsch. für Zellforsch. und Mikr. Anat. », 21 (1934).

Io, ricorrendo a metodi analoghi, cioè facendo iniezioni di Trypanblau, ho visto, per ora, negli Anfibi Anuri (*Rana esculenta*, *Bufo vulgaris*) lo stesso fenomeno di assunzione della sostanza colorante sia nei reni trapiantati come in quelli espianati.

Per gli animali in cui avevo eseguito l'omiotrapianto ho seguito la medesima tecnica degli Autori precedentemente ricordati, cioè ho fatto l'iniezione nella cavità generale del corpo, mentre per gli espianati la parte tecnica era resa un po' più difficile e delicata per le dimensioni minime degli espianati stessi; però sono riuscita egualmente ad iniettare il colore dentro la piccola sfera di ectoderma, nel momento in cui il turgore interno la rendeva più gonfia. Come ambiente in cui sono vissuti sia animali che espianati, prima e dopo l'iniezione, che talvolta ripeteva dopo un giorno o due di intervallo, ho usato vari tipi di soluzioni fisiologiche; quella che mi ha dato migliori risultati è stata quella di Ringer, nella formula adottata in questo Istituto ⁽¹⁾.

Appena eseguita l'iniezione, non era possibile distinguere nulla chiaramente, poichè il piccolo foro, prodotto dall'entrata dell'ago faceva immediatamente sgonfiare l'espianato, ed il colore si spandeva ovunque uniformemente. Ma dopo un certo numero di ore (12-15) il colore si localizzava esattamente solo in qualche tratto dei canalicoli, come prevedevano le esperienze di Gérard e Cordier, e precisamente in quei tratti dei tubuli espianati che corrispondevano al tratto iniziale. Poichè l'ectoderma in *Rana esculenta*, nelle speciali condizioni di espianato, è abbastanza trasparente, anche in vivo si poteva individuare assai bene, al bincolare, il percorso dei canalicoli resi in parte più evidenti dal colore.

Negli animali che ospitavano i pronefri trapiantati ho potuto fare osservazioni solo dopo il taglio, essendo impossibile farle sul vivo, ed ho potuto constatare la medesima colorazione anche nei casi di trapianto. Essa si verificava sempre e nello stesso modo, anche in quegli animali cui avevo asportato i due pronefri normali, e che per conseguenza erano idropici, poichè il rene trapiantato non si era fuso con il dotto collettore.

Ho notato in tutti questi casi che la colorazione dei tubuli, sia espianati che trapiantati era sempre leggermente più pallida di quella che nelle stesse condizioni si verificava nei pronefri normali. Il confronto era particolarmente facile ed esatto in quegli animali che possedevano tre pronefri: uno trapiantato e due normali. Ciò si spiega facilmente tenendo presente il fatto che nel pronefro normale i tubuli hanno i loro nefrostomi aperti nella cavità generale del corpo, dove veniva iniettata la sostanza colorante, e che per conseguenza i tubuli renali potevano assumere il colore tanto dall'esterno come dall'interno, mentre ciò non era possibile negli espianati e nei trapianti dove i tubuli terminano costantemente a fondo cieco da ambedue gli estremi (almeno tali sono stati i risultati da me sempre ottenuti).

(1) V. COTRONEI e PERRI, questi « Rendiconti », vol. XX, 1934, pp. 346-351.

Altro fatto importante, che va rilevato, è la selettività del tessuto pronefrico per questo tipo di colorazione: infatti anche quando assieme al pronefro ho espantato qualche altro organo (stomaco, anse intestinali), mai ho potuto notare, neppure all'esame istologico, nelle cellule di questi minime tracce di colore. Benchè abbia fissato sia animali che espianti a distanze assai differenti dall'ultima iniezione, non ho mai notato differenze sensibili nell'intensità della colorazione. Anzi il quantitativo del colore iniettato non è affatto in relazione con il quantitativo assunto, ma probabilmente la cellula renale può assumerne un tanto e non di più. Quando ripetevo a breve distanza l'iniezione, e abbondavo appositamente con la quantità di colore, trovavo questo sparso a gruppetti tra le cellule del vitello o del tessuto mesenchimatico che accompagna ogni organo espantato.

È ancora da rilevare che secondo Gérard e Cordier la granulopessi da parte dei tuboli pronefrici non si effettua quando sia sospesa la circolazione glomerulare. Nei miei casi di espanto la circolazione glomerulare non esisteva, ciononostante la granulopessi si è avuta egualmente, benchè, come ho già detto, in grado lievemente minore che nel normale.

Resta così dimostrato che i tuboli del pronefro, anche in condizione di espanto hanno la possibilità di compiere almeno una delle funzioni riconosciute sperimentalmente nel pronefro normale.

Mi sembra logico quindi ammettere che essi, nelle condizioni di espanto, raggiungono un grado di differenziamento tale da determinare delle possibilità funzionali, la cui manifestazione tuttavia può essere più o meno inibita per le speciali condizioni di isolamento dell'organo.

Biologia. — *Nuove esperienze sull'influenza della corrente elettrica continua sui meristemi radicali*⁽¹⁾. Nota II di ALDO SPIRITO, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. E. CARANO.

Nella Nota precedente⁽³⁾ ho già riferito di alcune esperienze riguardanti l'influenza della corrente elettrica continua sui meristemi radicali. Usando come primo materiale radici di *Vicia faba* e di *Lupinus albus* ho potuto vedere che correnti di una stessa determinata intensità, mentre non ostacolano l'accrescimento degli apici rivolti verso l'elettrodo negativo, producono in breve un arresto dello sviluppo degli apici rivolti verso l'elettrodo positivo. L'analisi citologica eseguita sugli apici di tali radici ha rilevato condizioni uguali a quelle proprie delle radici normali nelle prime, e cioè tra l'altro notevole numero di cellule in divisione cariocinetica, e assenza assoluta di quest'ultime nelle seconde.

Prima però di procedere avanti nelle indagini ho voluto confermare i risultati già raggiunti usando nuove modalità sperimentali le quali fossero in grado di convalidare sempre più la veridicità di essi, in maniera quindi da poter proseguire nel mio cammino seguendo una linea fin dal principio sicuramente tracciata.

Non starò qui a descrivere di nuovo la tecnica già adoperata, rimandando il lettore alla Nota predetta: dirò solo che in quelle esperienze le radici, durante l'azione della corrente, erano immerse in acqua di fonte, dentro piccoli canaletti scavati nella paraffina, la sezione dei quali era più grande di quella delle radici poste in esperimento. In tal maniera è venuta a mancare la possibilità di conoscere quanta corrente, di quella necessaria a produrre gli effetti predetti e misurata dal milliamperometro, passasse in realtà nelle radici e quanta nell'acqua circostante. Di più poi e per la stessa ragione si poteva prospettare il dubbio se ci fossero delle differenze quantitative di corrente a seconda che le radici fossero disposte con l'apice verso l'uno o l'altro elettrodo; ciò che invece era necessario sapere con precisione per una esatta valutazione degli effetti differenziali ottenuti.

Per poter quindi precisare questi dati sperimentali ho impostato una nuova serie di esperienze valendomi, prima di tutto, di disposizioni tali da permettere un regolare sviluppo delle radici al di fuori dell'acqua. Descrivo

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 2 febbraio 1936.

(3) In questi «Rendiconti», vol. XXII, pp. 69-75, 1935.

brevemente la nuova tecnica e l'apparecchio adoperato. Questo è formato da un recipiente di vetro *a* chiuso da un coperchio *b*. Nel fondo del recipiente è posta dell'acqua che serve a mantenere nell'interno di esso una certa umidità. Nella parte superiore dell'apparecchio è tenuto sospeso, con sostegni di vetro, il seme di *Vicia faba* (uno per ogni esperimento), rivestito con un esile strato di cotone umido, con la radice in sviluppo disposta verticalmente e con l'apice rivolto in basso (fig. 1, *c*).

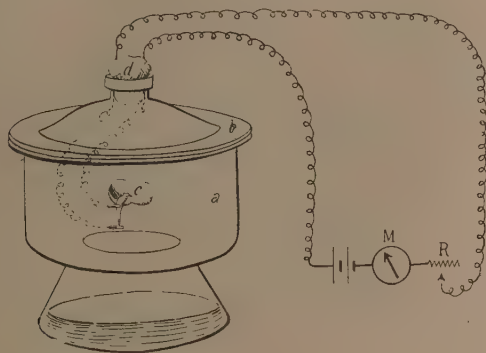


Fig. 1.

Gli elettrodi, di filo di platino prolungantisi in linguette di cotone umido, sono a contatto rispettivamente della punta della radice e della base di essa (fig. 2). Gli elettrodi di platino sono in continuazione con fili di rame iso-

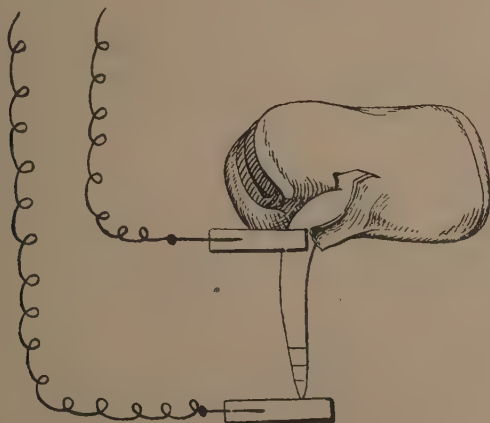


Fig. 2.

lato, i quali escono dall'apparecchio per l'apertura *d* chiusa da un batuffolo di cotone. La sorgente elettrica è costituita da pile a secco. Completa il

circuito una resistenza variabile R e un microamperometro M. Nelle ricerche precedenti io aveva adoperato un milliamperometro graduato a centesimi di milliampère, strumento allora più che sufficiente dato che l'intensità della corrente passante nell'apparecchio era di 0,08 milliampère, distribuita nei nove canali contenenti l'acqua in cui erano immerse le radici. Usando questa volta una singola radice per ogni esperimento e passando la corrente esclusivamente in essa è chiaro che si è dovuto diminuirne notevolmente l'intensità: da ciò la necessità di uno strumento di misura molto più sensibile ⁽¹⁾.

Con questa nuova tecnica è stata anche eliminata qualsiasi possibilità come azione pratica da parte di eventuali processi di elettrolisi esterni alle radici che potessero alterare la reale valutazione sperimentale.

Dirò subito che i risultati ottenuti con tali disposizioni sperimentali sono perfettamente riconducibili a quelli precedenti. In ogni modo reputo opportuno riferire uno dei protocolli delle nuove esperienze.

Vicia faba. Intensità della corrente: 0,00125 ma. Temperatura nell'interno dell'apparecchio 18°-19°. Durata dell'azione ore 24.

In questo protocollo sono stati distinti tre gruppi di esemplari. Un primo gruppo comprende le radici con l'apice a contatto con l'elettrodo positivo; un secondo gruppo comprende le radici con l'apice a contatto con l'elettrodo negativo e il terzo comprende le radici che, a parità di tutte le altre condizioni sperimentali, non hanno subito l'azione della corrente e che perciò sono servite di controllo. Ricorderò ancora che, anche in queste nuove ricerche, sugli apici delle radici sono stati tracciati, a determinata distanza dalla punta (fig. 2) prima dell'inizio dell'esperimento, dei sottili segni con inchiostro di Cina: essi sono serviti per mostrare macroscopicamente gli effetti della corrente sullo sviluppo degli apici radicali così trattati. Al termine dell'esperimento, e cioè in questo caso dopo 24 ore di azione, si è potuto notare la quasi assenza di allungamento degli apici radicali in contatto con l'elettrodo positivo e invece un normale sviluppo degli apici posti a contatto con l'elettrodo negativo, riconducibile allo sviluppo degli apici degli esemplari normali di controllo.

Al termine dell'esperimento gli apici radicali trattati con la corrente e quelli di controllo sono stati fissati e su di essi si è eseguita l'analisi citologica. Questa ha mostrato in modo chiaro che vi è assenza assoluta di cellule in divisione cariocinetica negli apici disposti con la punta a contatto con l'elettrodo positivo, mentre vi è un notevole numero di mitosi, come è rilevabile negli apici normali di controllo, in quelli disposti con la punta a contatto con l'elettrodo negativo.

Le nuove e precise disposizioni sperimentali sopradescritte ci permettono quindi di concludere (ed è questo lo scopo della presente Nota che

(1) Ringrazio vivamente i proff. Trabacchi e De Tivoli che mi hanno gentilmente messo a disposizione gli strumenti di misura.

conferma completamente i risultati di quella precedente) che correnti elettriche continue di uguale intensità passanti nelle radici di *Vicia faba* secondo il loro asse longitudinale, esercitano su di esse, a parità di tutte le altre condizioni sperimentali, azioni completamente differenti se la punta è posta a contatto con l'elettrodo positivo o con quello negativo.

Commemorazione del Socio Nazionale Ettore Marchiafava

tenuta dal Socio ANTONIO CESARIS-DEMEL nella seduta del 2 febbraio 1936.

ipse suas artes, sua munera, laetus Apollo
augurium citharumque dabat celerisque sagittas.
Ille ut depositi proferret fata parentis,
scire potestates herbarum usumque medendi
maluit et mutas agitare inglorius artes.

(*Aen.*, XII, 397-7).

Grande, nobilissima e soprattutto schiettamente italiana la figura di quel Grande che oggi vorrei con le mie parole rievocare innanzi a Voi nella sua interezza, in questa Accademia che Egli onorò sempre della Sua presenza ed alla quale venne portando con la Sua suadente e sapiente parola gran parte dei risultati delle sue osservazioni e dei suoi studi.

E mentre io comincio a parlarvi di Lui, di Ettore Marchiafava, i miei occhi ed i vostri lo cercano invano in questa sala e lo scanno ch'Egli soleva occupare è vuoto, e la sua persona così simpaticamente nota e pur nella tarda vecchiezza ancora validamente eretta in una purissima linea di composta eleganza, la possiamo rivedere solo nella rievocazione del ricordo, che resterà di Lui sempre vivo in noi che lo abbiamo conosciuto, perchè alimentato dalla riconoscente ammirazione di quanto Egli ha fatto, di quanto di prezioso Egli ci ha lasciato in eredità scientifica e spirituale.

E così se io mi limitassi oggi a parlarvi di Marchiafava unicamente come anatomo-patologo, per avere io stesso amata e coltivata questa scienza, e per avere Egli per tanti anni tenuta la cattedra di questo insegnamento a Roma, acquistandovi subito larga e meritata fama, io riuscirei fatalmente incompleto e verrei a mancare a quel compito che, altamente onorandomi, l'Accademia dei Lincei ha voluto affidarmi. Chè se nell'Anatomia patologica, come vedremo, Marchiafava fu sommo Maestro ed infaticabile animatore, dell'Anatomia patologica si valse per raggiungere altissime mète nel campo della Igiene sociale e della Clinica e dagli studi medici discostandosi, seppe anche in altri campi distinguersi per una spiccata personalità.

Ettore Marchiafava arrivò presto alla cattedra e quello che per altri avrebbe potuto sembrare fortuna, fu meritato compenso al suo fervido ingegno ed alla vasta coltura che con appassionata costanza Egli si procurò e nel campo degli studi classici ed in quello della Medicina.

Nato il 3 gennaio 1847 a Roma, vi si laureò con grande onore nel 1871. Appena laureato fu assistente all'Ospedale di S. Spirito a Roma per poco più di un anno, giacchè nel 1872 fu assunto quale assistente nell'Istituto di Anatomia patologica diretto da Tommasi Crudeli.

Fu questo l'unico periodo della sua vita nel quale prestò servizio in sale ospedaliere e lo prestò in modo così degno da meritarsi una medaglia d'oro: Ed è certamente cosa insolita che, con così breve tirocinio ospedaliero, Egli abbia potuto poi divenire clinico insigne quale altro mai (e vi ricordo che Egli fu medico di pontefici, di Casa Savoia e di tante altre illustri personalità), cosa insolita è vero, ma facilmente comprensibile quando si pensi quanto le conoscenze della Anatomia patologica, non siano solamente utili, ma assolutamente necessarie al clinico per fare la diagnosi ed essere poi da questa sicuramente guidato a formulare la prognosi ed ad istituire la terapia.

Nel periodo dell'assistentato si recò in Germania, dove gran parte della scienza medica stava rinnovandosi. Fu nel 1875 a Strasburgo dove, come poi Egli ha ricordato nella bella commemorazione che di Recklinghausen fece in questa Accademia, trovò nell'Istituto di questi larga ospitalità.

Tornò poi dalla Germania portando con se abbondante corredo di cognizioni dottrinali e tecniche e nel campo della istologia patologica, che stava rinnovandosi, ed in quello della batteriologia, che stava allora sorgendo. E di queste cognizioni subito si valse e ne fanno fede le numerose pubblicazioni sopra argomenti vari di Anatomia patologica che furono, per il loro valore, accolte in questa Accademia (la prima nel 1876) prima dunque che Egli vi fosse nominato Socio Corrispondente. Ricordo che questo avvenne nel 1899, mentre nel 1908 fu nominato Socio Nazionale e nel 1933 fu assunto all'alta carica di Vice Presidente. Queste pubblicazioni gli valsero la nomina di Straordinario alla cattedra di Anatomia patologica in Roma, cattedra che lo vide Ordinario nel 1881 e che Egli altamente onorò poi fino al 1922, nel quale anno Egli dovette lasciarla per avere raggiunti i limiti di età.

Ma con questo distacco dolorosissimo per Lui non si è però arrestata la sua attività. In quella data che per molti rappresenta un necessario bisogno di riposo, perchè spesso congiunto ad un decadimento delle attività intellettuali, è cominciata per Lui una nuova vita nella quale abbandonate le quotidiane fatiche dell'insegnamento (gravose specialmente per un anatomico-patologo che come Marchiafava non si è mai scostato dal tavolo anatomico) ha potuto, e nell'Istituto che era stato suo, e nel quale fu sempre poi amorevolmente accolto, e più che tutto nella quiete del suo studio, che lo vedeva fino dalle prime ore del mattino intento al lavoro, maturare mirabili opere di pensiero e nel campo della patologia, venendo in questo a approfondire signorilmente il frutto della sua larga esperienza anatomica e clinica, e nei vasti campi della profilassi sociale ed ancora, come vedremo, in quelli dilettevolissimi per Lui, degli studi storici sulla medicina e degli

studi classici. Nelle pagine da Lui vergate in questo tempo, invano cerchereste un affievolimento nella profondità del pensiero, nella tenacia della memoria, nella vigoria del raziocinio, esempio veramente mirabile di una mente elettissima che si mantenne giovanile ed agile fino all'ultimo giorno.

Troppo numerose sono le pubblicazioni che Marchiafava ci ha lasciate, colla sua multiforme attività, perchè se ne possa qui parlare partitamente. Possibile è solo riferirne le linee principali, soffermandoci specialmente su quelle che lasciarono solchi più profondi nella scienza o che ebbero una influenza notevole nelle prodigiose opere di previdenza sociale e di profilassi che il Regime ha attuato e sta attuando ed alle quali Marchiafava, non solo aprì la strada con i suoi studi anatomici e clinici, ma delle quali fu un assertore convinto e quando le vide attuate, un entusiasta ammiratore. Dando un rapido sguardo ai tributi da Lui portati nei vari capitoli dell'Anatomia patologica vediamo che questi risentono dei tempi nei quali furono concepiti e condotti a compimento in quanto che, nella massima parte, vertono oltrechè sulle alterazioni che nell'intimo dei tessuti si svolgono e della malattia sono la base anatomica cellulare, sulla causa stessa della malattia allo studio della quale la bacteriologia, la parassitologia, venivano in quei tempi offrendo mirabili e sicuri metodi tecnici di ricerca.

Studi che Egli integrò poi sempre con ripetute osservazioni al letto del malato che per Lui rappresentava l'*experimentum crucis* come controllo indispensabile per dare alle proprie conclusioni una indistruttibile solidità.

Il gruppo di lavori più complesso, e che forma un tutto organico e per per molti punti risolutivo, in rapporto agli argomenti trattati, e per il quale Marchiafava è più largamente noto, è quello che si riferisce allo studio della malaria ed è doveroso quindi che cominciamo a parlare di questo.

Ma non ne dirò diffusamente. Il farlo per metterne in luce il pregio e la importanza sarebbe quasi una irriverenza perchè ormai sono entrati vittoriosamente, sì da essere ritenuti veramente classici, nel patrimonio comune della Scienza tanto che, se sono noti, per essere riferiti nelle loro particolarità in tutti i trattati di ogni paese, a tutti i medici, lo sono anche, nella loro essenza, a persone non mediche che abbiano una discreta cultura. Ci basterà quindi riferirne brevemente, seguendoli nella loro gloriosa progressione, ricordando che se Marchiafava iniziò fino dal 1877 i suoi studi sulla malaria (e ricordiamo la « La polmonite malarica », « La degenerazione amiloide nella malaria e l'ulcera rotonda dello stomaco », « La perniciosa comatosa malarica », « La nefrite della malaria ») solo nel 1879 nello studio della genesi della melanina segnò il primo passo nelle scoperte che condussero alla conoscenza del parassita endoglobulare della malaria. Egli dimostrò allora che il pigmento che si trova a forma granulare negli organi dei malarici, contrariamente a diverse interpretazioni, pur queste discordanti fra loro, date da Virchow, da Frerichs, da Mosler, da Arestein e da Kelsch, deriva da una trasformazione della emoglobina in melanina, nell'interno dei globuli

rossi, lavoro chimico endoglobulare che mal si comprendeva potesse spontaneamente avvenire e che solo successive osservazioni dello stesso Marchiafava e Celli permisero di attribuire ai parassiti endoglobulari. Dopo la scoperta del parassita della malaria fatta nel 1880 da Leveran, scoperta che Marchiafava in tutti gli scritti suoi riconosce e magnifica, questi nel 1883 da solo, nel 1885 con Celli, dimostrò del parassita la sede endoglobulare (non prima bene definita da Leveran) le forme ameboidi endoglobulari senza pigmento, l'accumularsi delle forme di scissione dei parassiti nel cervello nelle perniciose e tante altre interessanti particolarità che ebbero poi tosto l'approvazione di eminenti scienziati e per l'Italia basti ricordare Golgi e Grassi, e per l'estero Hans Ziemann, che nel grande trattato delle malattie tropicali di Mense scrisse il capitolo sulla malaria. Poco dopo nel 1889 Marchiafava e Celli differenziarono dai parassiti della quartana e della terzana, quelli delle gravi febbri estivo-autunnali a tipo pernicioso tanto diffuse nell'Agro Pontino e questa nuova forma fu subito da tutti i malariologi ammessa e passò nei trattati mano a mano che si venivano aggiornando in Italia ed all'estero alle nuove conquiste.

Mentre poi la grande scoperta del parassita della malaria per opera di Leveran, Marchiafava, Golgi, si era sicuramente affermata, nel 1886 da Tommasi Crudeli, poi nel 1889 con maggiore tenacia in un Congresso di Medicina di Roma, nel quale il relatore Marchiafava concludeva per il dimostrato parassitismo, due oratori ne contrastarono le conclusioni riferendo le descritte formazioni endoglobulari non a parassiti, ma a fatti degenerativi. L'opposizione veniva da Mosso: e la grande e meritata fama da lui acquistata nel campo della Fisiologia veniva a dar veste di attendibilità alle osservazioni istologiche alle quali per la prima volta si accingeva, e dal clinico Maragliano, che nelle critiche a Mosso si era associato e che così concluse il suo discorso: «... se riuscirete a convincerci che la malaria è un prodotto di un parassita che vive nel sangue, sarà il principio di una grande epoca per la Medicina in Italia, perchè dopo l'impulso dato da Leveran si può dire che voi avete recato il maggior contributo alla conoscenza di questa malattia. Noi vi auguriamo che voi vinciate e che ci trasciniate come vinti dietro il vostro carro trionfale».

E la vittoria venne presto e completa, col riconoscimento delle conclusioni da Marchiafava formulate. Vittoria coronata poi da ben altri allori, ché per l'opera di Marchiafava e dei Suoi allievi si venne negli anni seguenti e si può dire fino ad oggi, e nelle corsie degli ospedali, e studiando i malati nell'inospitale Agro Pontino ed al tavolo anatomico, costruendo nella sua completezza anatomo-patologica, clinica, profilattica, il grande capitolo della malaria veramente originale in alcune parti e specialmente per quello che si riferisce alla anatomia patologica delle forme acute e croniche, con speciale riguardo alla base anatomica delle forme perniciose determinate unicamente

dal parassita delle febbri estivo-autunnali, il *plasmodium falciparum* di Marchiafava e Celli⁽¹⁾.

Fissate così magistralmente da Lui le nozioni fondamentali della perniciosità, veniva a delinearsi la necessità che la profilassi della malaria si indirizzasse ad impedirne le forme più gravi, le perniciose, e di questa profilassi Egli fissò le direttive e le sostenne con convinzione d'apostolo e ben si comprende così la Sua gioia immensa quando per opera del Regime, al quale Egli si era dato fin dal principio con convinta dedizione, redento l'Agro Pontino col sorgere di Littoria, Egli esaltò al Senato questa magnifica opera redentrice e che « in passato fu vanamente tentata da Consoli, da Imperatori Romani, da Papi e dai Governi che a questi si succedettero... » e nel giorno che vide risorgere a vita nuova nella gloria del solè, nella fervente attività degli uomini il paludoso e micidiale Agro Pontino, tolto dal disonorevole abbandono e dal letargo secolare egli abbia esclamato: « In quel giorno pur nella mia avanzata vecchiezza ho provata la gioia di vivere », al Senato ancora, ricordo, parlando su questo argomento ebbe uno scatto di protesta e di gioia insieme, e per lui d'animo mite, insolito nella sua energica espressione, quando lamentando che i trattati tedeschi di Igiene indichino l'Agro Pontino come la zona paludosa al mondo più devastata dalla malaria (tralasciando di citare zone nei paesi tropicali ben più mortifere) vibratamente esclamò: « Ma viva Dio, d'ora innanzi questo esempio non potranno più darlo gli stranieri... ora che questo mirabile risanamento redentore, trasformatore dell'Agro Pontino prenderà posto nella Storia ».

E un nuovo inno di ammirazione Egli elevò poi al Regime quando fu relatore al Senato per la fondazione di Sabaudia, inno nel quale ricorda Virgilio quando nel primo canto del suo divino poema descrive il duce troiano che dopo la furiosa tempesta approdato al suolo libico ammira con commozione il fervore del lavoro degli immigrati Tirii nella costruzione di Cartagine.

Innumerevoli sono i lavori che Marchiafava nel campo anatomopatologico e clinico ci ha lasciati e sarebbe ora troppo lungo l'elencarli. Vertono su tutti gli organi e sistemi, per cui possiamo dire che in ogni capitolo della anatomia patologica e della clinica Egli ha su qualche punto allargate le nostre cognizioni. Di alcuni di questi faremo però ora un breve cenno, di quelli cioè che hanno caratteri di spiccata originalità o che contengono vere scoperte.

Dei suoi studi sul sistema nervoso eccelle così sopra gli altri quello che ha condotto a mettere in luce una speciale alterazione, prima non conosciuta, e propria dell'alcoolismo cronico e consistente in una degenera-

(1) Questo complesso di lavori fu da Marchiafava e Bignami riunito in un trattato veramente classico *Sulla infezione malarica* del quale da Marchiafava, e dal suo valoroso collaboratore Nazari, fu pubblicata recentemente una nuova edizione, che tradotta anche all'estero, ebbe ed ha una grande diffusione.

zione primitiva sistematizzata nelle vie commessurali dell'encefalo e cioè nel corpo calloso nel quale è chiaramente visibile anche macroscopicamente, vera scoperta questa che ci ha condotti alla conoscenza di una nuova malattia (detta oggi malattia di Marchiafava) che ha notevolmente allargate le nostre cognizioni sulle alterazioni primitive sistematizzate che, se erano ben conosciute avvenire nel midollo spinale, erano mal note o al tutto ignorate per quello che si riferisce all'encefalo.

Marchiafava diede ancora con Celli, dopochè Ughetti ne aveva data una imprecisa notizia, la prima descrizione delle proprietà morfologiche e tintoriali dell'agente specifico della meningite cerebro-spinale epidemica (che è generalmente indicato con il nome di meningococco intracellulare di Weichselbaum) affermandone la frequente sede nelle cellule dell'essudato, la non reperibilità in circolo, la somiglianza coi gonococchi, e di questa sua scoperta, che specialmente all'estero si tentava di contestargli, egli riportando il testo preciso della sua prima Nota, rivendicò validamente la priorità sul *Centralblatt für Bakteriologie* (1907).

Un'altra malattia che porta il nome di Marchiafava ma che da Lui, per le note che specificamente la caratterizzano, fu chiamata *Emosiderinuria perpetua* e che non era precedentemente nota ai clinici ed agli ematologi, è entrata ora a far parte del capitolo delle anemie emolitiche a decorso cronico e da quelle già note si differenzia per essere solo eccezionalmente accompagnata da ittero, per non presentare splenomegalia, per dare un reperto ematico simile in parte al pernicioso, con eliminazione costante da parte dei reni della emosiderina.

Notevolissimo poi è l'insieme dei lavori dell'apparato circolatorio e e specialmente sulle alterazioni delle arterie coronarie in rapporto all'*angina pectoris*, che hanno portato un notevole tributo di chiarificazione alla contrastata interpretazione dei fenomeni anginosi ed ad indicazioni preziose sulla loro terapia.

Nel sistema circolatorio descrisse Egli ancora per il primo le alterazioni che nei vasi la sifilide produce, differenziandole nettamente da quelle dipendenti da altre cause. Nell'apparato uropoietico sono classiche le sue osservazioni sulla glomerulite produttiva nelle quali si possono trovare le caratteristiche istologiche della lesione, magistralmente descritte. Ed infine nell'apparato respiratorio Egli ci diede per la prima volta la descrizione dell'induramento polmonare per non avvenuta risoluzione della polmonite cruposa.

Un'opera nella quale in modo perfetto Marchiafava, ha coordinate colle più antiche, le più moderne acquisizioni della scienza in rapporto alla dottrina della « Eredità » è la monografia ch' Egli dettò per il *Grande trattato di Anatomia patologica* che da Foà prende il nome. Nella prefazione Egli scrive: « Io accettai questo incarico sebbene lo sentissi gravoso per la mia età assai inoltrata (la monografia uscì nel 1930) perchè non conforme alla

direzione degli studi cui avevo atteso. Lo accettai sentendone tutta la responsabilità, ma pure con la speranza di porgere agli studenti di Medicina un riassunto delle cose più importanti intorno alla dottrina della eredità applicata alla patologia ». Somma modestia in queste righe, giacchè Egli ci ha lasciata un'opera altamente originale e non per soli studenti, ma per gli studiosi tutti anche i più colti. Mentre infatti nella prima parte è bellamente riassunto quanto la citologia ha portato nella dottrina dell'eredità, e ricorda la teoria del plasma germinale vengono riferite le ricerche sperimentali di Mendel applicate all'uomo, terminando con un ricordo preciso delle leggi premendeliane e mendeliane dell'eredità, nella seconda parte troviamo profusi a piene mani i tesori della sua lunga e meditata esperienza di anatomo-patologo e di clinico, in separati capitoli, sulla eredità nelle malformazioni e sulla eredità nelle malattie dei vari organi e sistemi, nelle malattie del ricambio, nei tumori ecc. terminando con un accenno ben augurante alla più larga diffusione delle norme che la Eugenia ci insegna e che tendono al miglioramento ed al perfezionamento della razza, « il che per il medico significa la più alta mèta della sua nobile missione in quanto è intesa alla difesa della discendenza dai mali ereditari ».

Opera invero poderosa, che dovrebbe essere oggi più diffusamente nota e per questo l'ho ricordata e che dovrebbe, tolta dalle strettoie di un trattato, essere pubblicata a sè, sì da poter più facilmente andare nelle mani dei più.

Nella pur vasta messe di lavori che Marchiafava ci ha lasciata, poco o nulla troviamo che si riferisca a ricerche sperimentali da lui personalmente eseguite, per quanto egli sia vissuto nell'epoca nella quale le ricerche sperimentali fiorirono e nel campo della fisiologia ed in quello della patologia.

Marchiafava per il continuo contatto che ha sempre conservato col malato da lui sempre appassionatamente studiato, ha preferito, con la sua perspicacia ed il suo finissimo intuito, trarre da questi le sue conclusioni piuttosto che ricorrere all'animale, le cui reazioni, il cui comportamento nelle varie condizioni fisiologiche si scostano e non sono sempre esattamente sovrapponibili a quanto suole avvenire nell'uomo. Così è che molte delle sue osservazioni e delle sue conclusioni fino dal nascere ebbero insito il pregio della stabilità sì da resistere ai più severi controlli, ed un esempio luminoso lo abbiamo su quanto egli ci ha dato nello studio continuato per decenni sulla malaria che ha basi veramente granitiche e indistruttibili.

Ed anche in una acuta critica che Egli fa nel suo discorso sui progressi della Medicina, ad alcune affermazioni formulate da Richet, ricordando il quale ha espressioni di viva ammirazione, quasi a difesa delle proprie direttive nell'opera scientifica, scrive che Richet non ha ragione di preferire sempre l'esperienza alla osservazione e che non è vero che il lavoro di osservazione sia sempre stato in medicina vano ed infecondo giacchè « l'osservazione diretta anche senza l'esperimento è parte della Scienza quale uno, anzi il primo

dei mezzi per conoscere come sono realmente le cose della natura. E non è dalla osservazione clinica ed anatomo-patologica che partono le iniziative della eziologia e della genesi dei processi morbosi?».

Da ciò evidentemente egli deduce che le ricerche sperimentali devono mettersi a servizio dell'osservazione sull'uomo dalla quale devono venire le norme direttrici all'esperimento. Delle ricerche sperimentali così intese da lui, per il tanto che esse possano dare alla scienza, si è dimostrato poi fervente ammiratore nella lucida relazione da lui letta in Senato quando vi fu presentata la legge sulle « Modificazioni alle disposizioni che disciplinano la natura della vivisezione degli animali vertebrati a sangue caldo » nella quale egli mette in bella luce ed in chiaro rilievo quanto la scienza sperimentale, adoperando gli animali vertebrati, ha potuto dare alla scienza e sarebbe ora pregio dell'opera citare alcune delle avvincenti parole sue. Ma non lo faccio per brevità e mi limito a riportare alcune frasi che il senatore Pestalozza rivolse al relatore Marchiafava e che, dello spirito animatore della bella relazione, fanno una apologia. Egli disse allora, mentre la discussione sulla legge si stava svolgendo: « A noi senatori queste discussioni hanno formata occasione di un grande godimento attraverso la lettura della relazione del nostro illustre collega Marchiafava che tutte le compendia. Lo spirito sempre giovanilmente alacre del grande Maestro della Medicina italiana ci ha dato una sintesi così completa della questione che il leggerla è fonte di compiacimento e di ammirazione infinita, per il genio tenace negli anni, per la cara immagine paterna di Lui così venerato da tutti. Chi dubitasse ancora non ha che a leggere questo inno entusiastico alla scienza sperimentale ed agli immensi benefici che essa ha arrecato all'umanità ».

Dello studio della Storia della Medicina Marchiafava anche si compiacque e dalla conoscenza delle opere di quei grandi che nella storia stessa sono iscritti a lettere d'oro, Egli trasse ammaestramenti preziosi che gli servirono poi di guida nella sua vita di scienziato e di medico. E così poi fu facile a Lui di infiorare i suoi scritti riflettenti i più vari argomenti, di richiami storici ricavati sempre con preciso criterio di opportunità dai più diversi autori dalle epoche antiche fino ai giorni nostri. Di questa sua coltura egli si valse poi in modo preclaro e nella prolusione che Egli tenne all'aprirsi dell'anno Accademico 1919-1920 all'Università di Roma « Intorno ai progressi della medicina » e nella commemorazione che Egli, in occasione del secondo centenario dalla morte, tenne su Giovanni Maria Lancisi nella Biblioteca Lancisiana. L'una e l'altra opere poderose che si integrano a vicenda, interessantissime per i raffronti storici, per le notizie in parte inedite in parte mal note, il tutto ispirato al nobile ed alto intendimento di rivendicare al Genio Italiano scoperte e priorità, che misconosciute per ignoranza o volutamente, furono poi ad altri ingiustamente attribuite, rivendicazioni inoppugnabili e basate sulle parole stesse degli autori che Marchiafava esattamente riporta e commenta. Vediamo così, e per quanto la cosa sia nota, è sempre opportuno ripeterla e ripetendola

onoriamo la memoria del Nostro Grande che di queste rivendicazioni fu paladino, come la scoperta del piccolo circolo la dobbiamo a Realdo Colombo e quella del grande ad Andrea Cesalpino e che Malpighi per il primo vide e descrisse il circolo capillare nei polmoni e come infine Bassi coi suoi studi sul calcino fu precursore di Pasteur e di Koch nello studio delle malattie di infezioni e nel tecnicismo per isolarne gli agenti specifici. E mi è grato di ricordare ancora come in un altro scritto suo e cioè nella prefazione che egli dettò quale Presidente del Consiglio superiore di sanità al voluminoso volume su *La Tuberculosis* edita nel 1929, pubblicata dal Ministero dell'interno, si compiace di rievocare e di mettere nella giusta luce i classici lavori di Maffucci che fu un vero precursore nello studio sulla tubercolosi, in quanto Egli dice in questi « si trovano fatti ed idee che si collegano colle ricerche recenti sulla eredità tubercolare », lavori che non sono mai ricordati. In questa prefazione poi, ed è bene ricordarlo, Marchiafava dopo aver rapidamente riassunte le nuove teorie, suffragate da ampia raccolta di osservazioni anatomiche, sul modo di stabilirsi della tubercolosi nei bambini (complesso primario) e sul significato e sul modo di istituirsi della reinfezione della tubercolosi negli adulti, che modifica quanto fino ad allora dagli anatomici e dai clinici era creduto, scrive: « Quando io ebbi cognizione di queste indagini e delle conclusioni che se ne erano ricavate, pensai se l'anatomia patologica non ci avesse mal guidato, se le osservazioni fatte fino a quel tempo fossero state sbagliate, se la interpretazione non fosse erronea. E allora negli ultimi anni del mio esercizio (e qui io ricordo che egli lasciò l'insegnamento nel 1922) mi detti la premura di osservare il maggior numero di tisi polmonari degli adulti... » a riprendendo queste osservazioni al tavolo anatomico e sottoponendo a rigorosa critica quanto dai novatori si andava affermando (nè io posso entrare ora qui in una minuta disamina di quanto Egli scrive e conclude a questo proposito, ma invito chi di studi sulla tubercolosi si interessa di prenderne esatta visione), viene a formulare una nuova classificazione, delle varie forme anatomiche che la tubercolosi può presentare, alla quale qualunque anatomo-patologo può sottoscrivere e ancora dimostra la meravigliosa tempra di studioso che, sull'ottantina, sente ancora il bisogno di rinnovarsi e di progredire.

Una parte però preziosa dell'opera di Marchiafava noi non potremo conservare. Vive ora solo nella memoria di chi ebbe la fortuna di conversare con Lui, di ascoltarne le lezioni al tavolo anatomico, nelle quali prodigava a piene mani i tesori della sua esperienza e del suo raziocinio e che per il luogo ed il modo stesso col quale venivano impartite, male si prestavano ad essere fissate sulla carta. Quanti raffronti, quante deduzioni geniali, che nel fervore del suo lavoro mentale Egli veniva esponendo, Egli non ha poi ripetuto nei suoi scritti e spenta l'eco della sua voce male si potrebbero oggi ricostruire nella loro logica solidità. Ma qualche cosa di questa opera creatrice è restata nella mente dei suoi allievi ed in questi

comprendo gli innumerevoli studenti che nel lungo volgere di anni lo ascoltarono, che col quotidiano esempio di un retto raziocinio basato unicamente sulla obbiettiva osservazione dei fatti, non deformata mai da aprioristiche concezioni o da pericolose direttive teoriche, vennero plasmando la loro mente sulla mente del Maestro. Così è sorta e vive gloriosa la Scuola Medica Romana che ha le sue radici nella immortale opera di Lancisi e di Baglivi e che in Marchiafava ebbe un degno e più grande continuatore e possiamo dire anche più fortunato, perchè la tarda età alla quale Egli pervenne gli permise di dare di sé tutto quanto poteva mentre come ben è noto Baglivi ebbe la vita troncata a trentotto anni nella pienezza del suo rigoglio e quanto tanto ancora avrebbe potuto dare alla Scienza e alla Umanità. Scuola Medica di Roma che nei tempi moderni ebbe come astri maggiori Bignami, Dionisi, Nazari, Bastianelli, Arcangeli per non ricordare tanti altri meno noti e meno ricordati per il lavoro scientifico, ma che seppero svolgere e svolgono attualmente opera preziosa di medici al letto del malato così come la svolgeva con infinito amore e con somma perizia il loro grande Maestro.

Marchiafava, come abbiamo ricordato, fu anche umanista insigne e lo fu certamente per naturale prorompente inclinazione e per la facilità innata di apprendere le lingue, e come il latino ed il greco, Egli ebbe famigliari sì da leggerle e parlarle, il francese, il tedesco e l'inglese. Di questa sua coltura umanistica Egli si valse non solo per infiorare il suo dire con appropriate citazioni tolte dai classici, ma per stendere anche pregevoli saggi di critica, che comparvero in questi ultimi anni sulla *Nuova Antologia*. Tali « Orazio e Dante » e l'altro più esteso, sul quale per il suo speciale interesse voglio soffermarmi « Alle soglie di un bimillenario. Il vino e la poesia di Orazio » nel quale Egli assume le difese del grande poeta latino Orazio per essere stato questi spesso accusato dai posteri (e con numerose citazioni prese dalle varie letterature ne dà un'ampia documentazione) di aver avuto una inclinazione smodata ai piaceri della tavola e particolarmente ai buoni vini. Ma Orazio morto non può difendersi, occorre che un vivo oggi lo difenda. E questo vivo vuol essere Lui e sentite colle sue stesse parole, e si ha l'illusione, udendole, che Egli stesso parli, come Egli giustifica il suo intervento e quali mezzi Egli abbia voluto adoperare: « Fu per questa ragione che, nella mia vecchiezza, dopo gli ottantacinque anni, come un sollievo della mente pensai di indagare in tutte le poesie di Orazio, le odi, gli epodi, le satire, le epistole, in quali occasioni e come si parli del vino e dare poi un giudizio che esca dalla bocca stessa del poeta ».

E questa indagine Egli fa, attraverso la estesa e multiforme opera poetica di Orazio, citando e parafrasando versi e strofe con fine acume discriminativo sì di avvicinare, pur nella lunga trattazione, instancabilmente, l'attenzione del lettore. Ed il lettore ne rimane ammirato, chè veramente sorprendente è la freschezza di spirito con la quale all'età di ottantacinque anni Marchiafava leggeva Orazio. Egli che veniva scoprendo e gioie e miserie

attraverso la poesia delle odi, delle satire, delle epistole, ha avuto un senso così umano, così colorito e penetrante che ben si comprende come Orazio abbia potuto essere anche per la sua vecchiezza, un consolatore. E che tale sia stato Orazio per Ettore Marchiafava, come diceva, essere stato per lui un altro grande Linceo scomparso da poco, Gerolamo Vitelli, ci dà chiara testimonianza e della vitalità del poeta latino a duemila anni dalla morte e della energia spirituale di Ettore Marchiafava vecchio di anni ma giovane di spirito, e della profonda unità della sua ammirevole complessa cultura, umana veramente, e latina nel più elevato senso della parola.

E la conclusione alla quale Marchiafava arriva alla fine del suo articolo è quella alla quale Egli intuiva certamente di giungere, conoscendo già da tempo la poesia di Orazio, ed è questa: « Si deve aver fede che Orazio non eccedesse nel bere e che non conoscesse per esperienza propria l'ebbrezza: egli poteva dire di sè come poi sant'Agostino nelle sue *Confessioni*: « Ebrui nunquam fui ».

Terminato così nobilmente il suo compito noi vediamo che l'uomo di lettere, prima di prendere congedo dal lettore, si ritrae per dar posto al Medico e più che al medico all'Apostolo del bene sociale e nelle ultime righe ripete quanto aveva già in Senato ed altrove con profonda convinzione affermato e ripetuto, che l'astinenza dal vino nella fanciullezza e nell'adolescenza è di estrema importanza igienica per rafforzare la stirpe e benedice al Regime che di questo monito ha conosciuto la verità tenendone conto provvidamente nella legge sulla maternità e sulla infanzia, della quale Egli fu convinto relatore.

L'articolo così che per tante pagine si era mantenuto nelle alte sfere della più pura poesia, non termina con una perorazione finale, dello stesso, e come anche si usa, di più elevato tono, ma dalle alte sfere si abbassa e la poesia si fa quasi prosa, nè per questo si avvilisce, perchè materiata dalla più alta spiritualità intesa alla difesa della nostra razza, chè difendendo da impure contaminazioni i giovani, può procedere innanzi con tutta la sua forza innata.

E se il lettore poi volesse su l'opera perfetta della quale abbiamo ora parlato esercitare il proprio acume critico, potrebbe forse trovare una leggera contraddizione tra le conclusioni difensive formulate, in rapporto al vino, sulle abitudini di Orazio, sì da giustificare che Orazio nel vino trovasse letizia e conforto, e le affermazioni ultime che con la fede di apostolo Marchiafava ha formulato contro il vino laddove dice: « L'uomo che ha passata la prima età nella buona e forte salute, con lo spirito alacre e pronto, esperto negli esercizi fisici senza l'uso del vino, dovrà escluderlo dagli elementi necessari alla vita e considerarlo come una bevanda voluttuaria della quale si può fare a meno... ». Ma un punto fermo qui non pone fine al periodo, chè il medico si ricorda di essere stato difensore di Orazio e per non essere in troppo aperta contraddizione con se stesso, termina quasi a malincuore scrivendo « o da prendere con regola e moderazione ».

Ma la massima che Marchiafava ricorda di Orazio e che egli ha fatta sua nel giudicarlo e difenderlo: « Ex ore tuo te iudico » parmi si possa applicare al nostro Grande e lo dimostrano le integrali citazioni di brani che tolti dai suoi scritti abbiamo riportati e che non solo ci danno una più precisa idea della finezza dell'animo suo, ma anche quella delle direttive che lo hanno guidato nella sua vita di scienziato e di cittadino.

Quando io mi accinsi all'opera per espletare l'incarico che questa Accademia mi aveva benevolmente assegnato, io che lo ebbi all'inizio della mia carriera, giudice, che lo ebbi poi collega ed ultimamente, e l'animo mio esulta ora nell'affermarlo, estimatore ed amico, che ne avevo con le frequenti visite al laboratorio Suo di Via De Pretis seguita l'opera scientifica e ne avevo poi ammirato il meraviglioso progresso, io dico, credevo di avere di Marchiafava una precisa conoscenza e questa era tale da portarlo molto in alto nella mia estimazione.

Ma mano mano che la mia preparazione, per parlarvi degnamente di Lui procedeva, e dell'opera sua nuove gemme venivo scoprendo, e quelle opere sue che mi erano note e forse affievolite nella memoria io più seriamente meditai, io vidi a poco a poco ingigantire la sua figura. E pensando alla fatica che io ho dovuto compiere per raccogliere sì da poter leggere nell'originale tutto quanto nei vari campi egli scrisse, chè molte delle cose sue si trovano in Atti, in Bollettini, in Riviste che, pur gloriose, hanno una scarsa diffusione in Italia e che non sono conosciute o considerate all'estero, io venni nella convinzione che questa grande e completa figura di scienziato e di cittadino, una delle più belle che l'Italia abbia avuto in questi ultimi anni, per quanto nota, non lo sia così intimamente e completamente come lo meriterebbe. Formulo così l'augurio oggi che, quando arrisa all'Italia la vittoria che non le può mancare, verranno tempi più propizi alla attuazione della proposta che ora io voglio formulare, dell'opera di Ettore Marchiafava si faccia una edizione Nazionale veramente completa e comprendente tutte le manifestazioni che nel campo medico, sociale, storico, umanistico egli ci ha lasciate.

Se tale doveroso omaggio fu fatto già anche per altri nostri Grandi, che nella dottrina da loro professata lasciarono traccie profonde, tanto più doveroso è il farlo per il Grande che noi abbiamo insieme ricordato, che non in un campo solo scrisse e produsse utilmente. Potranno così molti suoi estimatori ed amici riavvicinarsi a Lui per poterlo conoscere nella sua completezza e potranno allora provare quell'intimo godimento che io stesso ho provato nel compimento della mia modesta fatica. E questa opera completa verrà anche ad estendere e consolidare quella larga fama che già Marchiafava si era all'estero conquistata, ma basata sulla conoscenza di troppo poche cose sue per essere completa.

Necessario è anche il ricordare, per il loro intrinseco valore, le commemorazioni che Marchiafava ci lasciò (molte lette in questa Accademia)

di persone illustri nel campo della scienza, giacche ognuna non solo ci dà una precisa cognizione di quanto colui che Egli ha fatto rivivere nel ricordo ha scritto nel grande libro del Sapere, ma ci permette di meglio conoscere attraverso il prisma dei ricordi personali, dei giudizi, dei riferimenti, l'animo nobilissimo di Marchiafava nelle sue più delicate sfumature.

Troviamo così nelle accorate parole colle quali Egli rievoca e vivifica coll'efficacia del ricordo e della ammirazione, le belle figure di Angelo Celli, suo compagno di gloria e di lavoro, di Amico Bignami e di Antonio Dionisi, suoi diletti allievi e collaboratori (che Egli vide con immenso dolore scomparire dalla scena della vita, mentre Egli ormai carico d'anni poteva ancora validamente proseguire per la sua via) troviamo dico tutta la paterna riconoscenza ch'Egli sentiva per l'opera da loro compiuta a complemento ed in continuità della propria, e la compiacenza che almeno Celli « si sia spento nella visione dell'Italia redenta dalla malaria » chè, a questa redenzione Egli aveva tanto contribuito, che Antonio Dionisi assunto all'alta dignità di Accademico d'Italia « abbia trovato in ciò meritato premio all'opera sua esemplare di maestro e di cittadino ».

Nella commemorazione di Guido Banti invece, troviamo la più viva ammirazione per chi come Lui aveva nell'insegnamento seguiti i precetti del grande comune maestro G. B. Morgagni, insegnando agli studenti una Anatomia patologica vivificata dalla Clinica e lamentando che « a chi aveva individuate sconosciute forme morbose sotto l'aspetto nosologico, anatomicopatologico, patogenetico e terapeutico (che non avrebbe mai potute individuare se non avesse avuto a sua disposizione, come altri grandi ebbero: ad es. Virchow e Golgi, un reparto ospedaliero) si negasse poi la cattedra di Clinica Medica alla quale il senno della Facoltà Medica di Firenze lo aveva proposto. Velata, ma chiara allusione dell'aspirazione che forse anche Marchiafava ha avuto di lasciare il tavolo anatomico, che tanto già gli aveva insegnato, per la Clinica.

Altre commemorazioni Egli dettò per Recklinghausen, per Klebs, per Taussig, per Pio Foà, per William Osler e ricordo per ultima quella per Luigi Pasteur che si volse con grande solennità in questa Accademia nel 6 maggio 1923 e nella quale Marchiafava dopo aver con una analisi lucida e profonda illustrato le mirabili scoperte di Pasteur, dalla loro nascita alla loro tanto umanamente utile applicazione e che prese una per una isolatamente, « avrebbero potuto dare la gloria a molti scienziati » conclude che « da esse prende origine un'era nuova di Sapere e di Bene ».

Ricordo che nella memorabile commemorazione, furono degnissimi compagni per la concettosità e l'elevatezza del loro dire Filippo Bottazzi che parlò di Pasteur per quanto questi aveva dato alla Chimica, e Giulio Fano per quanto aveva dato alla Fisiologia.

Marchiafava nell'innata modestia sua non cercò mai onori, ma meritamente ne raccolse. Così negli ordini cavallereschi raggiunse i più alti gradi

e fu Cavaliere di gran croce del Grancordone dell'Ordine della Corona d'Italia; e Grande Ufficiale dell'Ordine Mauriziano. Per i meriti scientifici fu nominato socio delle più accreditate Accademie nazionali e straniere. Tra queste nomine in modo particolare si compiaceva di quella ottenuta a voti unanimi alla Società Reale di Medicina di Londra, presieduta allora da Manson e che nell'anno della sua nomina comprendeva solo nove membri stranieri e di questi, due italiani: Marchiafava e Golgi. Intimo compiacimento il suo perchè questa nomina originata dal riconoscimento della grandissima importanza dei suoi studi sulla malaria, tornava di grande onore alla gloriosa Scuola Romana che aveva seguito le sue orme ed in senso più lato anche alla Scienza Italiana.

Fu membro del Consiglio Superiore per l'Educazione Nazionale ed essendo stato eletto consigliere comunale, per due anni fu Prosindaco di Roma e poi anche Assessore di Igiene.

Fu nominato senatore nel 1913 e da allora, e fino a pochi giorni dalla morte, portò al Senato largo tributo del suo sapere con discorsi e relazioni che Egli fece in rapporto a provvedimenti legislativi nel campo medico e sociale, relazioni e discorsi ai quali abbiamo con alcuni riferimenti brevemente accennato e che alla lettura conservano ancora oggi tutta la loro freschezza, tutto il profumo dell'intima convinzione colla quale furono dettati.

Questi alti riconoscimenti cavallereschi ed accademici non valsero mai ad insuperbirlo. Affabile fu e rimase sempre con colleghi, amici, allievi e cogli umili che non ricorsero mai invano, ricavandone immensi benefici all'opera sua di Medico, con gli umili che trovarono sempre in Lui un fratello. Nel prodigare il bene plasmò l'animo ad una grande serenità ed i due lutti che lo colpirono negli affetti più profondi, colla morte della Compagna della sua vita e della sua adorata figliola, Egli sopportò con stoica rassegnazione cercando, solo nel lavoro e nelle opere di bene, lenimento allo strazio dell'animo suo.

Marchiafava serenamente si spese, il 24 ottobre 1935, e nelle sofferenze del male che, dopo strenua lotta ebbe ragione di lui, certamente egli trovò supremo conforto nella intensa purissima gioia di aver potuto assistere negli ultimi anni di sua vita alla miracolosa opera che, sotto la guida fortemente volitiva e fattiva del Duce, si è svolta e si sta svolgendo in difesa della nostra gloriosa stirpe per farla tornare alla sua antica grandezza.

Opera difficile e complessa che tanti problemi affrontò, tanti ne vinse, e nella attuazione della quale Egli, se fu spesso soldato, fu anche talora valoroso condottiero, come nella redenzione dell'Agro Pontino, un tempo luogo di morte oggi fonte di vita, redenzione che Egli sempre auspicò e per la quale diede la parte migliore di sè.

A Marchiafava tutta la nostra riconoscenza e la nostra ammirazione.

BIBLIOGRAFIA.

1. Di una adesione ossea dei due mascellari a sinistra. (Settore dell'Istituto Fisiopatologico di Roma diretto dal prof. C. Tommasi-Crudeli). Estratto dal giornale «La Rivista Clinica», 1873.
2. Di un cancro primitivo del polmone a cellule cilindriche con riproduzione nel cervello e nell'osso frontale. (Settore dell'Istituto Fisiopatologico di Roma diretto dal prof. C. Tommasi-Crudeli). Estratto dal giornale «La Rivista Clinica», 1873.
3. Della angioite obliterante nelle infiammazioni intestinali ed in specie nella tubercolosi. Nota letta alla R. Accademia dei Lincei. Estratto dal tomo 3º, ser. 2ª, degli «Atti della R. Accademia dei Lincei», 1876.
4. Sopra un caso di verruca pigmentaria multipla ereditaria. «Atti della Accademia Medica di Roma», anno I, fasc. I, 1876.
5. Della glomerulo-nefrite scarlattinosa. Studi clinici ed istologici. (MARCHIAFAVA e VALENTI). «Atti dell'Accademia Medica di Roma», anno I, fasc. II, 1877.
6. La sifilide delle arterie cerebrali. «Atti dell'Accademia Medica di Roma», anno III, fasc. II, 1879.
7. Sopra la genesi della melanemia. (Commentario Clinico di Pisa), 1879.
8. (Con MORIGGIA). Illustrazione di un caso di rabbia. «Arch. per le Scienze Mediche», 1880, vol. IV, p. 447, 1880.
9. Contribuzione alla anatomia patologica della corea. (MARCHIAFAVA e BRUNELLI). «Bullettino della R. Accademia Medica di Roma», anno VI, n. 3, 1880.
10. Nuovo caso di endocardite micotica. «Bullettino della R. Accademia Medica di Roma», anno VI, n. 5, 1880.
11. Sull'attività emopoietica del midollo osseo nella gravidanza. «Bullettino della R. Accademia Medica di Roma», anno VI, n. 1, 1880.
12. Sopra alcune alterazioni dei reni nella sifilide ereditaria. «Archivio per le Scienze Mediche», vol. VIII, n. 18, 1880.
13. Un caso di anchilostoma duodenale. «Arch. per le Scienze Mediche», vol. V, p. 159, 1881.
14. (Con CUBONI). Nuovi studi sulla natura della malaria. «Arch. per le Scienze Mediche», 1881, vol. V, p. 151.
15. Osservazioni anatomo-patologiche sulla infezione da malaria. (MARCHIAFAVA e FERRARESE). «Bullettino della R. Accademia Medica di Roma», anno VII, n. 1, 1881.
16. Un caso di aneurisma dell'aorta comunicante con l'arteria polmonare. «Atti della Accademia Medica di Roma», anno V, fasc. I, 1881.
17. Malattie di infezione acuta. «Rivista annuale delle Scienze Mediche», 1882.
18. Sopra due esiti rari della polmonite fibrinosa acuta. «Rivista Clinica», 1882.
19. Contributo allo studio delle cisti dell'intestino. «Archivio Italiano di Patologia», to. I, fasc. III, 1882.
20. Sopra il micrococco della gonorrea. Estratto dalla «Gazzetta degli Ospedali», 12 marzo 1882, n. 21, 1882.
21. Sull'aumento dell'attività emopoietica del midollo delle ossa consecutivo a gravi emorragie. «Gazzetta degli Ospedali», n. 21, 1882.
22. Una epizoozia di colera dei polli nella campagna romana. (Studio sperimentale, MARCHIAFAVA e CELLI). «Bullettino della Commissione Speciale d'Igiene del Municipio di Roma», 1883.
23. Nuove osservazioni sopra le alterazioni prodotte dalla infezione malarica. (MARCHIAFAVA e CELLI). «Gazzetta degli Ospedali», n. 82, 1883.

24. Sopra i micrococchi delle meningiti cerebro-spinali. Nota di MARCHIAFAVA e CELLI. *Gazzetta degli Ospedali*, n. 8, 1884.
25. Osservazione sul sangue nella infezione da malaria. (Nota di MARCHIAFAVA e CELLI). « *Gazzetta degli Ospedali* », 1884.
26. Sulle alterazioni dei globuli rossi nella infezione da malaria e sulla genesi della melanemia. (Memoria di MARCHIAFAVA e CELLI), ser. 3^a, vol. XVIII. 1884.
27. Sopra alcune alterazioni dei reni nella sifilide ereditaria. « *Arch. per le Scienze Mediche* », 1884, vol. VIII.
28. Caso di enterite acutissima. « *Boll. della Società Lancisiana* », anno V, fasc. II, 1885.
29. (Con CELLI). Sulla alterazione dei globuli rossi nella infezione da malaria e nella genesi della melanemia. « *R. Accademia dei Lincei* ». Roma, 1884; « *Centralbl. f. Bakter.* », 1885, p. 50.
30. (Con CELLI). Nuove ricerche sulla infezione malarica. « *Annali d'Agricoltura* », 1885, n. 96; « *Fortschritte der Medicin* », 1885, n. 11-12; « *Arch. per le Scienze Mediche* », 1885, n. 1, IX.
31. Ascesso cerebellare consecutivo a malattia dell'orecchio destro. « *Boll. della Società Lancisiana* », anno V, fasc. IV, 1885.
32. (Con CELLI). Studi ulteriori sulla infezione malarica. « *Annali di Agricoltura* », 1886; « *Centralblatt f. Bakter.* », 1886; « *Arch. per le Scienze Mediche* », 1886, vol. I.
33. (Con MARIOTTI). Sopra un caso di aneurisma embolico dell'arteria mesenterica superiore. « *Boll. della Società Lancisiana* », anno VII, fasc. II, 1887.
34. (Con CELLI). Sui rapporti fra le alterazioni del sangue di cane introdotto nel cavo peritoneale degli uccelli e quelle del sangue dell'uomo nella infezione malarica. « *Bollettino R. Accademia Medica di Roma* », 1887.
35. (Con GUALDI). Stenosi dell'istmo aortico. « *Boll. della Soc. Lancisiana* », anno VIII, fasc. I, 1888.
36. Risoluzione tardiva della polmonite. « *Boll. della Soc. Lancisiana* », anno VIII, fasc. I, 1888.
37. (Con CELLI). Sulla infezione malarica. « *Atti delle R. Acc. Med. di Roma* », 1887; « *Arch. Ital. de Biologie* », 1888.
38. (Con CELLI). Note sugli studi moderni dell'eziologia della febbre malarica. « *Arch. p. le Sc. Med.* », vol. XI, 1888.
39. (Con CELLI). Ancora sulle febbri malariche predominanti nell'estate e nell'autunno a Roma. « *Arch. p. le Sc. Med.* », vol. XIV, 1888.
40. Ueber die in sommer und herbst in Rom vorherrschenden malaria fieber. (MARCHIAFAVA e CELLI). L'originale italiano è negli « *Atti della R. Acc. Medica di Roma* », 1889).
41. (Con CELLI). Sul parassita delle febbri gravi estivo-autunnali. « *Riforma Medica* », 1889.
42. Sull'influenza. « *Boll. della Soc. Lancisiana* », anno X, fasc. II, 1890.
43. (Con BIGNAMI). La quotidiana e la terzana estivo-autunnale. « *Riforma Medica* », 1891, 793.
44. Sulla malattia di Morvan. (MARCHIAFAVA e BIGNAMI). *Bollettino della R. Accademia Medica di Roma*, Anno XVII, fasc. II, 1891.
45. (Con BIGNAMI). Sulla degenerazione amiloide nella infezione malarica. « *R. Accademia Med. di Roma* », 22 febbraio 1891.
46. Tubercolosi e malaria. « *Soc. Lancisiana Osp. Roma* », 25 aprile 1891.
47. (Con BIGNAMI). Note sulla infezione pneumonica. *R. Acc. Medica di Roma*, 28 giugno 1891.
48. Settico pioemia di origine intestinale. « *Soc. Lancis. Osped.* ». Roma, 24 marzo, 1892.
49. Sulle febbri malariche estivo-autunnali. (MARCHIAFAVA e BIGNAMI). *Tip. Loëscner*, Roma, 1892.

50. (Con BIGNAMI). Sulle febbri malariche estive-autunnali. « Boll. Acc. Med. di Roma ».
51. (Con BIGNAMI). Sulle varietà di parassiti malarici e sulla natura della infezione malarica. « Deut. Med. Woch. », nn. 51-52, 1892.
52. Sopra un raro esito di coelitiasi. R. Acc. Med. di Roma, 28 gennaio 1894.
53. Sull'influenza. (R. Accademia di Roma). « Bollettino della R. Accademia Medica ». Anno XX, fasc. II. 1894.
54. Sulla penetrazione degli ascaridi nelle vie biliari. R. Acc. Med. di Roma. 24 febbraio 1894.
55. Tubercolosi del dotto toracico. R. Acc. Med. Roma, 22 aprile 1894.
56. (Con BIGNAMI). Osservazioni critiche intorno ad un recentissimo scritto del professore C. Golgi sulle febbri estivo-autunnali. « Policlinico », 1894, n. 1.
57. Monographs on malaria. (MARCHIAFAVA e BIGNAMI per la Sydenhams Society), 1894.
58. Un caso gravissimo di chilemia. R. Acc. Med. di Roma, 27 gennaio 1895.
59. (Con BIGNAMI). Sulle malattie nervose dei lavoratori nei cassoni ad aria compressa. « Soc. Lancisiana Osp. Roma », 16 febbraio 1895.
60. Necrosi del grasso peripancreatico e nel pancreas. « Soc. Lancisiana Osp. Roma », 11 maggio 1895.
61. Nefrite cronica unilaterale. « Soc. Lanc. Osp. Roma », 13 giugno 1896.
62. Sulla stenosi degli orifici delle coronarie. « Soc. Lanc. Osp. Roma », 3 aprile 1897.
63. Sopra un caso di verruca spinosa della laringe. « Archivio italiano di otologia, rinologia, laringologia », vol. V), 1897.
64. Sulla pseudoleucemia. (« Atti » dell'VIII Congresso di Med. interna, ott. 1897, Napoli).
65. Sopra un caso non comune di gastroraggia. « Boll. della Soc. Lanc. », anno XVIII, fasc. I, 1898.
66. Sull'ematemesi nella cirrosi del fegato. « Boll. della Soc. Lancisiana », anno XVIII, fasc. I, 1898.
67. (Con BIGNAMI). Trattato sulla malaria. Pubblicato in inglese fa parte dell'Enciclopedia medica stampata a New York dall'editore Wood col titolo *Twenty prachis of medicine*, 1900.
68. La infezione malarica. (MARCHIAFAVA e BIGNAMI). Manuale per medici e studenti. Editore Francesco Vallardi. Milano, 1902.
69. (Con BIGNAMI). Sopra un'alterazione del corpo calloso osservata in soggetti alcoolisti. « Rivista di Pat. Nervosa e mentale ». Firenze, 1903.
70. Osservazioni cliniche ed anatomo patologiche sopra un caso di ulcera semplice del duodeno. « Soc. Lanc. Osp. Roma », 27 dicembre 1903.
71. Sopra la sclerosi delle arterie coronarie. Estr. dalla « Rivista critica di Clin. Med. », anno 8°, n. 17. Firenze, 1904.
72. Sopra la sclerosi delle arterie coronarie. « Boll. Soc. Lancisiana », fasc. I, anno XXV, 1904.
73. Sopra la forma spinale dell'influenza. « Boll. Soc. Lancisiana », anno XXV, fasc. II, 1905.
74. Sopra la polmonite produttiva quale esito della polmonite fibrinosa lobare. « Policlinico », vol. XIV, 1907.
75. Tumore del corpo calloso. Parencefalia traumatica. « Boll. Soc. Lancisiana », anno XXVII, fasc. I, 1907.
76. (Con CELLI). Zur Geschichte der gutdeckung des Micrococcus intracellularis meningitidis. « Centralbl. f. Bacter. », 1907, Bd. 43 H 2.
77. Sulla diffusione della tubercolosi nell'organismo umano. « Tubercolosi », 1908.
78. Intorno all'*angina pectoris* e specialmente in rapporto alla sua cura. « Boll. Soc. Lancisiana », fasc. II, anno XXIX, 1909.

79. (Con BIGNAMI). Sopra un'alterazione sistematica delle vie commessurali dell'encefalo nell'alcoolismo cronico. «Atti della R. Acc. dei Lincei, Cl. Sc. Fisiche», 1910, n. 3.
80. (Con CELLI). Leber die im Sommer und Herbst in Rom vorherscheiden Malaria-fieber. «Fortschritte der Medizin», 1891; «Centralbl. f. Bakter.», 1891, II, p. 935, 1910.
81. Sopra l'ipotiroidismo cronico. «Riforma Medica», anno XXVII, I, 1911.
82. (Con NAZARI). Nuovo contributo allo studio degli itteri cronici emolitici, «Polìclinico», Sezione pratica, 1911, vol. XVIII.
83. Sopra un'alterazione sistematica delle vie commessurali dell'encefalo nell'alcoolismo cronico. Congr. Intern. dei Patologi, Torino, 1911. «Pathologica», 1911, p. 706.
84. Commemorazione di Federico Recklinghausen «R. Acc. dei Lincei», seduta del 7 maggio 1911.
85. Sopra l'infezione malarica perniciosa nello scorcio dell'autunno. (Estr. dal volume *In onore del prof. A. Celli nel 25° anno d'insegnamento*, 1912).
86. Sopra una sindrome pontino-bulbare dopo la erisipela. «Polìclinico», Sezione pratica, 1912.
87. Sopra la infezione malarica perniciosa nello scorcio dell'autunno. «La propaganda antimalarica», n. 5, 1912.
88. La patologia dell'alcoolismo. «Atti del Congr. Internaz. contro l'alcoolismo». Milano, 1913.
89. Sulla malaria perniciosa. «Deut. Med. Woch.», 1913, n. 33.
90. Ueber malaria perniciosa. «Deutschen Medizinischen Wochenschrift», 1913.
91. La patologia dell'alcoolismo. «Rivista Ospedaliera», Sezione Scientifica, n. 1, 1914.
92. Commemorazione di Edwen Klebs. «R. Acc. dei Lincei», seduta del 5 aprile 1914.
93. In memoria di Angelo Celli. «Annali della R. Università di Roma», anno 1914-15.
94. La vita e l'opera di Angelo Celli. «Nuova Antologia», 1915.
95. Sulla tubercolosi delle sierose nei vecchi. «Rivista Ospedaliera», 1916.
96. Per la storia degli studi della malaria in Roma. «Rivista Ospedaliera», n. 12, 1916.
97. Sulla morte improvvisa nella sifilide del cuore e dell'aorta. «Rivista Ospedaliera», 1916, e le malattie del cuore, 1917, n. 9.
98. Sulla diffusione della tubercolosi nell'organismo umano. «Tubercolosi», vol. X, fasc. V, 1918.
99. Sulla recente epidemia di influenza in Roma. (Relazione fatta all'adunanza del Consiglio comunale del 26 dicembre 1918).
100. Intorno ai progressi della medicina. Discorso inaugurale dell'anno Accademico 1919-20, Roma.
101. Nel secondo centenario della morte di Giovanni Maria Lancisi. (Commemorazione letta il 20 gennaio 1920 nella Biblioteca Lancisiana).
102. Commemorazione di Leopoldo Taussig. «Bollettino della R. Accademia Medica», anno XLVIII, n. 1, 1922.
103. (Con NAZARI). La malattia di Take Jonescu (Aortite ulcerosa tifica). «Il Polìclinico», Sezione Medicina, 1923, f. 1.
104. Commemorazione di Luigi Pasteur. «R. Accademia dei Lincei», vol. XXXII, ser. 5^a, 1^o sem., fasc. 9, 1923.
105. Commemorazione di Pio Foà. «R. Acc. dei Lincei», vol. XXXII, ser. 5^a, 2^o sem., fasc. 11^o, 1923.
106. La malaria endemica. «Rivista della C. R. I.» : La Crociata del 7 febbraio 1925.
107. Commemorazione di Sir William Osler. «Boll. n. IX, Internat. Assoc. of Medical Museum», 1925.

108. Discours dans la Séance inaugurale du Premier Congres International du Paludisme. (Estr. del Congresso, Roma, 4-5-6 ottobre 1925).
109. Commemorazione di Guido Banti. «R. Acc. dei Lincei», vol. III, ser. 6^a, 1^o sem., fasc. 2^o, 1926.
110. Emosiderinuria. «Boll. ed Atti R. Acc. Med. di Roma», 1927, fasc. 10-11.
111. Anemia emolitica con emosiderinuria perpetua. «Boll. della R. Acc. Medica di Roma», anno LIII, fasc. 10-11, 1927.
112. La perniciosità nella malaria. (Monografie medico-chirurgiche, prefazione a . . . Collezione del « Policlinico »), 1928.
113. Anemia emolitica con emosiderinuria perpetua. «Policlinico, Sezione medica», 1928.
114. La tubercolosi. (Prefazione. Provveditorato Generale dello Stato. Libreria, 1929).
115. L'eredità in patologia. *Trattato di Anatomia patologica* di Pio Foà. Parte generale. «U. T. E. T.», 1930.
116. Presentazione dell'*Opera omnia* di Camillo Golgi. «R. Acc. dei Lincei», vol. XI, ser. 6^a, 1^o sem., fasc. 7, 1930.
117. L'ittero letale *ex emotione*. «Policlinico, Sezione pratica», 1931.
118. Commemorazione di Antonio Dionisi. «R. Acc. dei Lincei», vol. XIV, ser. 6^a, sem. 2^o, fasc. 11, 1931.
119. Anemia emolitica con emosiderinuria perpetua. «Policlinico», Sezione pratica, 1931.
120. L'infezione malarica. (2^a ediz. con A. Nazari, Tip. Vallardi). «Manuale per medici e studenti», 1931.
121. Modificazioni delle disposizioni che disciplinano la materia della vivisezione sugli animali vertebrati a sangue caldo. «Biochimica e Terapia sperimentale», 1931.
122. Antonio Dionisi, Accademico d'Italia «Le Opere e i Giorni», aprile 1932.
123. Il pensiero latino e le recenti scoperte sulla malaria. «Nuova Antologia», luglio, 1932.
124. Littoria. «Nuova Antologia», gennaio, 1933.
125. La malaria. «Enciclopedia Italiana», 1933.
126. Sulla malaria maligna, spontanea e provocata. «Policlinico», Sezione pratica, 1933.
127. The degeneration of the brain in chronic Alcoholism. «From the proceeding of the Royal Society of Medicine», 1933).
128. La perniciosità. Conferenza tenuta alla Scuola superiore di Malariologia nell'agosto 1932. «Le forze Sanitarie», 1933, n. 1-2.
129. La malaria. «Rivista C.R.I.», anno IX, n. 3, 1934.
130. Orazio e il vino. «Nuova Antologia», dicembre 1934.
131. Orazio e Dante. «Nuova Antologia», ottobre 1935).

RELAZIONI PRESENTATE AL SENATO (1).

132. Relazione sul disegno di legge «Fondo per provvedimenti contro la tubercolosi di guerra»: seduta 10 agosto 1920.

(1) MARCHIAFAVA nella sua assidua opera svolta al Senato ha presentato complessivamente 52 relazioni. Di queste abbiamo ricordato solamente le principali. Oltre alle relazioni su argomenti di minore importanza, Marchiafava partecipò al Senato a molte discussioni e dei suoi discorsi fatti in queste occasioni non si è creduto, per brevità, dare qui indicazione bibliografica precisa.

133. Relazione sul disegno di legge «Protezione e assistenza della maternità e infanzia»: seduta 10 giugno 1925.
134. Relazione sul disegno di legge «Disposizioni per combattere l'alcoolismo»: seduta 19 maggio 1926.
135. Relazione sul disegno di legge «Provvedimenti contro il cancro e i tumori maligni»: seduta 4 giugno 1927.
136. Relazione sul disegno di legge «Modifiche alla legge sulla protezione e l'assistenza della maternità e dell'infanzia»: seduta 30 novembre 1927.
137. Relazione sul disegno di legge «Istituzione in Roma di una scuola superiore di malariologia»: seduta 30 aprile 1928.
138. Relazione sul disegno di legge «Sul servizio del chinino dello Stato»: seduta 4 maggio 1928.
139. Relazione sul disegno di legge «Ordinamento del servizio di assistenza dei fanciulli illegittimi abbandonati»: seduta 2 giugno 1928.
140. Relazione sul disegno di legge «Per la creazione di una unione internazionale di soccorso»: seduta 7 giugno 1928.
141. Relazione sul disegno di legge «Modifica alle vigenti disposizioni relative all'Istituto Autonomo per la lotta antimalarica nelle Venezie»: seduta 31 ottobre 1928.
142. Relazione sul disegno di legge «Disposizioni che disciplinano la materia della vivisezione sugli animali vertebrati a sangue caldo»: seduta 17 marzo 1931.
143. Relazione sul disegno di legge «Sull'insegnamento di clinica delle malattie tropicali alla Regia Università di Roma»: seduta 21 marzo 1931.
144. Relazione sul disegno di legge «Sulle norme integrative per le assicurazioni obbligatorie per la invalidità, e vecchiaia per la disoccupazione involontaria e contro la tubercolosi»: seduta 21 maggio 1932.
145. Relazione sul disegno di legge «Costituzione del comune di Littoria»: seduta 17 dicembre 1932.
146. Relazione sul disegno di legge «Sul coordinamento e integrazione delle norme dirette a diminuire le cause della malaria»: seduta 5 giugno 1933.
147. Relazione sul disegno di legge «Norme per la repressione della propaganda illecita dello smercio delle specialità medicinali»: seduta 21 novembre 1933.
148. Relazione sul disegno di legge «Costituzione del comune di Sabaudia nell'Agro Pontino»: seduta 4 gennaio 1934.
149. Relazione sul disegno di legge «Nuove norme sugli stupefacenti»: seduta 25 maggio 1934.
150. Relazione sul disegno di legge «Disposizioni di coordinamento e di integrazione sulle norme del servizio del chinino di Stato»: seduta 28 maggio 1934.
151. Relazione sul disegno di legge «Istituzione del posto di direttore dell'Istituto di Sanità Pubblica»: seduta 29 aprile 1935.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Corrisp. CESARIS DEMEL tiene una elevata commemorazione del Socio Nazionale E. MARCHIAFAVA.

Il Presidente sen. MILLOSEVICH, anche a nome dei Collegghi, ringrazia il Corrisp. CESARIS DEMEL per la bella commemorazione pronunciata.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario aggiunto AMALDI presenta le opere giunte in dono segnalando il volume XI dei « Travaux de l'Association internationale de Géodésie ».

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio LEVI-CIVITA, anche a nome del Socio SOMIGLIANA, legge la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria di J. Opatowski dal titolo « Sulle coordinate isoterme e sulla risoluzione dell'equazione di Laplace con prodotti ».

L'Assemblea approva.

L'Accademico Segretario aggiunto AMALDI, in assenza dei Soci PENSA e GIACOMINI, legge la relazione, dai detti Soci inviata, per proporre la stampa della memoria di E. Borghese dal titolo « Apparato reticolare interno e la cunoma nell'epitelio gastrico e intestinale dei Mammiferi ».

L'Assemblea approva la proposta della relazione.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci ARMELLINI, BOTTAZZI, GIORGI, LEVI-CIVITA.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 2 febbraio 1936

- CAMPA MARIA. — Studio delle viti di un micrometro Troughton e Simms. (Estr. dalle « Memorie della Società Astronomica Italiana ». Vol. VII). Pavia, 1933. 8°, pp. 1-12.
- CISOTTI U. — Sulla regolarizzazione idrodinamica degli estremi di una lamina rettilinea. (Estr. dalle « Memorie della Pont. Accad. Scient. Novi Lincei ». Serie III, vol. II, pp. 51-77). Città del Vaticano, 195. 4°.
- CISOTTI U. — Sulla regolarizzazione di sahienti idrodinamici. (Estr. dai « Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano ». Vol. VIII). Milano, 1934. 8°, pp. 1-28.
- Il civico teatro Faraggiana di Novara. Novara, 1935. 4°, pp. 1-12.
- X Congreso Internacional de Historia de la Medicina. 23-29 Septiembre 1935. Madrid, 1935. 8°, pp. 1-197.
- DE DONDER TH. — Théorie invariante du calcul des variations. Paris, Editeurs Gauthier-Villars et C.^{ie}, 1935. 8°, pp. 1-X, 1-230.
- GENNARO A. — Relazione sulle osservazioni del pianeta Eros eseguite nell'Osservatorio Astronomico di Trieste durante l'opposizione del 1930-31. (Estr. dalle « Memorie della Società Astronomica Italiana ». Vol. IX, I). Pavia, 1935. 8°, pp. 1-16.
- LECAT MAURICE. — Azéotropes orthobares Esters-hydrocarbures. (Extr. des « Annales de la Société scientifique de Bruxelles ». Tome LV, pp. 253-265). Louvain, 1935. 8°.
- LECAT MAURICE. — Notice sur l'ouvrage Variationsrechnung de C. Carathéodory. (Extr. de la « Revue des Questions scientifiques ». Janvier 1936, pp. 142-148). Louvain, 1936. 8°.
- LECAT MAURICE. — Probabilité et induction. Partie II, III. (Extr. de la « Revue des Questions scientifiques », novembre 1935, janvier 1936, pp. 410-440, 47-83). Louvain, 1935, 1936, 8°.
- PEISINO GIOVANNI. — Determinazione delle irregolarità periodiche nei contatti di tre orologi fondamentali del R. Osservatorio Astronomico di Trieste. (Estr. dalla « Rivista della Società Astronomica Italiana ». Vol. VIII). Pavia, 1935. 8°, pp. 1-12.
- SER F. — La réduction des séries alternées divergentes et les applications. Paris, 1935. 8°, pp. 1-II, 1-42.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 16 febbraio 1936 (anno XIV)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Meccanica. — *Effetti di zavorra dovuti a una doppietta.*
Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. U. CISOTTI.

Vogliamo valutare gli effetti di zavorra ⁽²⁾ dovuti a una doppietta inserita sul contorno di un ostacolo circolare e precisamente nel punto di poppa di una corrente permanente che investe l'ostacolo.

1. Posto $\zeta = \xi + i\eta$, sia $|\zeta| = 1$ il profilo circolare; la velocità complessa di una corrente asintoticamente parallela all'asse reale e di valore V è definita, come è noto, dalla relazione:

$$(1) \quad w_C = V \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right).$$

I punti nei quali è $w_C = 0$ sono: $\zeta = -1$ (prova) e $\zeta = 1$ (poppa).

La relazione

$$(2) \quad w_D = \frac{im}{\pi(\zeta - 1)^2},$$

(1) Presentata nella seduta del 16 febbraio 1936.

(2) U. CISOTTI, *Un criterio di valutazione delle azioni dinamiche sopra un ostacolo circolare munito di una sorgente e immerso in una corrente traslocircolatoria*. Questi « Rendiconti », vol. XXII, 2° sem. 1935, p. 275; e ancora: *Sul calcolo degli effetti di zavorra in Scritti in onore di Luigi Berzolari* (in corso di pubblicazione); ancora: *Calcolo degli "effetti di zavorra" relativi a una lamina rettilinea*. Questi « Rendiconti », vol. XXII, p. 279. Cfr. anche CISOTTI e MASOTTI, *Effetti di zavorra nello spazio*. Questi « Rendiconti », vol. XXIII, 1° sem. 1936, p. 3.

definisce la velocità, complessa, dovuta alla doppietta di momento orientato come l'asse η e di modulo m inserita nel punto $\zeta = 1$ di poppa. Anche in questo moto la circonferenza $|\zeta| = 1$ è linea di flusso.

Si consideri ora il moto la cui velocità complessa è:

$$w = w_C + w_D + V \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) + \frac{im}{\pi(\zeta - 1)^2}.$$

Come si vede, per $\zeta \rightarrow 1$, w diviene infinita di 2° ordine rispetto a $\frac{1}{\zeta - 1}$. Chiamando R_ξ^* e R_η^* le componenti degli effetti di zavorra, è (1):

$$(3) \quad R_\eta^* + iR_\xi^* = -\rho \int w_C w_D d\zeta,$$

l'integrazione andando estesa, in verso antiorario, a tutta la circonferenza $|\zeta| = 1$. Dalle (1) e (2) risulta:

$$w_C w_D = \frac{imV(\zeta + 1)}{\pi\zeta^2(\zeta - 1)} = \frac{2imV}{\pi} \left\{ \frac{1}{\zeta - 1} - \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{2\zeta^2} \right\}.$$

Essendo:

$$(4) \quad \int \frac{d\zeta}{\zeta - 1} = \pi i, \quad \int \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi i, \quad \int \frac{d\zeta}{\zeta^2} = 0,$$

si ottiene:

$$R_\eta^* + iR_\xi^* = -2\rho mV,$$

cioè:

$$(5) \quad R_\xi^* = 0, \quad R_\eta^* = -2\rho mV.$$

Risulta che l'effetto di zavorra è normale alla direzione asintotica della corrente, cioè è un effetto sostenitore, e diretto in verso opposto al momento della doppietta.

2. Si può altresì valutare l'effetto di zavorra quando la direzione asintotica della corrente è comunque inclinata rispetto all'asse reale, cioè al diametro passante per il punto dove è inserita la doppietta. Basta a tal uopo immaginare il profilo circolare investito da una corrente traslocircolatoria la cui velocità complessa risulta definita dalla relazione:

$$w_{C_1} = V \left(e^{-i\beta} - \frac{e^{i\beta}}{\zeta^2} \right) + \frac{C}{2\pi i \zeta},$$

nella quale β designa l'angolo che la direzione asintotica della corrente forma coll'asse reale e C la circolazione che ci proponiamo di fissare in modo

(1) Loc. cit.

che nel punto $\zeta = 1$, sede della doppietta, risulti $w_{C_1} = 0$, con che, per $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ risulta punto di *poppa* della corrente. Si ottiene:

$$(6) \quad C = -4\pi V \sin \beta,$$

per cui, sostituendo nella precedente, si ottiene in definitiva la seguente espressione della velocità della corrente:

$$(7) \quad w_{C_1} = V e^{-i\beta} \frac{(\zeta - 1)(\zeta + e^{2i\beta})}{\zeta^2}.$$

Per questa e per la (2), risulta ora:

$$w_{C_1} w_D = \frac{imVe^{-i\beta}(\zeta + e^{2i\beta})}{\pi\zeta^2(\zeta - 1)} = \frac{imVe^{-i\beta}}{\pi} \left\{ \frac{e^{2i\beta}}{\zeta^2} + (e^{2i\beta} + 1) \left(\frac{1}{\zeta - 1} - \frac{1}{\zeta} \right) \right\}.$$

Tenuto conto delle (4), la (3) in questo caso diviene:

$$R_{\eta}^* + iR_{\xi}^* = -2\rho mV \cos \beta,$$

cioè:

$$(8) \quad R_{\xi}^* = 0, \quad R_{\eta}^* = -2\rho mV \cos \beta.$$

Queste relazioni, per $\beta = 0$, coincidono colle (5) e si noti che in tal caso la (6) dà $C = 0$, e la (7) va a coincidere colla (1).

In generale, l'effetto di *zavorra* è normale al diametro passante per la doppietta: vi è dunque un effetto sostenitore:

$$R_{\eta}^* \cos \beta = -2\rho mV \cos^2 \beta,$$

e un effetto di *parallelo alla corrente asintotica*:

$$R_{\xi}^* \sin \beta = -\rho mV \sin 2\beta.$$

Per $\beta = \frac{\pi}{2}$ l'effetto di *zavorra* è identicamente nullo.

3. Per profili non circolari si può procedere come ho già indicato nella Nota citata «Sul calcolo degli effetti di *zavorra*»⁽¹⁾, nella quale invece di una doppietta si suppone aperta, sul contorno del profilo, una sorgente. In particolare, per una lamina rettilinea si può seguire il procedimento già impiegato nella Nota citata penultima.

(1) Loc. cit. in *Scritti in onore di Luigi Berzolari*.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle traslazioni piane del Brouwer doppiamente periodiche.* Nota di G. SCORZA DRAGONI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In questo lavoro giustificherò un teorema che in una Memoria, di prossima pubblicazione, ho soltanto enunciato ⁽²⁾ affermando che i ragionamenti là svolti si prestavano a dimostrare anche il teorema in discorso, relativo alle traslazioni piane del Brouwer doppiamente periodiche, previa leggere modificazioni.

Questa circostanza spiega il carattere schematico della Nota attuale; sarà infatti sufficiente indicare i capisaldi della dimostrazione, i particolari di questa trovandosi poi esposti diffusamente nella mia Memoria citata, alla quale rimanderò anche e per la bibliografia e per la terminologia ⁽³⁾.

I. IPOTESI ED ENUNCIATO DEL TEOREMA. — Sia T una trasformazione topologica (biunivoca e bicontinua) in sé di un piano α , nel quale si sia fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali x_1, x_2 ; la T sia diretta (conservi il senso delle rotazioni) e sia priva di punti uniti.

In virtù di un classico teorema di Brouwer, la T è quindi una traslazione piana nel senso del Brouwer, più lato del consueto ⁽⁴⁾; vale a dire, fissato ad arbitrio un punto P del piano α esiste un campo E (campo di traslazione), che contiene P , delimitato da due linee semplici aperte e serrate ⁽⁵⁾, una conveniente delle quali sia l'immagine dell'altra nella T .

Supponiamo ora che T sia periodica rispetto alla x_1 e rispetto alla x_2 ; sia cioè permutabile con le due (ordinarie) traslazioni T_1 e T_2 che mutano, rispettivamente, il punto (x_1, x_2) nei punti $(x_1 + t_1, x_2)$ e $(x_1, x_2 + t_2)$, t_1 e t_2 essendo due costanti, volendo positive; T sarà allora permutabile anche con tutte le (ordinarie) traslazioni $T_{k_1, k_2} = T_1^{k_1} \cdot T_2^{k_2}$, dove $k_1, k_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

(1) Nella seduta del 16 febbraio 1936.

(2) G. SCORZA DRAGONI, *Su una classe di trasformazioni del piano in sé, topologiche e dirette, prive di punti uniti*, nota (8).

(3) Dovrò spesso richiamare anche l'altro mio lavoro: *Una estensione dell'ultimo teorema geometrico di Poincaré*. [*Memorie della Reale Accademia d'Italia*], vol. IV (1933), pp. 213-269].

(4) Una traslazione piana del BROUWER non è in generale equivalente, neppure nel senso della topologia, ad una traslazione ordinaria.

(5) Serrato secondo SEVERI è un insieme chiuso secondo CANTOR.

Ciò posto il nostro teorema si riduce ad affermare che

In queste ipotesi, se si prescinde per il campo E dalla condizione di contenere un punto prefissato ad arbitrio⁽¹⁾, gli si può imporre l'altra di essere delimitato da due linee unite in una conveniente, $T_{k'_1, k'_2}$, delle T_{k_1, k_2} , i due numeri k'_1 e k'_2 essendo non entrambi nulli e primi fra di loro, nel senso che tali sono $|k'_1|$ e $|k'_2|$ se entrambi non nulli mentre nel caso contrario quello diverso da zero è uguale all'unità.

2. PRELIMINARI. Δ Come è noto⁽²⁾, poichè T è permutabile con T_1 l'estremo superiore delle lunghezze dei segmenti, paralleli all'asse x_1 e contenuti nella striscia $-\infty < x_1 < +\infty$, $0 \leq x_2 \leq t_2$, privi di punti in comune con la propria immagine si può supporre finito — perchè altrimenti esiste tutta una parallela all'asse x_1 priva di punti in comune con la propria immagine, e il teorema è quindi senz'altro verificato —; indi, se si tien conto che T è permutabile anche con T_2 , si riconosce che si può supporre finito l'estremo superiore d_i delle lunghezze di tutti i segmenti paralleli all'asse x_i e privi di punti in comune con la propria immagine.

Lo stesso vale naturalmente anche per l'estremo superiore d_2 delle lunghezze dei segmenti paralleli all'asse x_2 e privi di punti in comune con le proprie immagini.

3. Indichiamo con ϵ il primo intero positivo tale che $\epsilon t_1 > d_1$, $\epsilon t_2 > d_2$. Allora⁽³⁾

Se $\lambda = PP^1$ ⁽⁴⁾ è un segmento di traslazione parallelo all'asse x_1 (all'asse x_2), se σ è la traiettoria generata da λ , Σ uno dei due campi adiacenti a σ , R un punto fondamentale relativo a λ e Σ , R è sempre origine di un segmento fondamentale, relativo a λ e Σ , di lunghezza minore di ϵt_1 (minore di ϵt_2).

4. Indichiamo con $I_b(\lambda)$ e $J_b(\lambda)$, per $b = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, gli insiemi certo non vuoti, in virtù di quanto è detto nel n. 2⁽⁵⁾, dei segmenti di traslazione rispettivamente contenuti nelle rette X_b, Y_b di equazioni rispettive $x_2 = b \cdot t_2, x_1 = b \cdot t_1$.

Allora noi potremo⁽⁶⁾ decomporre $I_b(\lambda) [J_b(\lambda)]$ in (un numero finito o in) un'infinità numerabile di classi $I_{b,1}(\lambda), I_{b,2}(\lambda), \dots [J_{b,1}(\lambda), J_{b,2}(\lambda), \dots]$ prive a due a due di elementi comuni e tali che tutti i segmenti di traslazione λ contenuti in $I_{b,i}(\lambda), i = 1, 2, \dots, [J_{b,i}(\lambda)]$ abbiano in comune

(1) Non saprei se sia strettamente necessario prescindere da questa condizione.

(2) Una estensione..., n. 22; Su una classe..., n. 15.

(3) Una estensione..., n. 23; Su una classe..., n. 16.

(4) Ora è sempre, se A è un insieme di punti di α , A^n ($n = 0, \pm 1, \dots$) è l'immagine di A in T^n .

(5) Su una classe..., n. 17.

(6) Su una classe..., n. 10.

uno stesso punto fondamentale $F_{h,i} [C_{h,i}]$ relativo al campo adiacente alla traiettoria generata da λ che risulti alla sinistra di chi descrive λ nel verso delle ascisse [ordinate] crescenti ed uno stesso punto fondamentale $G_{h,i} [D_{h,i}]$ relativo all'altro campo adiacente a questa traiettoria.

E potremo supporre che, che per ogni h fissato, le ascisse di $F_{h,i}$ e di $G_{h,i}$ [le ordinate di $C_{h,i}$ e di $D_{h,i}$] divergano per $i \rightarrow +\infty$.

Inoltre poichè T è permutabile e con T_1 e con T_2 , noi potremo anche supporre⁽¹⁾ che $F_{h,i}$ e $G_{h,i}$ siano le immagini di $F_{0,i}$ e $G_{0,i}$ nella T_2^h e che l'insieme dei punti $F_{h,i}$ come quello dei punti $G_{h,i}$ siano uniti nella T_1 , che $C_{h,i}$ e $D_{h,i}$ siano le immagini di $C_{0,i}$ e $D_{0,i}$ nella T_1^h e che l'insieme dei punti $C_{h,i}$ come quello dei punti $D_{h,i}$ siano uniti nella T_2 .

5. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA. — Indichiamo con $\lambda_0 = P_0 S_0$ un elemento di $I_0(\lambda)$; con σ_0 la traiettoria generata da λ_0 ; con Σ_0 il campo adiacente a σ_0 che risulti a sinistra di chi percorra λ_0 nel verso delle ascisse crescenti; e, supposto che λ_0 appartenga a $I_{0,u_0}(\lambda)$, poniamo $R_0 = F_{0,u_0}$ e $v_0 = P_0 R_0$; diciamo $\tau_0 = R_0 S_1$ il segmento fondamentale relativo a λ_0 e Σ_0 di origine R_0 , $\lambda_1 = P_1 S_1$ il segmento di traslazione contenuto in τ_0 , σ_1 la traiettoria generata da λ_1 , Σ_1 il campo adiacente a σ_1 che non contiene σ_0 e poniamo $l_0 = R_0 P_1$.

Supponiamo definiti $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}$; $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}$; $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_{i-1}$; P_0, P_1, \dots, P_{i-1} ; R_0, R_1, \dots, R_{i-2} ; v_0, v_1, \dots, v_{i-2} ; $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{i-2}$; l_0, l_1, \dots, l_{i-2} , i segmenti $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}$ supponendosi paralleli agli assi, e procediamo alla definizione di $\lambda_i, \sigma_i, \Sigma_i, P_i, R_{i-1}, v_{i-1}, \tau_{i-1}, l_{i-1}$ nel modo che segue.

Se λ_{i-1} non appartiene a nessuna delle X_h o Y_h , indichiamo con R'_{i-1} il punto fondamentale associato a λ_{i-1} e Σ_{i-1} ⁽²⁾; nel caso contrario indichiamo con R_{i-1} quello dei punti $F_{h,i}, G_{h,i}, C_{h,i}, D_{h,i}$ che farà al caso nostro secondo una convenzione analoga a quella tenuta per R_0 .

Indichiamo con $\tau = R_{i-1} S$ il segmento fondamentale relativo a λ_{i-1} e Σ_{i-1} di origine R_{i-1} , con $\lambda = PS$ il segmento di traslazione contenuto in τ , con σ la traiettoria generata da λ e con Σ il campo adiacente a σ che non contiene σ_{i-1} .

Allora se R_{i-1} appartiene a una delle X_h o Y_h o se il punto fondamentale associato a λ e Σ non è separato da R_{i-1} mediante nessuna delle X_h o Y_h (il punto fondamentale in discorso potendo eventualmente appartenere a una delle X_h o delle Y_h), poniamo $v_{i-1} = P_{i-1} R_{i-1}$, $P_i = P$, $S_i = S$, $l_{i-1} = R_{i-1} P_i$, $\tau_{i-1} = \tau$, $\lambda_i = P_i S_i$, $\sigma_i = \sigma$, $\Sigma_i = \Sigma$.

Nel caso contrario, se Q è il più vicino ad R_{i-1} dei punti (interni) di τ che appartengano a una delle X_h o delle Y_h , a seconda che τ è pa-

(1) Su una classe..., n. 13-14.

(2) Su una classe..., n. 6.

parallelo alle Y_b o alle X_b , e se esiste uno pseudoarco di traslazione (di prima specie) di origine R_{i-1} del tipo $\tau' = R_{i-1} Q \vdash QS'$ tale (che S' sia distinto dal punto Q e) che il segmento QS' sia normale a τ , che l'arco di traslazione λ' contenuto in τ' sia un segmento $P'S'$ contenuto in QS' e che i punti di τ' distinti da R_{i-1} appartengano a Σ_{i-1} , allora poniamo $v_{i-1} = P_{i-1} R_{i-1}$, $P_i = P'$, $S_i = S'$, $l_{i-1} = R_{i-1} Q \vdash QP_i$, $\tau_{i-1} = \tau'$, $\lambda_i = P_i S_i$, $\sigma_i = \sigma'$ se σ' è la traiettoria generata da λ' , Σ_i uguale al campo di traslazione adiacente a σ' che non contiene σ_{i-1} .

Nel caso che non sia verificata nemmeno questa circostanza, allora in virtù di risultati noti ⁽¹⁾ esiste un segmento di traslazione $\lambda'' = P''S''$ ⁽²⁾, normale a τ , contenuto in Σ_{i-1} , contenente il punto Q nell'interno e tale che, dettane σ'' la traiettoria associata e posto $l'' = R_{i-1} Q$, si abbia $l'' \cdot \sigma_{i-1} = R_{i-1}$, $l'' \cdot \sigma'' = Q$; ed in tal caso poniamo $v_{i-1} = P_{i-1} R_{i-1}$, $P_i = Q$, $l_{i-1} = R_{i-1} P_i$, $\lambda_i = \lambda''$, $\tau_{i-1} = l_{i-1} \vdash \lambda_i$ ⁽³⁾, $\sigma_i = \sigma''$, Σ_i uguale al campo adiacente a σ'' che non contiene σ_{i-1} .

6. Così proseguendo si ottiene una semilinea $L = v_0 \vdash l_0 \vdash v_1 \vdash l_1 \vdash \dots$ che risulta semplice, aperta e priva di punti in comune con la propria immagine nella T ⁽⁴⁾.

Inoltre dei punti R_0, R_1, R_2, \dots (che riescono a due a due distinti) solo un numero finito può appartenere ad un rettangolo prefissato di α .

Ancora: se due di questi punti, R_n e R_m con $m > n$, sono separati da una X_b delle X_b , allora uno dei punti R_n, \dots, R_m appartiene a una delle X_b o delle Y_b ; proprietà analoghe valgono se R_n e R_m sono separati da una delle Y_b .

Inoltre, se R_n appartiene a $X_0 + Y_0 + X_1 + Y_1 + X_{-1} + Y_{-1} + \dots$ allora uno almeno dei due segmenti di traslazione λ_n e λ_{n+1} appartiene a $I_0(\lambda) + J_0(\lambda) + I_1(\lambda) + J_1(\lambda) + L_1(\lambda) + J_{-1}(\lambda) + \dots$

7. Combinando le affermazioni fatte nel numero precedente, si riconosce che infiniti dei segmenti $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ appartengono a $I_0(\lambda) + J_0(\lambda) + \dots$; diciamo $\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}, \lambda_{n_3}, \dots$ questi segmenti ($n_1 < n_2 < n_3 \dots$), di guisa che R_{n_j} sarà per ogni valore naturale di j uno dei punti $F_{h,i}, G_{h,i}, C_{h,i}, D_{h,i}$.

Indi, se si tiene anche conto delle proprietà elencate nel n. 4, si riconosce che fra i segmenti $\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}, \dots$ se ne possono trovare almeno due $\lambda_{n_i}, \lambda_{n_j}$ distinti ($i \neq j$) e tali che essi appartengano o entrambi a due delle X_b

(1) Una estensione..., n. 12 e n. 35 (si tenga bene presente quanto è detto alla fine del n. 12 e quanto alla fine della nota (58) a piè di p. 248); Una classe..., nn. 25-26.

(2) Univocamente determinato se si mantiene la convenzione fatta in Una estensione..., nota (42) a piè di p. 227; nel caso precedente un simile inciso non è strettamente necessario, poichè di pseudoarchi quali τ' ne esistono al più due e quindi è facile la scelta.

(3) In tal caso τ_{i-1} non è uno pseudoarco di traslazione.

(4) In virtù di quanto è detto in Una estensione..., § 3.

(eventualmente coincidenti) o entrambi a due (eventualmente coincidenti) delle Y_b ; che i campi Σ_{n_i} e Σ_{n_j} siano o entrambi i campi adiacenti a σ_{n_i} e σ_{n_j} a sinistra o entrambi i campi adiacenti a σ_{n_i} e σ_{n_j} a destra di chi percorra λ_{n_i} e λ_{n_j} nel verso delle ascisse crescenti o in quello delle ordinate crescenti, a seconda che λ_{n_i} e λ_{n_j} appartengono a due delle X_b oppure a due delle Y_b ; e che il punto R_{n_i} si muti nel punto R_{n_j} in una conveniente, $T_{\bar{k}_1, \bar{k}_2}$ con $\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2 \neq 0$, delle T_{k_1, k_2} .

8. In virtù di quanto si è detto nel n. 5, posto $\bar{\lambda}_0 = \lambda_{n_i+1}$ e $\bar{\lambda}_1 = \lambda_{n_j+1}$, $\bar{\lambda}_0$ e $\bar{\lambda}_1$ sono i segmenti di traslazione contenuti nei segmenti fondamentali di origini rispettive $\bar{R}_0 = R_{n_i}$, $\bar{R}_1 = R_{n_j}$ rispettivamente relativi a λ_{n_i} e Σ_{n_i} , a λ_{n_j} e Σ_{n_j} .

In virtù della permutabilità di T e di $T_{\bar{k}_1, \bar{k}_2}$ e di quanto è detto nel n. 7, $\bar{\lambda}_1$ è allora l'immagine di $\bar{\lambda}_0$ nella $T_{\bar{k}_1, \bar{k}_2}$; lo stesso potendosi dire per $\bar{\sigma}_0 = \sigma_{n_i+1}$ e $\bar{\sigma}_1 = \sigma_{n_j+1}$, $\bar{\Sigma}_0 = \Sigma_{n_i+1}$ e $\bar{\Sigma}_1 = \Sigma_{n_j+1}$, mentre detto l_0 l'arco di L_0 di estremi \bar{R}_0 e $\bar{P}_1 = P_{n_j+1}$, si ha $l_0 \cdot l_0^i = 0$, $l_0 \cdot \bar{\sigma}_0 = \bar{R}_0$, $l_0 \cdot \bar{\sigma}_1 = \bar{P}_1$ e $\bar{v}_0 \cdot \bar{v}_0^i = 0$, $\bar{v}_0 \cdot \bar{\sigma}_0 = \bar{v}_0$ se $\bar{v}_0 = v_{n_i}$.

Allora, se l_p e \bar{v}_p sono per ogni intero relativo p le immagini di l_0 e \bar{v}_0 nella $T_{\bar{k}_1, \bar{k}_2}^p$, la linea $L_0 = \dots \dagger l_{-1} \dagger \bar{v}_0 \dagger l_0 \dagger \dots$ evidentemente unita nella $T_{\bar{k}_1, \bar{k}_2}$ è anche semplice aperta e tale che $L_0 \cdot L_0^i = 0$ ⁽¹⁾.

9. Indichiamo con \bar{k} il massimo comune divisore di $|\bar{k}_1|$ e $|\bar{k}_2|$ (ponendo $\bar{k} = |\bar{k}_1| + |\bar{k}_2|$, se $\bar{k}_1 \cdot \bar{k}_2 = 0$) e poniamo $k'_1 = \bar{k}_1 \cdot \bar{k}^{-1}$, $k'_2 = \bar{k}_2 \cdot \bar{k}^{-1}$; i due numeri k'_1 e k'_2 sono allora primi fra di loro.

E siano $L_1, L_2, \dots, L_{\bar{k}} = L_0$ le immagini di L_0 nelle $T_{k'_1, k'_2}^1, \dots, T_{k'_1, k'_2}^{\bar{k}}$, rispettivamente.

Tutte queste linee sono semplici aperte e prive di punti in comune con le rispettive immagini nella T , e ciascheduna di esse divide inoltre α in due campi (perchè ciascheduna di esse è unita nella $T_{\bar{k}_1, \bar{k}_2}$, cioè periodica, e quindi serrata).

Diciamo E_k quello dei due campi individuati da L_k ($k = 0, \dots, \bar{k}$) che contiene L_k^i .

Indichiamo inoltre la linea ⁽²⁾ semplice aperta e serrata, formata solo da punti di $L_0, \dots, L_{\bar{k}-1}$ e tale che dei due campi in cui essa divide α uno contenga $E_0 \dagger \dots \dagger E_{\bar{k}-1}$, indichiamola dico con l .

(1) Vedi nota precedente.

(2) Cfr. G. SCORZA DRAGONI, *Sulle linee di Jordan* [in corso di stampa nel « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana »]; si tenga conto che il teorema ivi dato per un'infinità numerabile di linee vale anche per un numero finito.

La linea l è allora contenuta in $L_0 + \dots + L_{k-1}$ e quindi è interna a $E_0 + \dots + E_{k-1}$; indi è $l \cdot l' = 0$.

Inoltre l è unita nella $T_{k'_1, k'_2}$; infatti essa è individuata dalle proprietà per essa indicate; la sua immagine l' nella $T_{k'_1, k'_2}$ gode di proprietà analoghe rispetto a L_1, \dots, L_k ; ma $L_k = L_0$; indi è $l = l'$.

E la dimostrazione del teorema è ultimata, poichè l ed l' delimitano un campo di tipo voluto.

Matematica. — *Determinazione delle curve limiti di un sistema continuo ∞^1 di curve piane omografiche.* Nota di A. GHIZZETTI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. FUBINI.

1. Nello studio di un sistema continuo di omografie fra due spazi è generalmente importante la considerazione delle eventuali omografie degeneri (o singolari) esistenti in esso ⁽²⁾. Data allora in uno dei due spazi una figura F e consideratane l'omologa \bar{F} nell'altro spazio, si presenta la questione di determinare a che cosa si riduce \bar{F} allorchando l'omografia fra F ed \bar{F} , variando nel dato sistema, tende ad una delle supposte omografie degeneri di questo.

Ho studiato tale questione nel caso di un sistema ∞^1 di omografie piane e di F curva (piana) algebrica, arrivando alla determinazione di tutte le possibili curve limiti del sistema descritto dalla curva omologa \bar{F} ⁽³⁾. Tale studio non è immediato perchè a decidere la natura della curva limite concorrono tanto i caratteri proiettivi della curva data F quanto il comportamento del sistema di omografie in prossimità dell'omografia degenerare, secondo leggi che ad un primo esame appaiono tutt'altro che evidenti. In questa Nota riassumo brevemente le parti più notevoli della mia ricerca.

Ho trovato che in generale tali curve limiti sono spezzate in rette; ma in determinate circostanze (cfr. nn. 5, 6) possono anche presentare delle componenti di ordine superiore ad uno od essere addirittura irriducibili. Tali componenti non rette sono però sempre « curve W » di Klein-Lie (algebriche) ⁽⁴⁾, onde si può enunciare che in ogni caso le curve in discorso o sono curve W o sono spezzate in curve W.

(1) Nella seduta del 16 febbraio 1936.

(2) Cfr., p. es., G. FANO, *Sulle superficie di uno spazio qualunque a sezioni iperpiane collineari*. « Memorie R. Accad. dei Lincei », ser. 6^a, vol. 2^o (1926), p. 115.

(3) Nella Memoria: *Sulle curve limiti di un sistema continuo ∞^1 di curve piane omografiche*. « Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino », 1936. Citerò nel seguito questo lavoro con la lettera M.

(4) In particolare: coniche (cfr. n. 6).

2. Consideriamo fra due dati piani π, π' un sistema continuo ∞^1 di omografie Ω_t definito da equazioni del tipo

$$(1) \quad x_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik}(t) x_k \quad (i = 1, 2, 3)$$

coi coefficienti $a_{ik}(t)$ funzioni analitiche del parametro t , regolari nel punto $t = 0$ e quindi, in un certo intorno di questo punto, sviluppabili in serie di potenze di t . Si supponrà che il loro determinante sia nullo per $t = 0$, mantenendosi però diverso da zero nel predetto intorno. In corrispondenza al valore $t = 0$ del parametro, avremo dunque nel sistema (1) un'omografia degenera Ω_0 .

Data allora nel piano π' una curva algebrica C' di ordine N , trasformando colle (1) la sua equazione $F(x'_1, x'_2, x'_3) = 0$, otteniamo l'equazione del sistema ∞^1 descritto nel piano π dalla curva omologa C_t . Nelle nostre ipotesi questa equazione sarà del tipo

$$t^n f(x_1, x_2, x_3) + t^{n+1} f_1(x_1, x_2, x_3) + \dots = 0$$

con n intero positivo o nullo ed f, f_1, \dots forme di grado N , di cui la prima non identicamente nulla. Facendo tendere t a zero, si ottiene evidentemente per la curva C_0 , limite delle curve C_t , l'equazione $f(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Si tratta dunque di studiare il termine di grado minimo in t che compare nell'equazione delle curve C_t .

3. Tale studio è assai agevolato dall'osservazione seguente. Se modifichiamo le equazioni (1) di Ω_t ponendo in esse:

$$x_k = \sum_{l=1}^3 \alpha_{kl}(t) \bar{x}_l \quad (k = 1, 2, 3)$$

colle funzioni $\alpha_{kl}(t)$ (arbitrarie, purchè) analitiche e regolari nel punto $t = 0$ e tali inoltre che il loro determinante non sia nullo per $t = 0$, veniamo a sostituire all'assegnato sistema di omografie Ω_t un sistema analogo $\bar{\Omega}_t$ e quindi alle curve C_t delle altre curve \bar{C}_t . Si dimostra immediatamente che, per $t \rightarrow 0$, la curva \bar{C}_0 limite delle \bar{C}_t risulta omografica alla curva C_0 limite delle C_t .

Allo scopo di caratterizzare proiettivamente la curva C_0 è quindi lecito trasformare il dato sistema Ω_t nel modo dianzi precisato; con questo mezzo si possono far assumere alle (1) quelle forme che meglio si prestano al calcolo.

4. L'omografia degenera Ω_0 fornita dalle (1) per $t = 0$ può essere degenera di prima o di seconda specie. Nel primo caso si conclude immediatamente

che la curva C_0 è sempre spezzata in N rette (cfr. M., n. 4) e quindi ci fermeremo solo sul secondo caso.

L'omografia Ω_0 degenerare di seconda specie definisce nel piano π una retta singolare s e nel piano π' un punto singolare S' ⁽¹⁾. Questo punto S' di π' viene trasformato da Ω_i^{-1} ($t \neq 0$) in un punto S_i di π ; diciamo S_0 la posizione limite di S_i per $t \rightarrow 0$ e distinguiamo due casi secondochè S_0 non appartiene (caso I) ovvero appartiene (caso II) alla retta singolare s .

Consideriamo poi (in entrambi i casi I, II) la proiettività ω_i che Ω_i subordina fra i fasci di rette coi centri nei punti corrispondenti S_i ed S' ; per $t \rightarrow 0$, ω_i tende ad una proiettività limite ω_0 fra i fasci S_0 ed S' , la quale può essere non degenerare (casi I₁, II₁) oppure degenerare (casi I₂, II₂).

Nei casi I₂, II₂ la proiettività degenerare ω_0 definisce una retta singolare \bar{s} nel fascio S_0 ed una retta singolare \bar{s}' nel fascio S' . A questa retta \bar{s}' la ω_i^{-1} ($t \neq 0$) fa corrispondere nel fascio S_i una retta \bar{s}_i che, per $t \rightarrow 0$, tende ad una determinata posizione limite \bar{s}_0 nel fascio S_0 . Distinguiamo due ulteriori casi secondochè \bar{s}_0 è distinta dalla retta \bar{s} (casi I₂₁, II₂₁) ovvero coincide con essa (casi I₂₂, II₂₂).

Usando opportune trasformazioni del tipo introdotto al n. 3 e scegliendo convenientemente i sistemi di riferimento nei due piani, si deducono nei singoli casi delle forme ridotte per le equazioni (I) del sistema Ω_i , usando le quali si arriva facilmente a determinare la natura della curva limite C_0 .

Nei casi I₁, II₁, I₂₂, II₂₁ si trova che C_0 è sempre spezzata in N rette la cui configurazione dipende dal comportamento di C' nel punto S' (cfr. M., nn. 9, 14). Negli altri due casi possono invece aversi in C_0 delle componenti non rette; sono i casi più interessanti sui quali diamo qualche indicazione ulteriore.

5. Nel caso I₂₁ si possono assumere per Ω_i equazioni del tipo

$$(2) \quad x'_1 : x'_2 : x'_3 = t^m x_1 : t^{m+n} x_2 : x_3$$

con m, n interi positivi (cfr. M., n. 11); nel piano π' il punto S' ha allora coordinate $(0, 0, 1)$ e la retta \bar{s}' ha equazione $x'_2 = 0$.

In questo caso la curva limite C_0 presenta delle componenti non rette solo se alla curva data C' appartiene qualche ramo di origine S' $(0, 0, 1)$, ivi tangente alla retta \bar{s}' ($x'_2 = 0$) e tale da avere ordine μ e classe ν proporzionali ad m ed n . Ogni ramo in queste condizioni fa comparire in C_0 una componente di ordine $\mu + \nu$; infatti se

$$\frac{x'_2}{x'_3} = a \left(\frac{x'_1}{x'_3} \right)^{\frac{\mu + \nu}{\mu}} + a_1 \left(\frac{x'_1}{x'_3} \right)^{\frac{\mu + \nu + \nu_1}{\mu}} + \dots, \quad (a \neq 0),$$

(1) Se la curva data C' non passa per S' , la curva C_0 si compone della retta singolare s contata N volte; il caso difficile è quello in cui C' passa per S' .

è l'equazione del ramo, trasformando colle (2) otteniamo per il ramo omologo

$$t^{m+n} \frac{x_2}{x_3} = a t^{m+m \frac{v}{\mu}} \left(\frac{x_1}{x_3} \right)^{\frac{\mu+v}{\mu}} + a_1 t^{m+m \frac{v+x_1}{\mu}} \left(\frac{x_1}{x_3} \right)^{\frac{\mu+v+v_1}{\mu}} + \dots$$

da cui, dividendo per $t^{m+n} = t^{m+m \frac{v}{\mu}}$ (in virtù dell'ipotesi $\frac{\mu}{m} = \frac{v}{n}$) e pas-

sando al limite per $t \rightarrow 0$, si deduce $\frac{x_2}{x_3} = a \left(\frac{x_1}{x_3} \right)^{\frac{\mu+v}{\mu}}$ onde viene a far parte

di C_0 la curva di equazione $x_2^\mu x_3^v = a^\mu x_1^{\mu+v}$. Si tratta manifestamente di una curva W algebrica.

La curva C_0 sarà irriducibile quando alla curva C' appartiene un solo ramo del tipo detto con $\mu + v \equiv N$; in generale però C_0 non risulta omografica a C' .

6. Nel caso II_{22} si hanno da considerare nel fascio S_0 due rette: la retta s e la retta $\bar{s} \equiv \bar{s}_0$; conviene distinguere due sottocasi secondochè queste due rette sono distinte o coincidenti. Nel primo sottocaso la curva C_0 è sempre spezzata in N rette (cfr. M., n. 14); nel secondo una discussione assai laboriosa (cfr. M., § 6) porta a concludere che in certi casi (cfr. M., n. 17) possono far parte di C_0 anche delle coniche (tangenti alla retta $s \equiv \bar{s} \equiv \bar{s}_0$ nel punto S_0).

Sussiste pertanto quanto si è enunciato al n. 1.

Fisica. — *Una registrazione a valvole per coincidenze fra contatori a moltiplicazione.* Nota di G. BERNARDINI e O. BOC-
CIARELLI presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. L. TIERI.

1. In una Nota preliminare ⁽²⁾ è stato già descritto sommariamente uno schema di circuito per coincidenze fra contatori a moltiplicazione e alcune prove fatte per collaudarlo.

Torniamo ora sull'argomento, sia perchè i circuiti sono stati modificati onde realizzare una maggiore amplificazione, e un miglior potere risolutivo, sia per indicare nei dettagli come tale dispositivo è stato realizzato. Inoltre, per esperienza ormai acquisita (vedi una Nota successiva) torniamo sull'argomento anche per mostrare certi vantaggi che un tale dispositivo può presentare in alcune ricerche di fisica nucleare che richiedano l'osservazione di particelle pesanti ionizzanti (protoni, particelle alfa) di notevole energia, la cui intensità sia così debole da renderne difficile l'osservazione coi metodi ordinari atti a rivelare i processi elementari (amplificatori proporzionali, camere di Wilson, contatori ecc.).

In particolare sembra che tale dispositivo sia particolarmente indicato per attenuare quelle difficoltà che nascono ogni volta che si debba misurare con esattezza la penetrazione (e l'energia) dei protoni di grande velocità emessi direttamente o indirettamente in certe disintegrazioni nucleari, difficoltà che, con successo, recentemente anche Zipprich ⁽³⁾ ha cercato di superare usando di due elettrometri in coincidenza.

2. Lo schema attuale del dispositivo è dato nella fig. 1. C_1 e C_2 sono due contatori a moltiplicazione a filo di cui diremo nel seguito. Gli impulsi di questi, dell'ordine di 10^{-2} , 10^{-3} volt (a seconda del voltaggio loro applicato e del tipo e energia delle particelle ionizzanti che determinano gli impulsi) direttamente trasmessi alle griglie delle prime valvole (che funzionano a mo' di compromesso come valvole elettrometro e come amplificatrici) vengono ulteriormente amplificati, con costante di accoppiamento piuttosto elevata, dalla seconda valvola e quindi, con costante di tempo relativamente piccola (dell'ordine del millesimo di secondo), vengono posti in coincidenza dalle valvole n. 3. Il potere risolutivo è reso variabile

(1) Nella seduta del 16 febbraio 1936.

(2) « Ric. Scient. », VI, vol. II, p. 34.

(3) B. ZIPPRICH, « Zeit. f. Phys. », 96, 328, 1935.

d un potenziometro posto sulle griglie di quest'ultime. Queste, normalmente, livellano gli impulsi (quando essi non lo siano già per l'aver portato a saturazione le valvole precedenti) bastando, con i pentodi usati, degli impulsi di circa 2 volt per portarle dalla corrente di saturazione a zero.

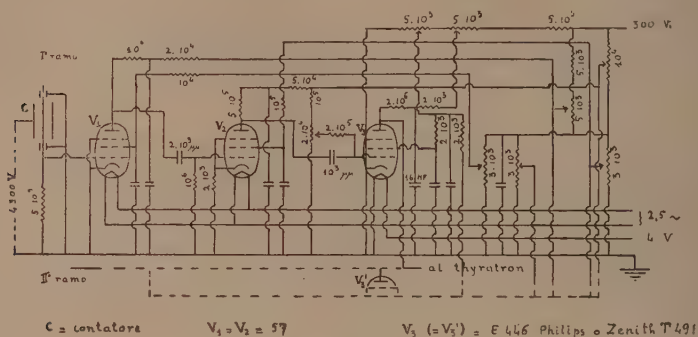


Fig. 1.

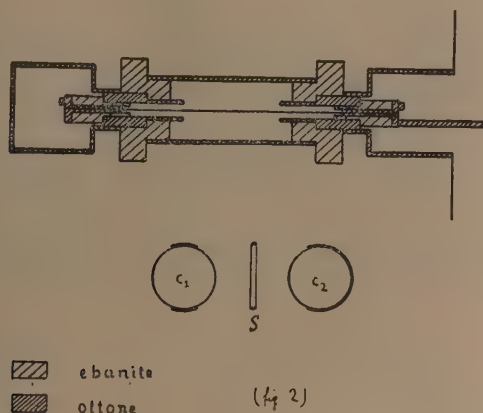
La scelta di queste valvole è stata piuttosto laboriosa. Le valvole usate in principio erano, secondo il classico schema di Rossi, dei triodi ad alta pendenza e a bassa resistenza interna come le Magzda AC/HL, le Zenith B 491, o le Philips E 499, ma poi si è visto che tali valvole, già più che soddisfacenti, potevano essere sostituite, con vantaggio, dai pentodi alta frequenza Zenit o da quelli Philips, data la loro relativamente bassa resistenza statica che permette sempre una netta distinzione fra impulsi singoli e coincidenze. Era così agevolmente possibile registrare le sole coincidenze usando una conveniente polarizzazione sulla griglia del thyatron (a gas inerte) che comandava il numeratore telefonico impiegato per il conteggio delle coincidenze medesime.

D'altra parte, se effettivamente si può far conto su impulsi così grandi da essere certi che essi siano già livellati dalla seconda valvola (è il caso di impulsi di contatori a relai ai quali la registrazione può essere facilmente adattata — vedi Ric. Sci., I. c.) si possono usare come terze valvole anche dei pentodi come la 57 caricandoli con una resistenza relativamente bassa che permetta, a differenza di quanto accade nello schema di Rossi, l'assorbimento di una potenza notevole rispetto a quella che assorbe, con la sua corrente di griglia, il circuito di griglia del thyatron. Infatti, anche nel caso limite di una resistenza anodica molto piccola rispetto a quella interna delle valvole, fra gli impulsi semplici e le coincidenze c'è sempre un rapporto $\frac{1}{2}$, rapporto più che sufficiente per separare i primi dalle seconde.

In compenso la maggior potenza impiegata nel circuito delle anodiche impedisce che nel circuito di griglia del thyatron gli impulsi vengano deformati e appiattiti, a tutto vantaggio del potere risolutivo (si possono aggiun

gere dei poteri risolutivi dell'ordine di 10^{-5} sec.). Su questo e su altri argomenti di carattere schiettamente tecnico ritorneremo altrove.

3. I contatori usati erano contatori a filo la cui parete, sostenuta da un telaio di ottone, era una foglia di Al di $7\ \mu$ di spessore. Il disegno, che ne indica i particolari, è dato nella fig. 2.



Essendo a pressione normale, lavoravano con una tensione piuttosto elevata, e precisamente di circa 4300 volt. Il filo, del diametro di $0,2\text{ mm.}$, era ora di platino, ora di tungsteno. Quelli a filo di tungsteno avevano spesso un effetto di zero relativamente forte, forse dovuto a impurezze di torio presenti nel filo stesso. Il campo di moltiplicazione dei contatori era di circa 400 volt. e, pur senza raggiungere una vera e propria saturazione in una zona intermedia di circa 150 volt, presentavano solo una variazione di sensibilità del 15 %.

Le condizioni geometriche, in cui venivano usati, erano naturalmente diverse da caso a caso a seconda dell'intensità e della penetrazione delle particelle investigate.

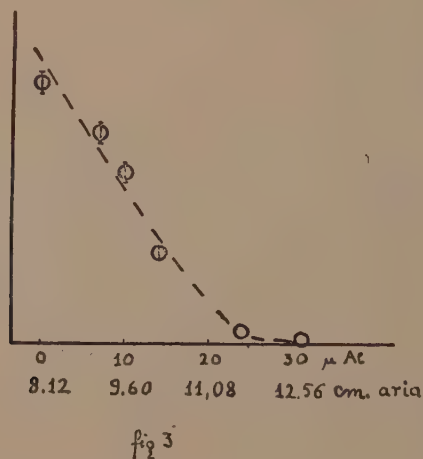
Interponendo fra i due contatori degli schermi convenienti, la penetrazione delle particelle studiate veniva misurata in modo diretto (comunque grande fosse la penetrazione medesima) nei limiti di sensibilità dei contatori per le particelle in questione. Tenendo conto di alcune esperienze fatte con protoni di circa 8 milioni di e. volt. (proiettati dai neutroni $\text{Po} + \text{Be}$) sembra che la sensibilità dei contatori potesse valutarsi, in ottime condizioni di funzionamento, intorno ai 500 ioni.

Il metodo, come abbiamo già accennato, sembra particolarmente adatto per lo studio dei fenomeni che involgono particelle pesanti di grande energia, dato che i contatori a moltiplicazione possono essere tenuti a una tensione così spinta da far sì che il fattore di moltiplicazione sia

molto elevato. Il fatto che in tali condizioni la proporzionalità dei contatori venga seriamente pregiudicata, non importa al caso nostro, poichè l'energia delle particelle viene misurata direttamente, come abbiamo già detto, per mezzo degli schermi interposti fra i due contatori. Ugualmente non pregiudica il fatto che in tali condizioni i contatori presentino un notevole effetto di sfondo proprio, dovuto agli ioni generati da elettroni, poichè questo effetto di sfondo viene automaticamente eliminato dal funzionamento in coincidenza delle due ultime valvole, dato il potere risolutivo relativamente elevato del loro accoppiamento. Per questa ragione il metodo può essere impiegato anche in presenza di radiazioni gamma notevolmente intense (vedi Ric. Sc., loc. cit.).

4. Il metodo è stato collaudato sia con particelle alfa (Th C C'') sia con protoni.

Quest'ultimi furono ottenuti per proiezione di nuclei di idrogeno da parte di particelle alfa del Po. La fig. 3 mostra appunto la fine della curva



di assorbimento relativa ai protoni così emessi da un sottile strato di cellofana (circa 30 mm. eq. in aria) bombardato da particelle alfa omogenee di 2,7 cm. di percorso residuo.

Le condizioni geometriche erano tali da poter considerare molto limitata l'apertura dell'angolo di proiezione (circa 7°). Il preparato era deposto su una piastrina di 2 mm. di diametro alla distanza di 30 mm. dalla cellofana.

Come si vede, i punti sperimentali ottenuti (i segmenti verticali indicano gli errori medi) si accordano piuttosto bene con quello che sarebbe l'andamento prevedibile della curva di assorbimento, andamento che dovrebbe

essere rettilineo salvo un breve tratto di raccordo dovuto alle condizioni geometriche, alla non perfetta omogeneità delle particelle alfa ecc.

Inoltre essendo, nel caso dell'urto centrale, secondo una relazione data e controllata da Blackett ⁽¹⁾ e Duncanson ⁽²⁾

$$R_H = 4,57 R_\alpha$$

dove R_α indica il percorso della particella alfa e R_H quello del protone proiettato, i protoni da noi osservati dovevano avere un percorso massimo di 12,4 cm. in buon accordo con quello effettivamente osservato.

5. I mezzi che hanno permesso la realizzazione di questo dispositivo sono dovuti alla generosità della S. E. del Valdarno. Ad essa sono dovuti i nostri più vivi ringraziamenti.

Al prof. L. Tieri, che tanto interesse ha posto al nostro lavoro e alle ricerche a cui ha dato seguito, la nostra gratitudine.

Geologia. — *La struttura geologica delle Austridi.* Nota II. *Il sistema austroalpino a sud della finestra tettonica degli Alti Tauri.* ⁽³⁾ Nota di GIAMBATTISTA DAL PIAZ, presentata ⁽⁴⁾ dal Corrisp. A. BIANCHI

In base alle ricerche compiute durante vari anni nell'Alto Adige orientale, assieme al prof. A. Bianchi, ho potuto stabilire in modo sicuro che nel vasto settore austroalpino, compreso fra il confine italo-austriaco ed il fiume Aurino, si possono distinguere tre grandi unità (zone) strutturali, costituite da terreni del cristallino antico, ossia da scisti precarboniferi e forse addirittura prepaleozoici (B. 1-3). Procedendo da sud verso nord, vale a dire dall'elemento superiore verso quello inferiore, s'incontra successivamente:

I) La zona di Corno Alto ⁽⁵⁾.

II) La zona di Croda Rossa.

III) La zona di Monte Nevoso.

Queste tre unità sono separate fra di loro da due grandi linee di dislocazione postcristallina, lungo le quali sono incuneati sottili lembi di Mesozoico fossilifero e talora anche di Verrucano. In particolare il primo elemento,

(1) «Proc. Roy. Soc.», 135, 132 (1933).

(2) «Proc. Cambr. Phil. Soc.», 30, 102 (1934).

(3) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia della R. Università di Torino.

(4) Nella seduta del 16 febbraio 1936.

(5) Nuova denominazione locale, tratta dal nome del Monte Corno Alto (quota 2623) del fianco sinistro della bassa Val Casies, e da me introdotta allo scopo di evitare l'uso del termine più generale di «Tirolidi», già adoperato in precedenza.

quello più elevato, è separato dal secondo mediante la sinclinale permo-triasica di Kalkstein-Forcella Ciarnil, che, più ad occidente, trova la sua continuazione nella complessa sinclinale di Mules-Corno Bianco (Mauls-Weisshorn). A sua volta la zona della Croda Rossa è separata dalla sottostante unità del Monte Nevoso per mezzo della dislocazione Defereggental-Valle d'Anterselva. Superiormente il complesso austroalpino è separato dalle Dinaridi mediante la linea della Pusteria (= limite alpino dinarico *auct.*), lungo la quale si intercalano lembi mesozoici della zona della Drava (Drauzug) e sottili apofisi di tonaliti recenti (terziarie). Inferiormente il sistema austridico ricopre la zona di Matrei, complicatissima alternanza di scaglie penniniche e austroalpine costituite da terreni mesozoici e pretriasici, e, attraverso questa, il Mesozoico pennidico della finestra tettonica degli Alti Tauri (formazione dei calcescisti con ofioliti).

Le tre unità austroalpine dell'Alto Adige orientale costituiscono indubbiamente tre falde di ricoprimento, perchè sono rovesciate a guisa di giganteschi embrici l'una sull'altra e sui sedimenti permo-triasici interposti fra di loro, nonchè, complessivamente, sui terreni mesozoici dei Tauri. La falda più elevata, ossia quella del Corno Alto, presenta una evidente struttura a ventaglio, dovuta al fatto che, durante una fase tardiva dell'orogenesi alpina, essa sviluppò posteriormente una grande piega retroflessa, scorsa verso sud sul mesozoico della zona della Drava, lungo la linea di dislocazione della Pusteria.

Nella sua classica opera *Der Bau der Alpen*, R. Staub aveva riferito la sinclinale permo-mesozoica di Kalkstein-Forcella Ciarnil ai sedimenti austroalpini medi (*Mittelostalpine Sedimente*), suddividendo l'intero sistema austridico delle alpi pusteresi nei due grandi complessi delle « Tirolidi » (falde austroalpine superiori), a sud della dislocazione Kalkstein-Forcella Ciarnil, e delle « Grigionidi » (falde austroalpine medie e inferiori), a nord della stessa linea di disturbo (b. 4). Con tale concezione, confermata nella sua recentissima Memoria sulla Morfologia alpina (b. 5), l'illustre Collega svizzero era portato ad ammettere una notevole corrispondenza tettonica fra gli elementi austroalpini dell'Alto Adige orientale e quelli dei Grigioni.

Bisogna riconoscere, ad onor del vero, che, nel settore da me studiato, i rapporti strutturali sono tali da far sembrare perfettamente giustificata l'ingegnosa concezione di Staub, che io stesso ho accettato e seguito fino a questi ultimi anni (b. 1). Nella mia « carta geotettonica alla scala 1:200.000 dell'Alto Adige orientale e regioni limitrofe », stampata nel 1932, ho infatti indicato la presunta omologia fra le falde austroalpine della regione da me presa in esame e quelle della Svizzera orientale (b. 1, tav. X). In questo grafico il ricoprimento del Corno Alto venne rappresentato come equivalente delle Tirolidi, mentre le due nuove falde della Croda Rossa e del Monte Nevoso furono fatte corrispondere rispettivamente alle Grigionidi superiori (ricoprimento del Campo) e alle Grigionidi inferiori (ricoprimento del Bernina

l. s.). Fin d'allora però non mancai di rilevare le notevoli differenze litologiche e stratigrafiche che si osservano fra gli elementi austroalpini inferiori dei Grigionidi (falda del Bernina, dell'Err ecc.) e quelli ritenuti tali dell'Alto Adige orientale (falda del Monte Nevoso), sia per quanto riguarda i terreni del Cristallino antico e sia per quanto si riferisce alle formazioni permo-mesozoiche.

Frattanto nuove ricerche da me condotte nell'Alto Adige centrale e occidentale mi portarono via via al convincimento che, per quanto riguarda la tettonica delle Austridi atesine, molti concetti informativi della sintesi di Staub non trovassero corrispondenza nei fatti osservati e dovessero essere sostituiti da altre concezioni, più aderenti alla realtà naturale (b. 6). A conclusioni analoghe, seppure espresse sotto altra forma, era giunto anche il Sander nell'interessante aggiornamento dei suoi precedenti lavori sull'area relativa ai fogli Merano e Bressanone (b. 7). Ultimamente il Dünner diede una prima conferma alle idee mie e di Sander, constatando la completa assenza della falda austroalpina media nel settore a nord del Passo del Brennero (b. 8).

In una breve Memoria in corso di stampa ho dimostrato che in corrispondenza al lato occidentale della finestra dei Tauri esiste una sola grande unità austridica, appartenente al sistema delle « Tirolidi ». Si tratta del ricoprimento austroalpino superiore dell'Oetzal, con le sue vaste digitazioni dorsali (falda di Steinach-M. Velo-M. Cavallo) e basali (anticlinale di Vipiteno e zona di scaglie Vipiteno-Steinach). In questa zona manca invece ogni traccia di elementi tettonici riferibili alle Grigionidi, ossia alle falde austroalpine medie e inferiori (b. 9).

Le conclusioni a cui sono giunto nel lavoro precitato scalzano naturalmente le basi a qualsiasi parallelismo fra le falde austroalpine della Pusteria e quelle dei Grigionidi, che si fondi sul noto schema di Staub. Infatti i terreni che costituiscono le presunte Grigionidi dell'Alto Adige orientale sono la prosecuzione diretta di quei medesimi terreni che nella valle dell'Isarco si ripiegano a volta sopra i calcescisti dei Tauri, formando il nucleo scistoso-cristallino della falda austroalpina superiore dell'Oetzal. Dimostrata l'appartenenza alle « Tirolidi » di tutti gli elementi austroalpini che ricoprono ad ovest la zona pennidica dei Tauri, si deve ammettere, per logica conseguenza, che anche le presunte Grigionidi dell'Alto Adige orientale — la falda della Croda Rossa e quella del Monte Nevoso — appartengano ai termini superiori del sistema austridico.

In tutto il vasto territorio austroalpino a mezzogiorno della finestra dei Tauri non esiste nessun termine equivalente alle Grigionidi; i diversi elementi tettonici di quest'ampia regione vanno tutti ascritti alle « Tirolidi ». Le conclusioni a cui sono giunto per la zona austroalpina che si estende lungo il bordo occidentale della finestra dei Tauri si applicano quindi integralmente anche al settore situato a sud della finestra stessa.

Per quanto si è detto le falde del Corno Alto, della Croda Rossa e del Monte Nevoso debbono essere considerate come altrettanti elementi delle « Tirolidi », ciascuno dei quali probabilmente divisibile in elementi minori da qualche dislocazione d'importanza secondaria e locale, come quella che separa la fillade del Thurnthaler dai gneiss a settentrione, quella entro gli ortogneiss biotitici del fianco sinistro di Val Casies, quelle presso Cima Triangolo e presso la zona di Matrei nell'alta Val dei Dossi ecc. In complesso, la zona austroalpina dell'Alto Adige orientale presenta una struttura a scaglie embriicate, con elementi di gigantesche dimensioni, quali sono le tre falde soprannominate. È probabile che i due termini inferiori, e cioè i ricoprimenti della Croda Rossa e del Monte Nevoso, si fondano insieme verso occidente, per raggiungere, così uniti, la valle dell'Isarco e continuarsi in parte nella falda dell'Oetztal s. s. La falda del Corno Alto rappresenterebbe quindi un elemento tettonicamente più elevato di quella dell'Oetztal s. s. Essa sarebbe in un certo senso analoga alla falda di Steinach-Monte Cavallo, ma non potrebbe certo esserne l'omologa, perchè alquanto più meridionale e tettonicamente più elevata di essa e perchè separatane mediante la sinclinale di Kalkstein-Mules. D'altra parte la falda di Steinach-Monte Cavallo non sembra trovare la sua equivalenza nella zona austroalpina dell'Alto Adige orientale, a nord della dislocazione Defereggertal-Valle d'Anterselva. Ciò dipende forse dal fatto che questa falda doveva essere qui situata in un settore troppo avanzato al disopra dell'attuale finestra dei Tauri per potervi essere rispettata dall'erosione. Essa occupava probabilmente una posizione più frontale ed in parte anche più bassa rispetto alle falde della Croda Rossa e del Monte Nevoso.

L'idea che tutte tre le falde austroalpine delle montagne pusteresi appartengano alle « Tirolidi », cioè a un unico grande sistema tettonico, è suffragata, oltrechè dalle considerazioni d'indole generale esposte in precedenza, anche dall'osservazione di alcune caratteristiche geologiche locali. Anzitutto la poca profondità della sinclinale di Mules (b. 7) e in secondo luogo l'identità petrografica fra gli scisti cristallini al letto e quelli al tetto della sinclinale di Kalkstein-Forcella Ciarnil (b. 1-3). Questi fatti non parlano certo a favore dell'esistenza di un disturbo tettonico di grande profondità ed estensione, quale dovrebbe essere il piano di scorrimento separante le « Tirolidi » dalle « Grigionidi ». Comunque una dislocazione esiste e serve a distinguere fra di loro elementi strutturali molto importanti, quali sono le falde del Corno Alto e della Croda Rossa.

Si può quindi affermare che se cambia la vecchia nomenclatura, esprimere le supposte omologie tettoniche fra le falde austroalpine dell'Alto Adige orientale e quelle dei Grigioni, sussistono sempre integralmente le grandi divisioni strutturali da me riconosciute sul terreno. Nuova conferma dell'antico detto: *verum ipsum factum!*

Conviene infine richiamare l'attenzione degli studiosi sul fatto importante che la falda di Monte Nevoso conserva vasti relitti del suo fianco rove-

sciato, costituito da terreni metamorfici del Permiano e del Trias a facies pennidica, in successione invertita (bibl. I, tav. X, zona di Matrei, Permo-Trias austroalpino « inf. »). Si ripete quindi per il settore a mezzogiorno della finestra dei Tauri il fenomeno della parziale conservazione del fianco rovesciato delle falde austroalpine superiori (Tirolidi), già da me osservato nella regione del Brennero (b. 9). Questa circostanza riveste un interesse molto considerevole per la conoscenza della tettonica delle Austridi.

Concludendo, la vasta zona austridica a sud della finestra dei Tauri è costituita esclusivamente da elementi riferibili al sistema delle falde austroalpine superiori (Tirolidi). Mancano in tutto questo settore rappresentanti delle falde austroalpine medie (Grigionidi superiori) e inferiori (Grigionidi inferiori). Nel loro insieme, le « Tirolidi » dell'Alto Adige orientale corrispondono alla falda dell'Oetzthal *lato sensu*. Sarà compito di un prossimo lavoro ricercare e stabilire le omologie particolari che intercorrono fra le singole unità tettoniche delle Austridi pusteresi e i vari elementi del grande e complesso ricoprimento dell'Oetzthal.

Per maggiore chiarezza, ho espresso nei due schemi seguenti l'interpretazione tettonica del sistema austroalpino dell'Alto Adige orientale, secondo le precedenti concezioni di R. Staub e Gb. Dal Piaz (a) e secondo le nuove idee esposte nel presente lavoro (b):

$$(a) \text{ AUSTRIDI} = \begin{cases} \text{Tirolidi (falda del Corno Alto)} \\ \text{Grigionidi superiori (falda della Croda Rossa)} \\ \text{Grigionidi inferiori (falda del Monte Nevoso)} \end{cases}$$

$$(b) \text{ AUSTRIDI} = \text{Tirolidi} \begin{cases} \text{falda del Corno Alto} \\ \text{falda della Croda Rossa} \\ \text{falda del Monte Nevoso.} \end{cases}$$

BIBLIOGRAFIA. — 1. GB. DAL PIAZ, *Studi geologici sull' Alto Adige orientale e regioni limitrofe*. « Mem. Istituto Geol. Padova », vol. X, 1934. 2. A. BIANCHI, *Studi petrografici sull' Alto Adige orientale e regioni limitrofe*. « Ibidem ». 3. A. BIANCHI, GB. DAL PIAZ, G. MERLA, M. FURLANI-CORNELIUS, *Foglio Monguelfo della « Carta Geologica delle Tre Venezie » alla scala 1:100.000*, pubblicata dal R. Magistrato alle Acque. 4. R. STAUB, *Der Bau der Alpen*. « Beitr. Geol. Karte d. Schweiz. », N. F. 52 L., 1924. 5. R. STAUB, *Grundzüge und Probleme alpinen Morphologie*. « Denkschr. Naturfor. Gesell. » B. LXIX. Zürich, 1934. 6. GB. DAL PIAZ, *Sui rapporti geologici che intercedono fra la serie delle Cime Bianche di Telve e il complesso del Tribulaun nella regione del Brennero*. « Atti Acc. Veneto-Trentino-Istria », vol. XXIV, 1933. 7. B. SANDER, *Erläuterungen zur geologischen Karte Meran-Bräun. « Schlernschriften »*, 1929. 8. H. DÜNNER, *Zur Geologie des Tauernwestendes am Brenner*. « Wintertur », 1934. 9. GB. DAL PIAZ, *La struttura geologica delle Austridi*, Nota I. *Il sistema austroalpino lungo il bordo occidentale della « finestra dei Tauri »*. « Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze » ecc., 19 gennaio 1936.

Biologia. — *Sui rapporti fra gli attinomiceti anaerobi tipo « Wolff-Israel » ed il « Bacterium bifidum »* ⁽¹⁾. Nota di V. PUNTONI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sotto il punto di vista epidemiologico, le attinomicosi non possono essere considerate come affezioni contagiose; esse si presentano infatti sotto forma di casi sporadici, la cui origine deve intravedersi nell'attecchimento epistomico di microrganismi ambientali.

Senonchè mentre è ben dimostrata la diffusione ambientale degli attinomiceti aerobi (generi *Actinomyces* Harz ed *Asteroides* Puntoni e Leonardi), meno chiara, per non dire assolutamente oscura, è la derivazione degli attinomiceti anaerobi (genere *Actinobacterium* Haass = *Cohnistreptothrix* Pinoy) sebbene essi siano i più frequenti a ritrovarsi nelle attinomicosi umane ed animali. Soltanto Lord ⁽³⁾ e Naeslund ⁽⁴⁾ fanno menzione del reperto, nel cavo orale, di microrganismi simili agli attinomiceti tipo Wolff-Israel (*Actinobacterium israeli* (Kruse) Sampietro, chiamato anche *Cohnistreptothrix israeli* Pinoy).

Effettivamente, dalla bocca è possibile isolare microrganismi simili al tipo Wolff-Israel; ma quando ci si accinga a classificare tali stipiti, ci si accorge che essi mostrano altrettanta somiglianza con un ben noto saprofito intestinale, comune soprattutto nei lattanti, e cioè col *Bacterium bifidum* (Tissier) Lehmann e Neumann, microrganismo che già fu considerato come un attinomicete dal Vuillemin ⁽⁵⁾.

Questa constatazione ha imposto il quesito dei rapporti fra gli attinomiceti tipo Wolff-Israel, ed il bacillo bifido, quesito che ho cercato di risolvere comparando fra loro quattro stipiti di attinomiceti anaerobi tipo Wolff-Israel, da lungo tempo adattati alla vita culturale (3225, 3440, e 3561 ottenuti dall'Istituto Lister di Londra; ed un ceppo « Bichat » avuto dall'Istituto Pasteur di Parigi) con cinque stipiti di b. bifido isolati dalle feci di lattanti e di vitelli (umano An, umano Am, vitello 1, vitello 2 e vitello 3).

Le constatazioni effettuate sono state le seguenti:

MORFOLOGIA. — All'atto dell'isolamento i bifidi differivano dagli attinomiceti per una più manifesta tendenza alle ramificazioni. Dopo molti passaggi culturali dei bifidi, ambedue i gruppi assunsero un tipo morfologico spiccatamente corinebatterico e decisamente simile.

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Batteriologia della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 16 febbraio 1936.

(3) « Journal Americ. med. Ass. », Vol. 55, p. 1261 (1910).

(4) Ved., *A System of Bact.*, vol. 8, p. 83 (London, 1931).

(5) *Les champignons parasites*, p. 132 (Lechevalier et fils Ed. Paris, 1931).

Riguardo alle colorazioni fu constatata la Gram-resistenza di ambedue, la mancanza di acido-resistenza e la presenza, più o meno evidente, di granulazioni metacromatiche.

COLTURE. — Ambedue i gruppi sono risultati anaerobi obbligati, non essendo riuscito il loro adattamento colturale in aereobiosi. Tuttavia è da notare che gli attinomiceti, disseminati in agar a cilindro, hanno incostantemente dimostrato la tendenza a svilupparsi, con particolare rigoglio, in una zona media, posta a circa 2 cm. dalla superficie; un simile comportamento è stato rilevato nei bifidi solo in via eccezionale. Dal punto di vista delle temperature minime di sviluppo, si è constatato che i bifidi possono svilupparsi a temperature un poco inferiori (20°) rispetto agli attinomiceti (24°).

In brodo per anaerobi lo sviluppo avviene, per ambedue i gruppi, dopo 36-48 ore a 37°, in forma di forte intorbidamento con successiva sedimentazione abbondante e forte acidificazione, maggiore per bifidi (fino a pH 4) che per gli attinomiceti (fino a pH 5).

In agar per anaerobi si ottengono, nello spessore, colonie sferoidali o moriformi o lenticolari, senza consistenza, ben emulsionabili, grandi fino a 2 mm. e talora più. I bifidi umani hanno presentato colonie un poco più piccole di quelli bovini, e l'attinomicete « Bichat » colonie assai più piccole degli altri attinomiceti. In superficie di agar, nel vuoto od in atmosferica carbonica, si è avuta grande difficoltà colturale ed aspetto simil-difterico.

Su patata, assenza di sviluppo.

PROPRIETÀ BIOCHIMICHE. — Nessuna azione proteolitica. Attività saccarolitica senza sviluppo di gas, ma con forte acidificazione, di solito più energica nei bifidi che negli attinomiceti. Ambedue i gruppi attaccano costantemente galattosio, glucosio, lattosio e maltosio. Alcuni ceppi di bifidi possono attaccare in più o la mannite o il saccarosio; tuttavia il comportamento di alcuni bifidi (Umano An, Vitello 2) è assolutamente identico a quello degli attinomiceti. Il latte è coagulato.

VITALITÀ. — La sopravvivenza nelle colture è molto debole per ambedue i gruppi; in brodi zuccherati di solito non supera la settimana. Questo comportamento sembra da attribuirsi all'effetto dell'acidità, il che spiega perchè la resistenza dei bifidi è ancora minore di quella degli attinomiceti.

Il riscaldamento a 58°-60° uccide in mezz'ora ambedue i tipi.

PROPRIETÀ PATOGENE. — È nozione corrente che gli attinomiceti anaerobi sono sperimentalmente patogeni e possono riprodurre l'attinomicosi, mentre i bifidi sono del tutto avirulenti.

Nelle ricerche effettuate con i cinque suddetti bifidi e con i quattro suddetti attinomiceti (da lungo tempo adattati alla vita colturale) è invece risultato un comportamento del tutto analogo fra loro. Inoculando colture nella camera anteriore dell'occhio del coniglio, si è sviluppata una irite e spesso una pa-

noftalmite purulenta in tutto simile pei due gruppi microbici. Grani e cespugli attinomicetici non furono rilevati nè in seno agli essudati prodotti dagli attinomiceti, nè in seno a quelli prodotti dai bifidi; ma negli uni e negli altri furono osservate forme a corinebatterio che la retro coltura, effettuata dopo due mesi dall'inoculazione, dimostrò essere costituite dagli stipiti inoculati.

Pertanto la nozione corrente della assoluta mancanza di potere patogeno del b. bifido è inesatta, potendo esso produrre gravi lesioni oculari nel coniglio e potendo sopravvivere in esse almeno due mesi, con un comportamento assolutamente analogo a quello dimostrato dagli attinomiceti del tipo *Wolff-Israel*.

COMPORTAMENTO SIEROLOGICO. — Furono preparati, nel coniglio, antisieri per i cinque ceppi di bifido e pei quattro attinomiceti. Con questi antisieri si effettuarono reazioni agglutinanti, precipitanti e di deviazione, incrociate. La reazione che meglio corrispose fu la deviazione del complemento, la quale dimostrò anzitutto una eterogeneità sierologica tanto nel gruppo dei bifidi, quanto in quello degli attinomiceti. Infatti i cinque bifidi si dimostrarono tutti sierologicamente diversi l'uno dall'altro, mentre i quattro attinomiceti risultarono di tre gruppi sierologici diversi, essendosi avute reazioni incrociate solo fra i ceppi 3440 e 3561.

Ma ciò che destò grande interesse, fu il rilievo di un'identità sierologica fra gli attinomiceti 3440 e 3561 col bifido umano An, e di una debole reciprocità fra il 3440 ed il bifido Vitello 3.

CONCLUSIONI. — Le indagini di ordine morfologico, colturale, biologico e sierologico, hanno dimostrato tali analogie fra i bifidi e gli attinomiceti anaerobi presi in esame, da non permettere di stabilire un solo carattere sicuramente differenziale fra gli uni e gli altri. Le poco importanti diversità talora osservate, di ordine soprattutto quantitativo, possono rientrare nell'ordine delle comuni oscillazioni nell'ambito di una specie unica, particolarmente se si consideri che l'adattamento patogeno può determinare qualche modificazione dei caratteri prevalenti nello stato saprofitico.

Sembra pertanto legittimo di ammettere che gli attinomiceti anaerobi del tipo *Wolff-Israel* abbiano la loro derivazione dal b. bifido, e che i due microrganismi sieno da considerare come costituenti una sola specie.

Riguardo alla denominazione da adottare, non esitiamo a fare prevalere quella di *Actinobacterium Israeli* (Kruse 1896) Sanpietro 1908 su quella di *Bacterium bifidum* (Tissier 1901), sia perchè i caratteri di tali microrganismi escludono trattarsi di un *Bacterium* e consigliano ad includerli nel genere *Actinobacterium* Haass 1906 sensu Sanpietro 1908; sia perchè la denominazione specifica "*Israeli*", già adottata dal Kruse nel 1896 è anteriore a quella di "*bifidus*" proposta dal Tissier solo nel 1901.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 1° marzo 1936 Anno (XIV)

Presidenza del prof. F. MILLOSEVICH.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Astronomia (Cosmogonia). — *Un'erronea obiezione contro l'ipotesi cosmogonica di Laplace.* Nota ⁽¹⁾ del Socio G. ARMEL-LINI.

1. Scopo di questa Nota è di correggere un errore algoritmico – di notevolissima importanza per le sue conseguenze e rimasto fin qui inavvertito – in cui è caduto il Poincaré nel suo Trattato « *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques* », esaminando l'ipotesi cosmogonica di Laplace. Una volta corretto un tale errore, l'ipotesi di Laplace acquista un nuovo vigore, giacchè viene senz'altro eliminata la maggiore obiezione matematica che poteva sollevarsi contro di essa. D'altra parte alcune pagine seguenti del citato libro di Poincaré, pure essendo matematicamente ammirabili, divengono – dopo corretto questo errore algoritmico – prive di significato astronomico, poichè è perfettamente inutile difendere l'ipotesi laplaciana da una difficoltà che *non* esiste. Ciò premesso, veniamo all'argomento.

2. Come è notissimo, secondo l'ipotesi cosmogonica di Laplace, il nostro sistema planetario ebbe origine da una piccola nebulosa ellissoidica ruotante. Condensandosi la nebula, aumentava la sua velocità angolare di rotazione e quindi il suo schiacciamento, fino a che – secondo Laplace – le regioni del bordo equatoriale si separarono dal corpo centrale dando origine ad un *anello*. Continuando un tale processo, la nebula si trasformò in un

(1) Presentata nella seduta del 1° marzo 1936.

nucleo centrale (Sole) circondato da numerosi anelli — posti, presso a poco, nello stesso piano e ruotanti tutti nello stesso senso — ognuno dei quali ha dato poi origine ad un pianeta.

Ora, se chiamiamo con ρ la densità di un anello fluido qualsiasi, supposto omogeneo, con ω la sua velocità angolare di rotazione e con f il coefficiente attrattivo, sappiamo che affinché l'anello possa formarsi deve essere verificata la nota ineguaglianza, scoperta dallo stesso Poincaré:

$$(1) \quad \rho - \frac{\omega^2}{2\pi f} \geq 0.$$

In altre parole, indicando con ρ_m il minimo valore possibile della densità dell'anello, abbiamo:

$$(2) \quad \rho_m = \frac{\omega^2}{2\pi f}.$$

3. Ora Poincaré ragiona nel modo seguente. Egli considera anzitutto il primo anello della nebulosa e suppone che esso corrisponda al pianeta *Nettuno*; in proposito osserviamo subito che tale ipotesi può presumibilmente mantenersi anche oggi, giacché il nuovo pianeta ultranettuniano *Plutone*, per la sua debole massa e le piccole dimensioni, sembra essere un antico satellite di *Nettuno* sfuggito all'attrazione di *Nettuno* stesso ⁽¹⁾. Ciò posto ⁽²⁾ — per riferire le sue precise parole — Poincaré dichiara (op. cit., p. 23) che « *lorsq'on prend pour ω la vitesse angulaire de Neptune, on trouve pour ρ_m un chiffre tellement grande que, d'après ce chiffre, la masse totale de la nébuleuse serait très supérieure à celle du Soleil* ».

Osserviamo che, se questa affermazione fosse vera, le conseguenze sarebbero gravissime obbligandoci a rinunciare senz'altro all'ipotesi di Laplace, almeno nella sua forma ordinaria. Infatti — poichè non si può logicamente ammettere che tanta materia sia andata distrutta — converrebbe supporre che la densità ρ dell'antica nebula sia stata molto inferiore al limite minimo fissato dalla (2), onde l'anello *non* si sarebbe potuto formare. Ed infatti il Poincaré, volendo difendere per quanto è possibile l'ipotesi cosmogonica laplaciana, si trova costretto a modificarla sostanzialmente, supponendo che l'antica nebula sia stata non *gassosa*, ma *pulvirulenta*. Nascono allora gravi inconvenienti, tra cui principalissimo quello della rotazione *retrograda* dei pianeti, giacchè le parti esterne di un anello pulvirulento (ad es. quello di *Saturno*) ruotano meno velocemente delle parti interne; difficoltà che il Poincaré cerca di superare nelle pagine seguenti del libro citato, con considerazioni matematiche tanto eleganti, quanto forse artificiose.

(1) Aggiungiamo che una parte dell'orbita di *Plutone* è interna all'orbita di *Nettuno*.

(2) Cfr. H. POINCARÉ, *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*. (Deux. edit. Paris, Hermann, 1913), p. 23.

4. Se non che, è facile vedere — ciò che ancora non era stato messo in luce — che il Poincaré è stato vittima di un *errore* ⁽¹⁾ nel calcolo numerico.

Per dimostrarlo, indichiamo con T la durata di rivoluzione di Nettuno ($T = 164$ anni e 280 giorni); abbiamo allora:

$$(3) \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

onde la (2) diviene:

$$(4) \quad \rho_m = \frac{2\pi}{T^2 f}$$

Ciò posto, scegliamo per semplicità come unità di misura quelle del sistema *centimetro-grammo-secondo*. Avremo allora nel sistema C. G. S.

$$(5) \quad f = 6,673 \cdot 10^{-8}$$

mentre si ha:

$$(6) \quad T = 164^a 280^d = 5,197 \cdot 10^9 \text{ secondi.}$$

La (4) ci dà allora come densità minima dell'anello nettuniano, nel sistema C. G. S.:

$$(7) \quad \rho_m = 3,486 \cdot 10^{-12}.$$

5. Esaminiamo ora quale sarebbe stata la massa totale dell'antica nebulosa presolare supponendo, col Poincaré, che la sua densità fosse stata eguale alla minima possibile ρ_m . Supponendo la nebulosa ellissoidica rotonda, con semiasse equatoriale eguale ad a e semiasse polare eguale a b , il suo volume V sarà ovviamente:

$$(8) \quad V = \frac{4\pi}{3} a^2 b.$$

Ora a era evidentemente eguale alla distanza attuale di Nettuno dal Sole e cioè a 30,11 unità astronomiche e cioè a $4,494 \cdot 10^9$ chilometri, ossia a $4,494 \cdot 10^{14}$ centimetri. Supponendo — come generalmente avviene nelle nebulose ellissoidiche — che il semiasse polare b sia stato eguale a circa $2/3$ di quello equatoriale a , il volume V della nebula, espresso in centimetri cubici, sarà allora per la (8):

$$(9) \quad V = \frac{8\pi}{9} (4,494)^3 \cdot 10^{42} = 2,533 \cdot 10^{44}.$$

(1) È difficile dire come sia avvenuto un tale errore, giacché il Poincaré dà solo le conclusioni senza riportare il calcolo numerico. Come molti matematici, egli pone il coefficiente attrattivo f eguale all'unità, ciò che è perfettamente lecito purchè però si assumano opportunamente le unità di misura. Forse l'insigne scienziato non tenne presente questa circostanza, o forse fece eseguire il calcolo da altri senza curarsi di controllarlo.

Moltiplicando questo valore di V per il valore di ρ_m dato dalla (7), si ha allora come minimo possibile della massa μ della antica nebulosa presolare:

$$(11) \quad \mu = 0,883 \cdot 10^{33} \text{ grammi.}$$

Ora, come è notissimo dall'Astronomia, la massa S del Sole è:

$$(11) \quad S = 1,98 \cdot 10^{33} \text{ grammi.}$$

Paragonando la (10) con la (11) vediamo quindi che la massa minima della nebulosa presolare, non solo non sarebbe stata « très supérieure » alla massa attuale del Sole come credeva Poincaré, ma invece *inferiore* ad essa di oltre metà. Osserviamo anzi che noi ci siamo messi nel caso più sfavorevole supponendo il semiasse minore della nebula eguale ai $2/3$ del maggiore; se si suppone la nebula assai più schiacciata (e vi sono esempi astronomici in cui il rapporto dei semiassi è di circa $1:10$), si trova che il minimo valore ammissibile per la massa della nebulosa presolare sarebbe circa *venti o trenta volte inferiore* a quello della massa dell'attuale sistema planetario. In conseguenza, volendo che l'antica massa sia stata poco diversa dall'attuale, si può prendere per ρ un valore anche *notevolmente superiore* a quello richiesto dalla (2) per l'esistenza dell'anello nettuniano. Anzi crediamo che l'incremento di ρ dalle regioni periferiche alle regioni interne della nebula possa stabilirsi in modo da conservare inalterato il momento della quantità di moto; ma su questo punto, su cui esistono schemi di calcolo non molto sicuri, torneremo forse altra volta.

Concludendo, non pretendiamo con questa Nota di aver completamente restaurato l'antica ipotesi cosmogonica di Laplace, giacchè ben sappiamo quante difficoltà possano elevarsi contro di essa. Diciamo solo che *la principale obiezione* — quella derivante dalla teoria matematica delle figure di equilibrio e cioè dalla ineguaglianza (1) — *è ora completamente superata.*

Terminando osserviamo che la nostra dimostrazione si sarebbe anche potuta ottenere per altra via, prendendo per base la terza legge kepleriana che lega il moto medio e la distanza media di Nettuno con la massa del Sole. Ma — per eliminare più lucidamente ogni obiezione — abbiamo preferito eseguire senza altro il calcolo numerico.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Funzioni di composizione di 2^a specie, funzioni di matrici infinite.* Nota di G. ANDREOLI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio R. MARCOLONGO.

1. In alcune Note lincee ⁽²⁾ ed in una Memoria ⁽³⁾ ho collegato il concetto di composizione di seconda specie del Volterra a quello di funzioni di matrici.

Si può dire che, nel caso di nuclei di Goursat e (corrispondentemente) nel caso di matrici di ordine finito, vi sia una strettissima relazione fra i due procedimenti.

Ad ogni problema sulle funzioni di composizione di nuclei di Goursat corrisponde un problema analogo (e, in simboli, identico) sulle funzioni di matrici.

La legittimità di sviluppi, soluzioni ecc., per uno dei casi implica la legittimità analoga per l'altro.

Notiamo incidentalmente che questo fatto elimina la possibilità di critiche o di dubbi relativi alla sostanza della sovracitata Memoria ⁽⁴⁾.

(1) Nella seduta del 1^o marzo 1936.

(2) Cfr. G. ANDREOLI, *Sulla risoluzione di certe equazioni di composizione ecc.* « Rend. R. Acc. Linc. », vol. XXV, ser. 5^a, 2^o sem. 1916. (Nota I e Nota II); *Id.*, *Sovra certe equazioni di composizione ecc.* « Rend. R. Acc. Linc. », vol. XXVI, ser. 5^a, 1^o sem. 1917.

(3) Cfr. G. ANDREOLI, *Sulle funzioni di composizione di matrici.* « Atti R. Acc. Sc. Napoli », vol. XX, ser. II, n. 10, 1934.

(4) Devo ringraziare il prof. G. Scorza che ha richiamato l'attenzione sulla mia Memoria sovracitata (Cfr. G. SCORZA, *Sulle varietà di Veronese.* « Rend. R. Acc. Linc. », vol. XXII, ser. 6^a, fasc. 5-6, p. 181; Roma, 1935). Vorrei rilevare che fra il mio punto di vista e quello del prof. Spampinato esiste molto divario come concezioni fondamentali; ed essi non si possono confrontare. In quanto agli appunti del prof. G. Scorza (suppongo di rivolgermi ad un lettore che abbia sotto occhi la Nota citata) essi non interessano la sostanza, lo scopo, la concezione della Memoria. Per il primo appunto che ivi si trova, è bene rilevare che dovrei essere, al più, accusato di pleonasmo; dire che « $V(X_1)$ sta in $V(X)$ » e successivamente dire che « $V(X_1)$ avrà certamente una parte in comune con $V(X)$ » non è contraddittorio in alcun modo; è semplicemente superflua la seconda affermazione. Rispetto al secondo appunto si completi pure con un « generico » e tutto ritornerà a posto. Rispetto al terzo, sono d'accordo che matrici rispondenti a punti di spazi fondamentali diversi non debbano di necessità essere permutabili fra loro, e con ciò? Infine, per l'ultimo appunto si tratta di chiarire e di voler intendere il senso delle

Si pone ora esplicito il problema:

È lecito affermare ed utilizzare tale corrispondenza fra matrici infinite e nuclei non di Goursat?

2. Vedremo, in questa Nota, che già in un caso particolare questa corrispondenza viene a mancare nel passaggio all'infinito; che una teoria delle

due parole «in quanto». Ho detto «... in quanto due di esse permutabili ad una terza sono permutabili fra loro...». Invece di «sono» dovrebbe dirsi «siano».

Che tutto ciò vada interpretato come dico, basta a farlo vedere il procedimento che ho seguito, e tutte le precedenti Note.

Così per le matrici di terzo ordine, limitandomi al caso di quelle ad elementi nulli al disopra della diagonale principale vi sono da considerare nello spazio a sei dimensioni, quello cioè delle matrici:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ f & e & c \end{vmatrix},$$

quelli a tre dimensioni, delle matrici:

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_4 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_5 & x_2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ x_6 & 0 & x_1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_4 & x_1 & 0 \\ x_6 & x_4 & x_1 \end{vmatrix}$$

ottenute ponendo per la prima: $d=e=f=0$; $a \neq b \neq c$; per la seconda: $a \neq b \neq c$; $e=f=0$; per la terza: $b=c$; $d=f=0$; per la quarta: $a=c$; $d=e=0$; per la quinta: $a=b=c$; $d=e$.

Gli elementi di passaggio da un tipo all'altro (ad esempio dal I al II) si hanno

allorchè nella I, $x_1 = x_2$ e nella II, $x_4 = 0$; cioè tali elementi sono della forma

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{vmatrix}$$

e per essi si presenta tutto quanto è detto rispetto al prolungamento; e così per gli altri elementi di passaggio.

Quello che avrei desiderato far rilevare è precisamente questo fatto che «giungendo» ad una certa matrice che appartiene all'uno ed all'altro dei due spazi bisogna fissare il modo di ripartirne; ed ho appunto indicato l'esempio del Cipolla, in relazione a ciò.

Nel caso di matrici di secondo ordine, l'affermazione conduce a:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

avendosi $0 \beta = 0$ se $\alpha \neq \gamma$, o $\alpha = \gamma$ se $\beta \neq 0$ cioè nell' S_3 (α, β, γ) due piani aventi a comune la retta $\alpha = \gamma, \beta = 0$ come elemento di passaggio.

Del resto, ripeto, le basi della Memoria risalgono alle Note qui con essa citate, Note che possono chiarire questi ed analoghi dubbi (ove si presentassero).

funzioni di matrici dà risultati non validi per i nuclei; e che a seconda dell'interpretazione dell'operazione di composizione sorgono limitazioni diverse, dovute a fatti di convergenza.

Si può dire che: *mentre la teoria delle funzioni di matrici si collega strettamente ad un nostro punto di vista sul prolungamento analitico complessivo dei rami di una funzione analitica* (esposto in una Nota ⁽¹⁾), *quella delle funzioni di composizione, legata alla composizione stessa, fa perdere significato effettivo a certi simboli, in alcuni casi, e vale solo fino ad un certo punto.*

Cosa fondamentale segnalata dal Volterra, a proposito dell'Unità di composizione, nella sua classica Memoria Lincea: *Potenze e logaritmi di composizione.*

Gli esempi che sceglieremo per le funzioni di composizione saranno: primo, quelli dei nuclei di Evans ⁽²⁾ (nuclei periodici, funzioni del binomio $x-y$, a periodo 1); secondo, quello della composizione di Hadamard-Pincherle per le serie di potenze, consistente nel dedurre da $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$, la serie $\sum a_n b_n x^n$.

In quanto alle funzioni di matrici considereremo soltanto matrici diagonali infinite, e matrici diagonali infinite funzioni di matrici diagonali infinite.

Specializzando ulteriormente sottoclassi di queste, dove ci occorrerà.

3. Consideriamo dunque dapprima una matrice infinita diagonale (tutti nulli gli elementi, salvo quelli della diagonale principale) segnata per brevità:

$$X \equiv (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

e siano le x variabili complesse ordinarie; ed analogamente sia:

$$Y \equiv (y_1, y_2, y_3, \dots)$$

un'altra matrice dello stesso tipo, sua funzione isogena (o di composizione). Cioè sia:

$$Y = f(X)$$

il che vale dire, secondo la citata memoria, e per ovvia estensione:

$$y_r = f(x_r) \quad (r = 1, 2, \dots)$$

(1) Cfr. G. ANDREOLI, *Sul concetto di gruppo di monodromia per le funzioni ecc.* «Rendiconti R. Acc. Linc.», vol. XXIV, ser. 5^a, 2° sem., 1915.

(2) Cfr. G. ANDREOLI, *Sui nuclei periodici di Evans ecc.* (Note I e II). «Rendiconti R. Acc. Linc.», vol. XXV, ser. 5^a, 2° sem., 1916.

f essendo funzione monogena, analitica. Si vede che $A \cdot B = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots)$
 $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$.

Se f non è monodroma, allora, mentre X percorre un cammino chiuso ritornando da un punto allo stesso punto, le determinazioni di f si permuteranno fra loro attorno ad ogni eventuale x_r . Si ritorna dunque in X con un'altra determinazione di Y ; si presenteranno come elementi di diramazione quelli ottenuti fissando tutte le x e facendone muovere una sola.

Le determinazioni di Y formeranno un insieme non numerabile, in generale.

4. Gli sviluppi in serie saranno fattibili a partire da X , purchè nessuno degli sviluppi, per ogni x_r , incontri un punto di singolarità; ed è perciò che ci troveremo in presenza di un concetto analogo a quello di prosecuzione analitica complessiva. Vi saranno perciò dei punti X *regolari* (raggi di convergenza maggiori di una quantità non nulla); punti X *singolari* (se un qualche x_r lo è per $f(\xi)$); punti X *quasi singolari*, se nessun x_r è punto singolare, ma il limite inferiore dei raggi di convergenza è nullo.

Si osservi che se un punto X è singolare, ciò si deve alla presenza di *almeno* una sola coordinata x_r punto singolare per $f(\xi)$: quindi se X si muove lasciando invariata quella coordinata, si presenta tutta una varietà di singolarità. Se X è quasi-singolare invece deve esistere almeno una successione parziale di x_r godenti della proprietà che il limite inferiore del raggio di convergenza in essa è lo zero: si può dunque modificare un numero finito di essi, oltre tutti gli altri che fanno parte della successione: anche qui si hanno varietà di quasi-singolarità.

5. Nello spazio delle X , specializziamo la variabilità di X , convenendo, ad esempio, che una certa successione di x_r sia di valori tutti eguali fra loro; un'altra ancora, tutti eguali fra loro e diversa dalle precedenti e così via. Analoga e corrispondente limitazione poniamo per le Y : sicchè alle x con certi indici formanti una di quelle successioni, corrispondano le y con gli stessi indici, anch'esse tutte eguali fra loro.

Così se *tutte* le x sono eguali si ha:

$$X \equiv (x, x, x, \dots)$$

$$Y \equiv (y, y, y, \dots)$$

ed allora $Y = f(X)$, significa $y = f(x)$, tutte con la stessa determinazione

Analogamente sia, ancora per esempio,

$$X \equiv (x_1, x_2, x_1, x_2, \dots)$$

$$Y \equiv (y_1, y_2, y_1, y_2, \dots)$$

sarà $Y = f(X)$ equivalente a porre $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ...

È sin troppo evidente che un particolare valore di X può essere comune a due o più di queste sottovarietà, ed allora giunti in tale punto X si presenta necessario, prima di ripartire, fissare su quale delle sottovarietà si prosegue: così come accadeva per le matrici finite.

Si ha così un esempio di quello che è la linea direttiva di tutta la citata Memoria.

6. Interpretiamo ora la X come successione dei coefficienti di Fourier di una funzione periodica (in serie trigonometrica) a periodo 1: e per comodità sia:

$$\Phi(\xi) = \sum x_r e^{2\pi i r \xi}$$

Si osserverà che interpretando le F, G come nuclei di Evans è precisamente:

$$F^{**} \cdot G^{**} = \sum x'_r x''_r e^{2\pi i r \pi(x-y)}$$

se

$$F = \sum x'_r e^{2\pi i r \pi(x-y)} \quad ; \quad G = \sum x''_r e^{2\pi i r \pi(\lambda-y)} \quad ;$$

$$F^{**} G^{**} = \int_0^1 F(x-s) G(s-y) ds$$

Formalmente dunque, le leggi di composizione dei nuclei di Evans sono quelle delle matrici ora considerate; ma per aver significato effettivo una matrice diagonale, nel passaggio ai nuclei anzidetti deve essere convergente la $\sum x_r^2$; dunque l'analogia *non* è completa.

Se invece X si interpreta come successione dei coefficienti di una serie di Taylor attorno all'origine, e sia:

$$\Psi(\xi) = \sum x_r \xi^r,$$

nella composizione secondo Hadamard-Pincherle, si avrà precisamente:

$$F \equiv \sum x'_r \xi^r \quad ; \quad G = \sum x''_r \xi^r \quad ; \quad F \overset{\circ}{G} = \sum x'_r x''_r \xi^r$$

e l'interpretazione resta vincolata alla condizione di avere soltanto elementi che diano raggio di convergenza non nullo, cioè a

$$\liminf. \sqrt[n]{|x_n|} = \text{quantità finita.}$$

Dunque anche qui cessa l'analogia completa, in quanto si presenta questa limitazione riguardante un comportamento limite e quindi una questione di convergenza.

Fra i due esempi ora indicati, il primo *non* ha fra gli elementi effettivi, l'unità di composizione I , in quanto questa sarebbe rappresentata dalla serie:

$$I = \sum e^{i\pi(x-y)} \quad 0 \leq x, y \leq 1$$

che diverge e che quindi non ha significato concreto.

Il secondo invece possiede tale unità, perchè essa è rappresentata dalla serie:

$$\frac{I}{1-\xi} = 1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \dots$$

7. Concludendo questi brevissimi cenni, si vede che si può affermare:

I) La teoria delle funzioni di matrici (nel senso da noi dato di composizione o di funzioni isogene) infinite, vale parallelamente a quella delle matrici finite: sola limitazione è quella dovuta alle quistioni di convergenza relative al prodotto, quistioni che non si presentano per le matrici diagonali qui indicate.

II) La teoria delle funzioni di composizioni per certe classi di nuclei non di Goursat o per certe operazioni di composizione si svolge subordinatamente a quella delle matrici: occorre tener presente le condizioni di convergenza che si presentano nella interpretazione; tali quistioni fanno volta a volta assumere a certi simboli significato concreto o puramente simbolico (nel senso sviluppato dal Volterra).

Matematica. — *Sulla rappresentazione conforme delle superficie.* Nota di R. CACCIOPPOLI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. SCORZA.

In questa Nota dimostro un teorema generale (estensione del teorema noto di Osgood-Carathéodory) sulla corrispondenza tra le frontiere nelle rappresentazioni conformi delle superficie. Il procedimento che seguo consiste nella costruzione di una rappresentazione *quasi-conforme* come limite di rappresentazioni conformi, nel senso ordinario, di superficie d'approssimazione ovunque regolari⁽²⁾; sotto opportune condizioni (da cui non si può prescindere completamente) provo il carattere biunivoco della rappresentazione ottenuta, la quale si rivela poi conforme per ogni regione di regolarità della superficie data.

Otengo così contemporaneamente anche dei risultati più generali (che includono, p. es., quelli relativi alle superficie poliedriche) sulla rappresentazione delle superficie singolari non solo al contorno, ma pure lungo linee e in punti interni isolati. Ed è in vista di questi risultati che ricorro fin dal principio al passaggio al limite; poichè per dimostrare solo il primo teorema basterebbe partire dalla rappresentazione conforme dell'*interno* della superficie, provarne la continuità alla frontiera semplificando le considerazioni del n. 1, e stabilire poi l'invertibilità col ragionamento del n. 2.

1. Consideriamo una superficie S aperta, semplicemente connessa e internamente regolare, cioè rappresentata dalle equazioni

$$(1) \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

dove (u, v) varia in un dominio D limitato da una curva di Jordan, un cerchio per fissare le idee, e le funzioni x, y, z hanno derivate seconde continue⁽³⁾ internamente a D (cioè in corrispondenza dei punti *interni* di S), risultando ivi inoltre, con le notazioni consuete, $EG - F^2 > 0$; supponiamo che le (1) facciano corrispondere punti distinti a punti distinti di D , cioè che S sia a punti semplici, e che l'area $\iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv$ di S sia finita.

(1) Nella seduta del 1° marzo 1936.

(2) Tale costruzione può effettuarsi per superficie assai più generali di quelle qui considerate. Cfr. la mia Nota, *Rappresentazione conforme e superficie quadrabili*, in questi « Rendiconti », 2° sem. 1935.

(3) Basterebbe, ad assicurare la possibilità di rappresentazioni conformi « in piccolo », che le derivate prime verificassero una condizione di Hölder. Cfr. anche per altri risultati che ci occorreranno in seguito, LICHTENSTEIN, « Enzykl. der Math. Wiss. », II C 3.

Prendiamo una successione di superficie, S_1, S_2, S_3, \dots , di equazioni

$$x = x_n(u, v), \quad y = y_n(u, v), \quad z = z_n(u, v)$$

tendenti ad S , sicchè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(u, v) = x(u, v), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(u, v) = y(u, v), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n(u, v) = z(u, v)$$

uniformemente in D , regolari anche al contorno cioè per (u, v) sulla circonferenza C di D , o addirittura analitiche, e inoltre tali che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_D \sqrt{E_n G_n - F_n^2} du dv = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Cambiamo la rappresentazione di S_n , sostituendola con una rappresentazione conforme su D ,

$$(2) \quad x = \varphi_n(u, v), \quad y = \psi_n(u, v), \quad z = \chi_n(u, v)^{(1)}$$

individuata dai corrispondenti Q_{n1}, Q_{n2}, Q_{n3} di tre punti fissi P_1, P_2, P_3 di C ; Q_{n1}, Q_{n2}, Q_{n3} tendendo per $n \rightarrow \infty$ a tre punti distinti del contorno Γ di S .

Si vede facilmente che le funzioni $\varphi_n, \psi_n, \chi_n$ risultano uniformemente continue: perchè altrimenti si potrebbero trovare una lunghezza fissa $l > 0$ e per ogni σ due punti A, B in D , a distanza $< \sigma$, e un indice n tali che a qualunque curva di D , chiusa o terminante al contorno, e racchiudente AB , le (2) facessero corrispondere su S_n una curva di lunghezza $> l$. Allora una corona circolare T di raggi σ e $\sqrt{\sigma}$, la cui circonferenza interna racchiudesse AB , o la porzione interna a D di una corona siffatta, dovrebbe avere per corrispondente su S_n una regione di area $> -\frac{l^2}{4\pi} \log \sigma$, dunque grande a piacere; ciò in conseguenza del fatto che ad ogni circonferenza concentrica di T corrisponde una curva di lunghezza $> l^{(2)}$.

Potremo ottenere così come limite una rappresentazione

$$(3) \quad x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

(1) Questa risulta notoriamente regolare anche al contorno.

(2) Infatti si avrebbe, prendendo coordinate polari col polo nel centro di T , e indicando con μ il rapporto fra elementi lineari corrispondenti in S_n e in D

$$\iint_T \mu^2 du dv \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\sqrt{\sigma}} \rho d\rho \left[\int_0^{2\pi} \mu d\theta \right]^2 > -\frac{l^2}{4\pi} \log \sigma.$$

di S , dove le funzioni φ, ψ, χ avranno derivate di quadrato sommabile⁽¹⁾. Si avrà inoltre quasi ovunque in D

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)^2,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial u} \frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\chi}{\partial u} \frac{\partial\chi}{\partial v} = 0;$$

invero gli integrali

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial v}\right)^2 \right] du dv, \quad \iint_D \left[\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_n}{\partial v}\right)^2 \right] du dv,$$

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial\chi_n}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi_n}{\partial v}\right)^2 \right] du dv,$$

la cui semisomma è l'area di S_n , tendono per $n \rightarrow \infty$ ai minimi limiti compatibili con le condizioni $\varphi_n \rightarrow \varphi, \psi_n \rightarrow \psi, \chi_n \rightarrow \chi$ (tendendo l'area di S_n a quella di S), di modo che le derivate di $\varphi_n, \psi_n, \chi_n$ tendono in media alle derivate corrispondenti delle funzioni limiti.

La rappresentazione (3) di S è una rappresentazione *quasi-conforme*. Non possiamo per ora asserire nemmeno che essa sia biunivoca: possiamo solo dire che un punto di S deve corrispondere o ad un unico punto di D o ad un intero *continuo*.

2. Consideriamo un punto Q di S , che supponiamo corrispondere a più punti di D , e diciamo Σ_Q la superficie sferica di centro Q e raggio ρ . Facciamo variare ρ fra due limiti convenientemente piccoli ρ_1 e ρ_2 ($\rho_1 > \rho_2$): allora, se n è abbastanza grande, l'intersezione $\gamma_Q^{(n)}$ di S_n e Σ_Q conterà (si possono supporre ora, per semplicità, le S_n analitiche) di un numero finito di curve regolari, delle quali diremo $s_n(\rho)$ la lunghezza complessiva. Per l'ipotesi fatta che Q corrisponda a più punti di D , potremo assegnare un limite inferiore positivo l alla lunghezza complessiva delle curve di D cui corrisponde $\gamma_Q^{(n)}$ su S_n ⁽²⁾. Ora, se $M_n(\rho_1, \rho_2)$ è l'area della porzione di D cui corrispondono punti di S_n compresi fra Σ_{Q_1} e Σ_{Q_2} , si trova facilmente, indicando con μ_n il rapporto fra un elemento lineare generico in D ed il corrispondente su S_n ,

(1) E saranno assolutamente continue in u per quasi tutti i valori di v , e viceversa.

(2) Infatti, se n è abbastanza grande, una di queste curve deve racchiudere (eventualmente col concorso di una parte di C) il continuo corrispondente a Q .

$$M_n(\rho_1, \rho_2) \cong \int_{Q_2}^{\rho_1} d\rho \int_{v_Q^{(n)}} \mu_n^2 ds \cong \int_{Q_2}^{\rho_1} d\rho \frac{I}{s_n(\rho)} \left[\int_{v_Q^{(n)}} \mu_n ds \right]^2 \cong \\ \cong I^2 \int_{Q_2}^{\rho_1} \frac{d\rho}{s_n(\rho)} \cong I^2 \frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{\int_{Q_2}^{\rho_1} s_n(\rho) d\rho}.$$

Osservando poi che l'area $A_n(\rho_1, \rho_2)$ della porzione di S_n racchiusa fra Σ_{Q_1} e Σ_{Q_2} verifica la diseuguaglianza

$$A_n(\rho_1, \rho_2) \cong \int_{Q_2}^{\rho_1} s_n(\rho) d\rho,$$

e facendo crescere indefinitamente n , si ottiene

$$M(\rho_1, \rho_2) \cong I^2 \frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{A(\rho_1, \rho_2)}$$

essendo $M(\rho_1, \rho_2)$, $A(\rho_1, \rho_2)$ definite per S come $M_n(\rho_1, \rho_2)$, $A_n(\rho_1, \rho_2)$ per S_n . E si deduce di qui che se $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$ è una qualunque successione decrescente, la serie

$$\frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{A(\rho_1, \rho_2)} + \frac{(\rho_3 - \rho_4)^2}{A(\rho_3, \rho_4)} + \dots$$

deve convergere.

Si scorge subito un'ipotesi semplicissima incompatibile con quest'ultima circostanza, e però valevole ad assicurare la biunivocità della corrispondenza (3).

Quest'ipotesi è che il rapporto $\frac{A(\rho)}{\rho^2}$ fra l'area della porzione di S racchiusa da una sfera di centro Q e il quadrato del raggio ρ di questa ammetta un limite superiore finito; se ciò ha luogo per ogni punto Q di S diremo che la superficie è omogenea, intendendo esprimere così che essa non presenta punti di addensamento dell'area. Nel nostro caso l'omogeneità andrà postulata soltanto per i punti del contorno, poichè per i punti interni è ovvia conseguenza della regolarità.

3. Dobbiamo ora dimostrare che la rappresentazione (3) è conforme nei punti interni. Osserviamo all'uopo che, sotto le nostre ipotesi di regolarità, una porzione interna sufficientemente piccola di S può rappresentarsi conformemente sopra un piano $u'v'$. I nuovi parametri risulteranno funzioni degli antichi, u e v , assolutamente continue in u come in v , per quasi tutti i valori di v e di u rispettivamente, e con derivate di quadrato sommabile.

Dippiù esprimendo che la rappresentazione (3) è quasi-conforme, si trovano le eguaglianze

$$\frac{\partial u'}{\partial u} = \pm \frac{\partial v'}{\partial v} \quad , \quad \frac{\partial u'}{\partial v} = \mp \frac{\partial v'}{\partial u}$$

quasi ovunque verificate. Queste circostanze implicano notoriamente che la corrispondenza tra uv e $u'v'$ sia conforme: ne segue che è conforme anche la corrispondenza tra S e D (e che le funzioni φ, ψ, χ sono regolari internamente a D).

Possiamo enunciare ora il nostro teorema:

Una superficie immagine topologica di un cerchio, omogenea (e però quadrabile) e internamente regolare, può porsi con un cerchio in corrispondenza biunivoca, continua, e conforme nei punti interni.

La corrispondenza sarà individuata da tre condizioni dei soliti tipi. E manifestamente, il teorema di Osgood-Carathéodory è un corollario del precedente ⁽¹⁾.

Se lasciamo cadere l'ipotesi della omogeneità (supponendo però sempre la quadrabilità) potremo affermare che nella rappresentazione conforme ogni punto della superficie corrisponde ad un unico punto del cerchio, *tranne al più un'infinità numerabile di punti del contorno, che corrispondono ognuno ad un arco della circonferenza* ⁽²⁾.

4. Non è indispensabile che S sia a punti semplici. Per le deduzioni del n. 1 occorre essenzialmente che S sia priva di *strozzature*, che cioè se x, y, z non sono costanti in un campo di D , non siano tali nemmeno sulla frontiera; e nemmeno, se questa ha una parte comune con C , sulla parte residua ⁽³⁾. Ora queste condizioni sono verificate come conseguenza dell'ipotesi di regolarità $EG - F^2 > 0$.

Naturalmente, se S non è a punti semplici, si riguarderanno come *distinti* punti corrispondenti a punti distinti in D (o meglio a continui distinti, questi ultimi potendo presentarsi solo su C).

(1) Se ne ottiene, particularizzando la nostra, una dimostrazione sostanzialmente dovuta a COURANT.

(2) A questo proposito osserviamo che al n. 1 è stato provato che le lunghezze delle curve corrispondenti alle circonferenze concentriche della corona T non possono ammettere un limite inferiore positivo. Ne segue facilmente che una superficie di area finita, e tale che in prossimità di un certo punto Q del suo contorno le lunghezze delle curve congiungenti due punti del contorno da parti opposte di Q siano inferiormente limitate da una quantità positiva, non potrà rappresentarsi conformemente con corrispondenza biunivoca dei contorni. Un esempio di una siffatta superficie sarà prossimamente indicato da G. SCORZA DRAGONI.

(3) Si può dire che da S si esige l'*omogeneità* anche nel senso topologico.

Se più generalmente consideriamo una superficie S decomponibile mediante curve rettificabili in un numero finito di porzioni omogenee internamente regolari, tutti i nostri procedimenti resteranno applicabili purchè S sia priva di strozzature: la rappresentazione ottenuta sarà conforme internamente ad ogni regione di regolarità. S si dirà *generalmente regolare*, la supposta rettificabilità della curve di decomposizione servendo ad assicurare che queste recano all'area contributo nullo. Possiamo quindi generalizzare come segue il teorema precedente:

Una superficie immagine continua di un cerchio, priva di strozzature, omogenea e generalmente regolare, si può rappresentare su un cerchio in maniera biunivoca, continua, e conforme internamente ad ogni regione di regolarità.

Altrettanto potrà dirsi della rappresentazione su una sfera di una superficie semplicemente connessa chiusa, cioè immagine continua di una sfera. Basterà ripetere le precedenti deduzioni, partendo dalla rappresentazione conforme, individuata dai corrispondenti di tre punti, di una superficie regolare, chiusa e semplicemente connessa, sopra una sfera.

Le superficie generalmente regolari potranno presentare spigoli, angoloidi, punte ecc. Per uno spigolo in cui concorranno due porzioni analitiche della superficie (in particolare nel caso di un poliedro) le note proprietà della rappresentazione si dimostreranno ricorrendo ancora al ragionamento del n. 3.

Matematica. — *Sopra un problema di navigazione di Zermelo*⁽¹⁾. Nota di B. MANIÀ, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. L. TONELLI.

1. Lo Zermelo ha posto il seguente problema: *In un piano illimitato, nel quale la distribuzione del vento è data per mezzo di un campo vettoriale funzione del punto e del tempo, un aereo piano si muove con velocità costante rispetto all'aria. Come deve essere diretto l'aereo piano per giungere nel più breve tempo possibile da un punto A a un punto B fissati?*⁽³⁾.

Lo Zermelo ha determinato le equazioni differenziali del problema con un metodo diretto, ed ha studiato il campo delle estremali seguendo i procedimenti di Weierstrass. Inoltre ha considerato anche il caso del moto in uno spazio a tre dimensioni.

Il problema è stato ripreso dal Levi-Civita⁽⁴⁾, il quale lo ha trattato

(1) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(2) Nella seduta del 1° marzo 1936.

(3) *Ueber die Navigation in der Luft als Problem der Variationsrechnung*. «Jahresb. d. Deutschen Math. Ver.», Bd. 39, 1930, pp. 44-48; e *Ueber das Navigationsproblem bei ruhender oder veränderlicher Windverteilung*. «Zeitsch. für ang. Math. u. Mech.», Bb. XI, 1931, pp. 114-124.

(4) *Ueber Zermelos Luftfahrproblem*. «Ibid.», pp. 314-322.

ponendolo nella forma di un problema di Mayer e determinandone le equazioni differenziali col metodo dei moltiplicatori di Lagrange. I risultati del Levi-Civita si riferiscono a uno spazio a un numero qualunque di dimensioni.

Il v. Mises ⁽¹⁾ ha dato poi una trattazione grafica del problema nell'ipotesi che la velocità del vento sia indipendente dal tempo, ed ha messo in evidenza le analogie fra il problema di Zermelo e il principio di Fermat dell'ottica.

Il procedimento del Levi-Civita è stato esteso da De Mira Fernandes ⁽²⁾ in una Nota lineare al caso che la velocità dell'aeroplano dipenda dal punto e dal tempo.

La trattazione del v. Mises è stata ripresa dal Frank ⁽³⁾ il quale ha messo maggiormente in evidenza le analogie fra il problema di Zermelo e i problemi dell'ottica geometrica.

Infine, recentemente, nel suo trattato di calcolo delle variazioni, il Carathéodory ⁽⁴⁾ ha ripreso il problema di Zermelo sia nel caso della velocità del vento costante rispetto al tempo, sia nel caso della velocità del vento variabile col tempo.

In un lavoro in corso di pubblicazione negli « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », ho studiato il problema in questione proponendomi i seguenti scopi:

1° dimostrare un teorema generale dal quale segua l'esistenza dell'estremo assoluto nel problema di Zermelo;

2° determinare le equazioni differenziali che debbono essere soddisfatte dalle curve che forniscono l'estremo, e ciò indipendentemente dalla teoria dei moltiplicatori di Lagrange: teoria che, finora, nonostante alcuni pregevoli lavori ⁽⁵⁾, non ha avuto una trattazione soddisfacente;

3° mettere in forma canonica le equazioni differenziali ottenute;

4° dedurre da tali equazioni la « formula di navigazione di Zermelo ».

Qui mi permetto di dare un cenno del metodo da me seguito.

2. IMPOSTAZIONE DEL PROBLEMA. — Per fissare le idee, ammettiamo che il campo sia un piano illimitato, ma quanto diremo si estende senz'altro a uno spazio a un numero finito qualunque di dimensioni. Supponiamo

(1) *Zum Navigationsproblem der Luftfahrt*. « Ibid. », pp. 373-381.

(2) *Sul problema brachistocrono di Zermelo*. « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », ser. 6°, vol. XV, 1932, pp. 47-52.

(3) *Die schnellste Flugverbindung zwischen zwei Punkte*. « Zeitsch. für ang. Math. u. Mech. », Bd. XIII, 1933, pp. 88-91.

(4) *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*. B.G. Teubner, 1935, pp. 234-242, 378-382.

(5) Vanno ricordati specialmente G. A. BLISS, *The problem of Lagrange in the calculus of variations*. « Ann. Math. Journal », vol. 52, 1930, pp. 674-743 e L. M. GRAVES, *On the problem of Lagrange*. « Ibid. », vol. 53, 1931, pp. 547-554.

inoltre col Levi-Civita, che la velocità del vento sia sempre minore (con una differenza finita) di quella dell'apparecchio rispetto all'aria, ciò che dal punto di vista fisico significa che l'apparecchio può muoversi, in ogni istante e a partire da un punto qualunque, in tutte le direzioni. Ciò posto, diciamo $u(x_1, x_2, t)$ la velocità del vento (e anche la sua intensità) nel punto (x_1, x_2) all'istante t , e ne sieno $u_1(x_1, x_2, t)$, $u_2(x_1, x_2, t)$ le componenti secondo gli assi (x_1, x_2) , supposte finite e continue con le derivate dei primi due ordini per tutti i valori degli argomenti. Sia poi k la velocità dell'apparecchio rispetto all'aria e per quanto diremo si può ammettere indifferentemente che sia costante o funzione di (x_1, x_2, t) finiti e continua insieme con le derivate dei primi due ordini; e, infine sia φ l'angolo formato all'istante t con l'asse x_1 dalla direzione dell'apparecchio lungo una traiettoria assegnata.

In queste ipotesi, lungo una traiettoria qualunque, risultano soddisfatte, per il principio di addizione delle velocità, le seguenti equazioni

$$(1) \quad \frac{dx_1}{dt} = u_1(x_1, x_2, t) + k \cos \varphi(t), \quad \frac{dx_2}{dt} = u_2(x_1, x_2, t) + k \sin \varphi(t).$$

Detta s la lunghezza dell'arco lungo la traiettoria e v la velocità risulta

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_1}{ds} \frac{ds}{dt} = x'_1 v, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_2}{ds} \frac{ds}{dt} = x'_2 v,$$

e quindi per le (1):

$$(2) \quad (x'_1 v - u_1)^2 + (x'_2 v - u_2)^2 = k^2,$$

donde segue che la velocità lungo la traiettoria è uguale all'unica radice positiva dell'equazione (2) di secondo grado in v . Si ha dunque

$$(3) \quad v = \frac{x'_2 u_1 + x'_1 u_2 + \sqrt{(x'_1 u_1 + x'_2 u_2)^2 - (k^2 - u_1^2 - u_2^2)(x_1'^2 + x_2'^2)}}{x_1'^2 + x_2'^2}$$

e quindi

$$(4) \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v} = \frac{-(x'_1 u_1 + x'_2 u_2) + \sqrt{k^2 (x_1'^2 + x_2'^2) - (u_2 x'_1 - u_1 x'_2)^2}}{k^2 - u^2}.$$

Se indichiamo con t_0 l'istante in cui l'aeroplano comincia a percorrere la traiettoria, l'istante $t(s)$ in cui esso finisce di percorrere l'arco s soddisfa all'equazione

$$(5) \quad t(s) = t_0 + \int_0^s \frac{-(x'_1 u_1 + x'_2 u_2) + \sqrt{k^2 (x_1'^2 + x_2'^2) - (u_2 x'_1 - u_1 x'_2)^2}}{k^2 - u^2} ds$$

e, detta L la lunghezza della traiettoria, il tempo impiegato a percorrerla è dato da

$$(6) \quad \tau = t(L) - t_0.$$

Supposto t_0 fissato il problema di Zermelo diventa il problema di minimo per il funzionale $t(L)$.

3. ESISTENZA DELL'ESTREMO ASSOLUTO ED EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PROBLEMA. — Si tratta dunque di un problema di Mayer di un tipo già da me studiato e per il quale in alcuni precedenti lavori ho ottenuto dei teoremi di esistenza dell'estremo assoluto ed ho stabilito le equazioni differenziali delle estremanti. Ma poichè nel problema enunciato nel numero precedente non sono soddisfatte tutte le condizioni dei teoremi di esistenza da me ottenuti, nel lavoro in corso di stampa negli « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », dimostro un teorema generale da cui segue l'esistenza dell'estremo assoluto nel problema di Zermelo.

Indicata con C_0 la curva che fornisce tale estremo non resta che da applicare i risultati della mia Memoria sulle *Proprietà delle estremanti nei problemi di Mayer* ⁽¹⁾, per concludere che C_0 è di classe 2 ⁽²⁾ (di classe n se k, u_1, u_2 , sono finite e continue con le derivate dei primi n ordini), e soddisfa alle equazioni

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{d}{ds} F_{x_1'} = F_{x_1} + F_t F_{x_1'} \\ \frac{d}{ds} F_{x_2'} = F_{x_2} + F_t F_{x_2'} \end{cases}$$

nelle quali non compaiono i moltiplicatori di Lagrange e che insieme con l'equazione del problema

$$(8) \quad t' = F \equiv \frac{-(x_1' u_1 + x_2' u_2) + \sqrt{k^2 (x_1'^2 + x_2'^2) - (u_2 x_1' + u_1 x_2')^2}}{k^2 - u^2},$$

costituiscono un sistema di tre equazioni differenziali nelle tre funzioni incognite $x_1(s), x_2(s), t(s)$.

Introducendo poi in modo opportuno le coordinate canoniche si possono trasformare queste equazioni in modo da ottenere la cosiddetta « formula di navigazione di Zermelo » ⁽³⁾.

(1) « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », ser. II, vol. IV, 1935, pp. 107-131.

(2) Cioè rappresentabile analiticamente per mezzo di funzioni finite e continue con le derivate dei primi due ordini.

(3) Vedi ZERMELO, loc. cit., o CARATHÉODORY, loc. cit.

Matematica. — *Limitazione dell'integrale* $\int_{-1}^1 |P_n(x)|^m dx$.

Nota di G. SANSONE, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. L. TONELLI.

1. È noto che nei due teoremi di Young-Hausdorff-F. Riesz ⁽²⁾ ha importanza essenziale l'ipotesi che le funzioni del sistema ortogonale e normale di riferimento siano uniformemente limitate; M. F. Roszkoff ⁽³⁾ in una sua Memoria sui sistemi ortogonali di polinomi non uniformemente limitati ha ad esempio osservato che il primo dei due teoremi ricordati cade in difetto per la serie di Stieltjes-Neumann della funzione $f(x) = [2/(1-x)]^\alpha$

rispetto al sistema di Legendre $\left\{ \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x) \right\}$ (non limitato)

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} c_n P_n(x),$$

$$c_n = \frac{2^{1/2} (2n+1)^{1/2} \Gamma(\alpha+n) \Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(n-\alpha+2)} \sim \frac{2 \Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)} n^{2\alpha-1/2},$$

quando sia $\alpha > 3/4$. Recentemente A. Rajchman ⁽⁴⁾ in una sua Nota ha dato ragione della impossibilità di estendere ai sistemi ortogonali chiusi, i più generali, i teoremi di Young-Hausdorff-F. Riesz.

Noi daremo qui una limitazione degli integrali $\int_{-1}^1 |P_n(x)|^m dx$ che ci sembra utile segnalare; essa mostrerà anche (n. 3) che basta considerare le funzioni $f(x) = P_n(x)$ e il sistema ortogonale di Legendre per concludere che il secondo dei due teoremi ricordati cade in difetto anche limitandoci alla sola classe delle funzioni continue.

(1) Nella seduta del 1° marzo 1936.

(2) F. RIESZ, *Über eine Verallgemeinerung der Parsevalschen Formel*. « Math. Zeitschr. », 18 (1923), pp. 117-124; oppure L. TONELLI, *Serie trigonometriche*. (Bologna, 1928), pp. 235-243; S. KACZMARZ-H. STEINHAUS, *Theorie der Orthogonalreihen*. (Warszawa, 1935), pp. 202-209.

(3) M. F. ROSKOFF, *Some Inequalities for non-uniformly bounded ortho-normal polynomials*. « Trans. of the Am. Soc. », 36 (1934), pp. 853-867.

(4) A. RAJCHMAN, *Un complément au théorème Riesz-Fischer*. « Bull. Int. de l'Ac. Pol. des Sciences et des Lettres », A (1935), pp. 235-243.

2. TEOREMA. Sia $P_n(x)$ l' *n*-esimo polinomio di Legendre

$$(1) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad P_0 = 1;$$

e si consideri l'integrale

$$(2) \quad I(n, m) = \int_{-1}^1 |P_n(x)|^m dx, \quad m > 0, \quad n = 1, 2, \dots;$$

si ha allora:

a) Se

$$0 < m < 4,$$

$$(3) \quad I(n, m) = A(n, m)/n^{m/2},$$

con

$$(4) \quad 2^{m-3} 3^{-2} \pi^{2-m/2} B^{-1}(m/4, m/4) < A(n, m) < 2^{m+1} \pi^{-m/2} B(1-m/4, 1-m/4)$$

dove B indica la funzione Euleriana di prima specie;

b) Se

$$m = 4,$$

$$(5) \quad I(n, m) = A(n) \frac{\log n}{n^2},$$

con

$$(6) \quad 3\pi^{-2} e^{-13/12} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} A(n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A(n) \leq 2^{-2} \cdot 3 \cdot 5\pi^{-2} e^{7/12};$$

c) Se

$$\delta > 0,$$

$$(7) \quad I(n, +4\delta) = C(n, \delta)/n^2,$$

con

$$(8) \quad 2^2 3^{-(1+2\delta)} (4-\sqrt{2})^{1+(1+\delta)} \pi^{-8(1+\delta)} < C(n, \delta) < 2[1 + 2^{6(1+\delta)}/\delta \pi^{2(1+\delta)}].$$

a) Dimostrazione del teorema nel caso $0 < m < 4$.

Per la limitazione di Stieltjes-Fejér⁽¹⁾ si ha

$$(9) \quad |P_n(x)| < \frac{2^{3/2}}{\pi^{1/2}} \frac{1}{n^{1/2}} \frac{1}{(1-x^2)^{1/4}}$$

(1) L. FEJÉR, *Abschätzungen für die Legendreschen und verwandte Polynome*. « Math. Zeitschr. », 24 (1925), pp. 285-298.

e perciò

$$0 < I(n, m) < \frac{2^{5m/2}}{\pi^{m/2}} \frac{1}{n^{m/2}} \int_{-1}^1 \frac{1}{(1-x^2)^{m/4}} dx,$$

ma è

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-m/4} dx = 2^{1-\frac{m}{2}} \int_0^1 t^{-\frac{m}{4}} (1-t)^{-\frac{m}{4}} dt = 2^{1-\frac{m}{2}} B(1-m/4, 1-m/4)$$

e si trova quindi la limitazione a destra della (4).

Si ha poi

$$(10) \quad \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}, \quad \left[\int_{-1}^1 P_n P_m dx = 0, \quad n \neq m \right]$$

perciò

$$\frac{2}{3n} \leq \frac{2}{2n+1} = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \int_{-1}^1 |P_n|^{\frac{m}{2}} |P_n|^{2-\frac{m}{2}} dx$$

e per la limitazione di Bunikowsky-Schwarz

$$\frac{2^2}{3^2 n^2} < \int_{-1}^1 |P_n|^m dx \int_{-1}^1 |P_n|^{4-m} dx < I(n, m) \frac{2^{5-m}}{\pi^{2-m/2}} B(m/4, m/4) \frac{1}{n^{2-\frac{m}{2}}}$$

dalla quale segue appunto la limitazione a sinistra della (4) che è così dimostrata.

b) *Dimostrazione del teorema nel caso $m = 4$.*

Dalla formula di Adams⁽¹⁾ abbiamo.

$$(11) \quad P_n^2(x) = \sum_{r=0}^n \frac{A_{n-r}^2 A_r}{A_{2n-r}} \frac{4n-4r+1}{4n-2r+1} P_{2n-2r}(x)$$

con

$$(12) \quad A_r = 2^{-r} \Gamma(2r+1) [\Gamma(r+1)]^{-2}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

e perciò per le (10)

$$(13) \quad \int_{-1}^1 P_n^4(x) dx = 2 \sum_{r=0}^n \frac{A_{n-r}^4 A_r^2}{A_{2n-r}^2} \frac{4n-4r+1}{(4n-2r+1)^2}.$$

(1) Cfr. E. W. HOBSON, *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. (Cambridge, 1931), pp. 83-87; oppure E. T. WHITTAKER, G. W. WATSON, *A Course of Modern Analysis* (3^a ed., Cambridge, 1920), p. 331.

Dalla formula di Stirling, per $x > 0$, abbiamo

$$\Gamma(x+1) = (2\pi)^{1/2} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\Theta/12x}, \quad 0 < \Theta < 1,$$

quindi dalla (12)

$$(14) \quad A_r = \pi^{-1/2} 2^r r^{-1/2} \eta_r; \quad 2^{-1/6} < \eta_r < e^{1/24}, \quad 1 \leq r,$$

e perciò per $1 \leq r \leq n-1$

$$2 \frac{A_{n-r}^4 A_r^2}{A_{2n-r}^2} \frac{4n-4r+1}{(4n-2r+1)^2} = \frac{2}{\pi^2} \frac{(2n-r)(4n-4r+1)}{(n-r)^2 r (4n-2r+1)^2} \tau_r$$

con

$$e^{-13/12} < \tau_r < e^{7/12};$$

ma si ha anche per

$$1 \leq r \leq n-1, \quad 2 < (2n-r)(4n-4r+1)/(n-r)(4n-2r+1) < 5/2,$$

e allora per i termini della somma del secondo membro della (13), quando si faccia $r = 1, 2, \dots, n-1$ abbiamo

$$2 \frac{A_{n-r}^4 A_r^2}{A_{2n-r}^2} \frac{4n-4r+1}{(4n-2r+1)^2} = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{(n-r)r(4n-2r+1)} \sigma_r$$

con

$$(15) \quad 4e^{-13/12} < \sigma_r < 5e^{7/12}.$$

Per $r=0$ il corrispondente termine del secondo membro della (13) ha l'espressione

$$2 \frac{A_n^4}{A_{2n}^2} \frac{1}{4n+1} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{n(4n+1)} \sigma_0, \quad e^{-3/4} < \sigma_0 < e^{1/2},$$

per $r=n$ il corrispondente termine della (13) vale $2/(2n+1)^2$, e abbiamo infine dalla (13)

$$(16) \quad \int_{-1}^1 P_n^4(x) dx = \frac{2}{(2n+1)^2} + \frac{4}{\pi n(4n+1)} \sigma_0 + \frac{\sigma_n}{\pi^2} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{(n-r)r(4n-2r+1)}$$

con

$$4e^{-13/12} < \sigma_n < 5e^{7/12}.$$

Osserviamo ora che

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n-r)r(4n-2r+1)} = \\ &= \frac{1}{n(4n+1)} \frac{1}{r} + \frac{1}{n(2n+1)} \frac{1}{n-r} - \frac{4}{(2n+1)(4n+1)} \frac{1}{4n+1-2r} \end{aligned}$$

quindi

$$\sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{(n-r)r(4n-2r+1)} = \frac{2(3n+1)}{n(2n+1)(4n+1)} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r} - \frac{4}{(2n+1)(4n+1)} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{4n+1-2r},$$

e tenuto conto che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \left[\log n + \gamma + \frac{\theta-1}{n} \right] = 1^{(1)}$$

e che la somma $\sum_{r=1}^{n-1} (4n+1-2r)^{-1}$ è limitata, otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\log n} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{(n-r)r(4n-2r+1)} = \frac{3}{4}$$

e dalla (16) abbiamo allora che posto

$$\int_{-1}^1 P_n^4(x) dx = A(n) \frac{n^2}{\log n}$$

è

$$A(n) = \frac{3}{4} \frac{\sigma_n}{\pi^2} \left[\frac{8}{3} \frac{\pi^2}{\sigma_n} \frac{n^2}{(2n+1)^2} \frac{1}{\log n} + \frac{16}{3} \frac{\sigma_0 \pi}{\sigma_n} \frac{n}{4n+1} \frac{1}{\log n} + \frac{4}{3} \frac{n^2}{\log n} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{(n-r)r(4n-2r+1)} \right],$$

e perciò fissato $\varepsilon > 0$ si può determinare un intero positivo n_0 tale che per $n > n_0$ risulti

$$\frac{3e^{-13/12}}{\pi^2} (1 - \varepsilon) < A(n) < \frac{15}{4\pi^2} e^{7/12} (1 + \varepsilon),$$

e da questa segue appunto la (6).

c) *Dimostrazione del teorema nel caso $m = 4 + 4\delta, \delta > 0$.*

Tenuto conto che per $|x| \leq 1$ è $|P_n(x)| \leq 1$ e facendo uso della (9) si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 |P_n|^{4+4\delta} dx &= \int_0^{1-n^{-2}} |P_n|^{4+4\delta} dx + \int_{1-n^{-2}}^1 |P_n|^{4+4\delta} dx < \\ &< \frac{2^{6(1+\delta)}}{\pi^{2(1+\delta)}} \frac{1}{n^{2(1+\delta)}} \int_0^{1-n^{-2}} \frac{1}{(1-x^2)^{1+\delta}} dx + \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

(1) γ indica la costante di Eulero-Mascheroni.

ma è

$$\int_0^{1-n^{-2}} \frac{1}{(1-x^2)^{1+\delta}} dx < \int_0^{1-n^{-2}} (1-x)^{-(1+\delta)} dx < n^{2\delta}/\delta$$

e perciò

$$\int_{-1}^1 |P_n(x)|^{4+4\delta} dx = 2 \int_0^1 |P_n(x)|^{4+4\delta} dx < 2 \left[\frac{1}{n^2} + \frac{2^{6(1+\delta)}}{\delta \pi^{2(1+\delta)}} \frac{1}{n^2} \right],$$

sussiste quindi la limitazione a destra della (8).

Per un noto teorema di Stieltjes⁽¹⁾ sul resto della serie asintotica (di Stieltjes) dei polinomi di Legendre si ha per $0 < \gamma < \pi$

$$P_n(\cos \gamma) > \frac{4}{\pi} (2n+1) \alpha_n \left[\frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \gamma - \frac{\pi}{4} \right]}{(2 \sin \gamma)^{1/2}} - \frac{1}{2n+3} \frac{\left| \cos \left[\left(n + \frac{3}{2} \right) \gamma - \frac{3}{4} \pi \right] \right|}{(2 \sin \gamma)^{3/2}} \right]$$

$$1/\alpha_n = (2n)!!/(2n-1)!!$$

quindi

$$P_n \left(\cos \frac{\pi}{2n+1} \right) > \frac{4}{\pi (2n+1) \alpha_n} \frac{1}{2^{3/2} [\sin \pi/(2n+1)]^{3/2}} \left[\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right] > 0,$$

ma per $x > \cos \pi/(2n+1)$ il polinomio $P_n(x)$ è crescente⁽²⁾, ed è anche

$$1/\alpha_n > \sqrt{\pi n} \quad ; \quad 1/[\sin \pi/(2n+1)]^{3/2} > (2n+1)^{3/2} \pi^{-3/2}$$

$$\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} > (2\sqrt{2}-1) \frac{1}{2n+1} \quad (3)$$

ne viene quindi per $\cos \pi/(2n+1) \leq x \leq 1$

$$P_n(x) > \frac{4-\sqrt{2}}{\pi^2} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \frac{4-\sqrt{2}}{\pi^2 \sqrt{3}}$$

e perciò

$$(17) \quad \int_{\cos \pi/(2n+1)}^1 |P_n(x)|^{4+4\delta} dx > \left(1 - \cos \frac{\pi}{2n+1} \right) \left(\frac{4-\sqrt{2}}{\pi^2 \sqrt{3}} \right)^{4(1+\delta)} =$$

(1) T. J. STIELTJES, *Oeuvres Complètes*, II. (Groningen, 1918), pp. 234-252.

(2) Il massimo zero di $P_n(x)$ non supera $\cos \pi/(2n+1)$; cfr. T. J. STIELTJES, loc. cit., p. 243.

(3) Per $0 < x \leq \pi/2$ è $\sin x \geq 2x/\pi$.

$$= 2 \left(\frac{4 - \sqrt{2}}{\pi^2 \sqrt{3}} \right)^{4(1+\delta)} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2(2n+1)} > 2 \left(\frac{4 - \sqrt{2}}{\pi^2 \sqrt{3}} \right)^{4(1+\delta)} \frac{1}{(2n+1)^2} \geq \\ \geq \frac{2}{3^2} \left(\frac{4 - \sqrt{2}}{\pi^2 \sqrt{3}} \right)^{4(1+\delta)} \frac{1}{n^2}.$$

Tenuto conto che

$$\int_{-1}^1 |P_n(x)|^{4+4\delta} dx > 2 \int_{\cos \pi/(2n+1)}^1 |P_n(x)|^{4+4\delta} dx$$

si ottiene per la (17) la limitazione a sinistra della (8).

Il teorema è così dimostrato.

3. Il secondo teorema di Young-Hausdorff-F. Riesz afferma che se $\{\Phi_n(x)\}$ è un sistema chiuso, ortogonale e normale in (a, b) , e

$$|\Phi_n(x)| \leq M \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad a \leq x \leq b,$$

se $\{c_n\}$ è una successione di costanti tali che $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^p$ risulti convergente per un p tale che $1 < p \leq 2$, allora le costanti c_n sono i coefficienti di Fourier di una funzione $f(x)$ sommabile $L^{p'}$, con $1/p + 1/p' = 2$, e si ha inoltre

$$(18) \quad \left[\int_a^b |f(x)|^{p'} dx \right]^{1/p'} \leq M^{\frac{2-p}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^p \right)^{1/p}.$$

Si consideri invece il sistema ortogonale e normale (non uniformemente limitato) $\left\{ \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x) \right\}$ e si prenda $f(x) = P_n(x)$, $p' = 4$; si ha per la (5)

$$\left[\int_{-1}^1 P_n^4(x) dx \right]^{1/4} = \frac{A^{1/4}(n) (\log n)^{1/4}}{n^{1/2}},$$

$$0 = c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = c_{n+1} = \dots, \quad c_n = \sqrt{2/(2n+1)}, \quad |c_n| \sim n^{-\frac{1}{2}}$$

e perciò non può verificarsi la (18) per la classe dei polinomi P_n qualunque sia il valore che si voglia attribuire alla costante M ; se è poi $p' > 4$ si ha per la (7)

$$\left[\int_{-1}^1 |P_n(x)|^{p'} dx \right]^{1/p'} = \frac{C(n, 2^{-2} p' - 1)^{1/p'}}{n^{2/p'}}$$

e per n sufficientemente grande è $n^{-2/p'} > L n^{-1/2}$ e ancora la (18) non può verificarsi; il teorema ricordato non sussiste quindi nella sua generalità anche limitandoci alla sola classe delle funzioni continue:

Matematica. — *Sulle varietà di Veronese a due indici.*
Nota I di B. SEGRE, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. SCORZA.

1. Rappresentando linearmente le quadriche-inviluppo di un dato S_n coi punti di uno spazio Σ_v , di dimensione

$$v = \frac{1}{2}n(n+3),$$

alle quadriche-inviluppo di S_n almeno r volte specializzate ($r = 1, 2, \dots, n$) corrispondono in Σ_v i punti di una varietà algebrica, $\Phi^{(r)}$, che — estendendo una locuzione introdotta da G. SCORZA ⁽²⁾ — qui vien denominata una varietà di VERONESE di indici (r, n) . La successione

$$\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \dots, \Phi^{(n)},$$

che nel modo anzidetto si ottiene in Σ_v , è ovviamente tale che ciascuna sua varietà contiene le seguenti; ebbene, nel § II di questa Nota I, supposto $1 \leq r \leq s \leq n$, costruisco il cono o lo spazio *luogo delle tangenti a* $\Phi^{(r)}$ *in un punto arbitrariamente assegnato di* $\Phi^{(s)}$, ciò che, in particolare, fornisce la molteplicità secondo cui $\Phi^{(r)}$ passa per $\Phi^{(s)}$.

Un punto P di Σ_v , che non stia su $\Phi^{(1)}$, è immagine di una quadrica-inviluppo \mathcal{S} non-specializzata di S_n . I vari S_{n-r} di S_n , per $r = 1, 2, \dots, n-1$, segano la quadrica-luogo aderente a \mathcal{S} secondo quadriche, nuclei di quadriche-inviluppo di S_n r volte specializzate; mentre, per $r = n$, i singoli $S_{n-r} = S_0$ di S_n sono nuclei di quadriche-inviluppo $r = n$ volte specializzate: nell'uno e nell'altro caso, diremo che il nucleo considerato è indotto da \mathcal{S} in S_{n-r} . Qualunque sia $r (= 1, 2, \dots, n)$, le quadriche-inviluppo r volte specializzate che hanno come nuclei le quadriche indotte da \mathcal{S} nei vari S_{n-r} di S_n si rappresentano in Σ_v coi punti di una varietà $\Pi^{(r)}$, situata su $\Phi^{(r)}$, la quale verrà indicata come la varietà indotta da P in $\Phi^{(r)}$. È chiaro che, in corrispondenza ad ogni P , la varietà $\Pi^{(n)}$ coincide colla $\Phi^{(n)}$; risulterà poi (n. 4) come anche le altre $\Pi^{(r)}$ possano venir definite agevolmente in modo diretto, mediante le Φ ed il punto P .

(1) Nella seduta del 1º marzo 1936.

(2) Cfr. G. SCORZA, *Le varietà di Veronese e le forme quadratiche definite*. «Rend. della R. Accad. delle Scienze di Napoli», ser. III, to. 21 (1915), p. 297. La $\Phi^{(n)}$ vien chiamata da questo A. varietà di VERONESE di indice n ; essa per $n = 0, 1, 2$ è, ordinatamente, un punto, una conica (irriducibile), ed un'ordinaria superficie di VERONESE.

Due varietà $\Pi^{(r)}$, $\Pi^{(s)}$, tali che sia

$$r + s = n + 1,$$

sono sempre riferite fra loro in un'omologia di centro P ; la proposizione più completa che qui stabilisco in proposito nel n. 8 (Nota II) comprende, per $r = 1$, un bel teorema di recente stabilito da G. SCORZA ⁽¹⁾. Di più, dimostro (n. 10) che per es. $\Pi^{(r)}$ non è altro che il luogo dei punti di $\Phi^{(r)}$ che son congiunti a P da rette che si appoggiano altrove a $\Phi^{(s)}$. Si ha pertanto la possibilità di costruire in modo estremamente semplice $\Pi^{(r)}$ in Σ_v a partire dalle Φ , non appena sia dato il punto P ; e, in tal guisa, il difficile problema di trovare l'ordine di $\Pi^{(r)}$ resta ricondotto alla determinazione dell'ordine del cono costituito dalle rette per P che incontrano $\Phi^{(r)}$ e $\Phi^{(s)}$ in due punti generalmente distinti.

La questione di geometria numerativa a cui così si perviene rientra in una più generale, che già è stata oggetto di altra mia ricerca ⁽²⁾. Poggiando sul risultato di questa ricerca e sulla teoria delle caratteristiche relativa alle quadriche di S_n , quale è stata sviluppata da H. SCHUBERT in una Memoria fondamentale ⁽³⁾, adombro da ultimo (§ IV) un procedimento generale per il calcolo degli ordini delle $\Pi^{(r)}$. Seguendo tale via s'incontrano però gravi difficoltà se si vogliono effettuare i calcoli fino in fondo lasciando r ed n indeterminati, anche perchè le formule risolutive delle questioni studiate dallo SCHUBERT sono estremamente complicate e da questi esplicitamente assegnate solo in casi relativamente particolari; perciò mi limito (n. 14) a trattare in modo completo il caso di $r = 2$ (ed n qualunque).

§ I. — RICHIAMI E PREMESSE.

2. Incominciamo coll'enunciare, relativamente alle varietà di VERONESE a due indici, alcuni risultati noti o di facile dimostrazione.

La dimensione $\delta_{r,n}$ e l'ordine $\kappa_{r,n}$ di una varietà di VERONESE di indici (r, n) si esprimono colle formule seguenti:

$$\delta_{r,n} = \frac{1}{2} n(n+3) - \frac{1}{2} r(r+1),$$

(1) Ved. G. SCORZA, *Sulle varietà di Veronese*. Questi «Rendiconti», ser. VI, to. 22 (1935)₂, p. 181; il risultato contenuto in questo lavoro costituisce l'analogo di teoremi noti, di S. LIE e di L. BERZOLARI, concernenti, rispettivamente, la superficie di STEINER e la superficie di VERONESE.

(2) Cfr. B. SEGRE, *Un problema di geometria numerativa*. «Boll. dell'Un. Mat. Ital.», to. 15 (1936), p. 49.

(3) H. SCHUBERT, *Allgemeine Anzahlfunktionen für Kegelschnitte, Flächen und Räume zweiten Grades in n Dimensionen*. «Math. Ann.», to. 45 (1894), p. 153.

$$x_{r,n} = \frac{(n+1)_r (n+3)_r \cdots (n+r)_r}{r_r (r+2)_r \cdots (2r-1)_r} \quad \text{per } r < n \text{ e dispari,}$$

$$x_{n,n} = 2^n,$$

$$x_{r,n} = \frac{(n+2)_{r+1} (n+4)_{r+1} \cdots (n+r)_{r+1}}{(r+1)_{r+1} (r+3)_{r+1} \cdots (2r-1)_{r+1}} \quad \text{per } r < n \text{ e pari,}$$

dove, per abbreviare, h_k sta per indicare il numero delle combinazioni di h oggetti a k a $k^{(1)}$; così, p. es., $\Phi^{(1)}$ è un'ipersuperficie di ordine $n+1$, mentre $\Phi^{(n)}$ è una varietà ad n dimensioni di ordine 2^n .

Presa in S_n una quadrica-involuppo \mathcal{S} , al più specializzata una sola volta, ad essa corrisponde un punto P di Σ_v , non situato su $\Phi^{(2)}$; la quadrica-luogo aderente a \mathcal{S} ammette in S_n un sistema lineare ∞^{v-1} di quadriche-involuppo apolari, il quale si rappresenta con un iperpiano π di Σ_v . La corrispondenza che così nasce fra i punti P e gli iperpiani π di Σ_v riesce generalmente biunivoca, ed è null'altro che la *polarità rispetto all'ipersuperficie $\Phi^{(1)}$* ⁽²⁾. Si dirà anche talora, per comodità di discorso, che P e π sono mutuamente polari rispetto a $\Phi^{(n)}$ (ciò che è lecito in base alla fine del n. 6).

3. La dimensione ρ della varietà $\Pi^{(r)}$, definita nel n. 1, risulta manifestamente uguale all'infinità degli S_{n-r} di S_n , ossia

$$\rho = r(n-r+1);$$

perciò l'ordine di $\Pi^{(r)}$ è dato dal numero dei punti di questa varietà che stanno su ρ iperpiani indipendenti di Σ_v . Poichè le quadriche-involuppo di S_n che toccano un iperpiano fisso di questo spazio si rappresentano in Σ_v coi punti di un iperpiano, si può dire che:

Per $r < n$, l'ordine di $\Pi^{(r)}$ è uguale al numero delle V_{n-r-1}^2 -luogo giacenti sulla quadrica fissa \mathcal{S} di S_n e tangenti a ρ iperpiani genericamente assegnati in S_n .

Così, p. es., l'ordine di $\Pi^{(n-1)}$ è espresso dal numero delle coppie di punti appartenenti a \mathcal{S} , di cui l'uno o l'altro punto stia su ciascuno di $2(n-1)$ dati iperpiani di S_n . Le coppie in questione si hanno manifestamente, tutte e sole, suddividendo nei vari modi i $2(n-1)$ iperpiani in due gruppi di $n-1$ caduno, considerando le due rette comuni agli iperpiani di tali gruppi, ed associando uno qualunque dei due punti comuni a \mathcal{S} e

(1) Cfr. C. SEGRE, *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice*. Questi « Rendiconti », ser. V, to. 9 (1900)₂, p. 253, n. 4; notiamo pel seguito che, facendo in quelle formule $n = r-1$, si ottiene $x_{r,r-1} = 1$ qualunque sia r .

(2) Cfr. il n. 4 della seconda Nota cit. di G. SCORZA.

ad una di queste rette con uno qualunque dei due punti comuni a P ed alla retta restante; l'ordine richiesto vale perciò

$$\frac{1}{2} (2n-2)_{n-1} \cdot 2 \cdot 2 = 2(2n-2)_{n-1}.$$

La determinazione dell'ordine di $\Pi^{(r)}$, seguendo la via dianzi indicata, si presenta assai ardua per $r \leq n-2$.

4. Termineremo queste generalità, dando un primo modo diretto di definire in Σ_v la varietà $\Pi^{(r)}$, a partire dal punto P e dalle Φ ; siccome (n. 1) $\Pi^{(n)}$ coincide sempre con $\Phi^{(n)}$, basterà all'uopo supporre $r = 1, 2, \dots, n-1$.

Osserviamo, intanto, che la varietà $\Phi^{(n)}$ è riferita ad S_n in una corrispondenza birazionale senza eccezioni, in quanto ogni punto di $\Phi^{(n)}$ rappresenta una quadrica-inviluppo di S_n n volte specializzata, ossia ridotta ad una stella (da contarsi due volte) avente per centro un determinato punto di S_n ; e viceversa. Ad un qualunque spazio S_{n-r} subordinato di S_n corrisponde perciò birazionalmente una varietà, $\Xi^{(r)}$, di $\Phi^{(n)}$. È subito visto che questa risulta una varietà di VERONESE di indici $(n-r, n-r)$, e dunque appartiene ad uno spazio Σ_R di dimensione

$$R = \frac{1}{2} (n-r)(n-r+3);$$

i punti di Σ_R rappresentano, precisamente, le quadriche-inviluppo di S_n almeno r volte specializzate la cui quadrica-nucleo giace nel suddetto S_{n-r} .

Per r fissato ($= 1, 2, \dots, n-1$) le varietà $\Xi^{(r)}$ e gli spazi Σ_R , che si ottengono in Σ_v in corrispondenza ai diversi S_{n-r} di S_n , costituiscono due sistemi continui aventi entrambi la dimensione $\rho = r(n-r+1)$ e rispettivamente generanti, come luoghi di punti, le varietà $\Phi^{(n)}$ e $\Phi^{(r)}$. Un generico iperpiano π di Σ_v incontra uno dei suddetti Σ_R secondo uno spazio, di dimensione $R-1$, il cui polo rispetto alla $\Xi^{(r)}$ contenuta in quel Σ_R (n. 2) verrà brevemente denominato il polo di π rispetto a tale $\Xi^{(r)}$. Si ha allora che:

La varietà $\Pi^{(r)}$, indotta in $\Phi^{(r)}$ dal generico punto P di Σ_v , può anche venir definita come il luogo dei poli, rispetto alle ∞^r varietà $\Xi^{(r)}$ dianzi considerate, dell'iperpiano π polare di P rispetto a $\Phi^{(r)}$.

Questa proposizione discende agevolmente dalla definizione di $\Pi^{(r)}$, data nel n. 1, avendo riguardo a ciò che precede ed al fatto ovvio che affinché in S_n una quadrica-luogo \mathcal{Q} risulti apolare ad una quadrica-inviluppo r volte specializzata, avente cioè una quadrica-nucleo \mathcal{Q} appartenente ad un S_{n-r} , è necessario e sufficiente che, entro questo spazio, la quadrica-inviluppo aderente a \mathcal{Q} sia apolare alla quadrica-luogo da esso segata su \mathcal{Q} .

Le $\Xi^{(n)}$ sono manifestamente ridotte ai singoli punti di $\Phi^{(n)}$; si può dunque dire che *la suddetta proposizione sussiste anche per $r = n$, purchè si convenga di assumere tali punti come poli di π rispetto alle relative $\Xi^{(n)}$.*

§ II. — SUL LUOGO DELLE RETTE TANGENTI A $\Phi^{(r)}$

IN UN PUNTO DI $\Phi^{(s)}$ ($1 \leq r \leq s \leq n$).

5. Avendo in S_n un sistema continuo $\{V_{n-r}\}$ — costituito da ∞^1 iper-superficie-luogo V_{n-r} , la generica delle quali possessa un S_{r-1} doppio variabile — è ben noto come, col linguaggio infinitesimale sintetico, possa dirsi che la varietà V'_{n-r} di $\{V_{n-r}\}$ infinitamente prossima ad una generica V_{n-r} contiene semplicemente l' S_{r-1} doppio di questa; che se poi ci si riferisce ad una particolare V_{n-r} del sistema che abbia un S_{r-1} doppio (con $s > r$), è facile vedere che la relativa V'_{n-r} tocca quest'ultimo lungo un S_{r-1} .

Applicando, in modo opportuno, la duale della prima parte di questa proposizione alle quadriche-involuppo r volte specializzate di S_n , e conservando le precedenti notazioni, si ottiene che:

La varietà $\Phi^{(r)}$ è costituita da ∞^e spazi lineari Σ_R , di cui ne passa uno ed uno solo per ogni punto di $\Phi^{(r)}$ che (se $r < n$) non stia su $\Phi^{(r+1)}$ (1); i suddetti Σ_R corrispondono biunivocamente agli S_{n-r} di S_n , i punti di uno determinato di quelli rappresentando la totalità delle quadriche almeno r volte specializzate di S_n che hanno la relativa quadrica-nucleo in un dato S_{n-r} . Ebbene, lungo un qualunque Σ_R la varietà $\Phi^{(r)}$ ammette uno spazio tangente fisso (avente la stessa dimensione $\delta_{r,n}$ di $\Phi^{(r)}$); questo rappresenta il sistema lineare $\infty^{\delta_{r,n}}$ delle quadriche-involuppo, di S_n , che ammettono come iperpiani tangenti tutti quelli della stella ∞^{r-1} di centro l' S_{n-r} di S_n che corrisponde a Σ_R nel modo indicato (2).

Se si tien conto del fatto che le omografie di S_n si rispecchiano in trasformazioni omografiche di Σ_v , le quali mutano in sè ciascuna delle Φ operando transitivamente sui punti di $\Phi^{(n)}$ e, per $r < n$, sui punti di $\Phi^{(r)}$ che non stanno su $\Phi^{(r+1)}$, si ha tosto che $\Phi^{(n)}$ non possiede punti multipli e che un qualunque punto multiplo di un'altra $\Phi^{(r)}$ deve stare su $\Phi^{(r+1)}$. Risulterà fra poco che, reciprocamente, ogni punto di $\Phi^{(r+1)}$ è multiplo per $\Phi^{(r)}$; dunque il teorema precedente permette di costruire, per ciascuna varietà Φ , lo spazio tangente in un suo punto semplice arbitrario.

6. Supponiamo ora $r < n$, e consideriamo un qualunque punto P di $\Phi^{(r)}$ che appartenga ad una $\Phi^{(s)}$ con $s > r$, ma che non stia su alcuna $\Phi^{(s')}$

(1) Si osservi che, d'accordo con ciò, risulta $\delta_{r,n} = \rho + R$.

(2) Da qui segue facilmente una proposizione stabilita in tutt'altra guisa da G. SCORZA alla fine del n. 6 del primo lavoro citato.

di indice $s' > s$. Il punto P è l'immagine di una quadrica-inviluppo di S_n specializzata precisamente s volte, ossia il cui nucleo appartiene ad uno spazio S_{n-s} , subordinato di S_n ; denotiamo con Σ_s lo spazio che, giusta il n. 5, corrisponde a quest'ultimo su $\Phi^{(s)}$, e cioè lo spazio generatore di $\Phi^{(s)}$ che passa per P . —

Poggiando sulla duale della seconda parte della proposizione data al principio del n. 5, si stabilisce senza difficoltà che:

I punti del cono Γ tangente a $\Phi^{(r)}$ nel punto P suddetto si rappresentano in S_n colle quadriche-inviluppo, di questo spazio, per ciascuna delle quali gli iperpiani tangenti che appartengono alla stella ∞^{s-1} di centro S_{n-s} inviluppano, nella stella, un cono quadrico r volte specializzato. Dunque la varietà $\Phi^{(r)}$ ammette uno stesso cono Γ tangente (di dimensione $\delta_{r,n}$) in tutti i punti dello spazio Σ_s che (come P) sono semplici per $\Phi^{(s)}$; tale cono ha come vertice lo spazio, di dimensione $\delta_{s,n}$, tangente a $\Phi^{(s)}$ lungo Σ_s e la sua sezione con uno spazio $\Sigma_{v-\delta_{s,n}-1}$ di Σ_v , sghembo con questo, risulta una varietà di VÉRONÈSE di indici $(r, s-1)$, il cui ordine $\kappa_{r,s-1}$ si calcola colle formule del n. 2 ⁽¹⁾.

Da qui segue subito, come corollario, che

Supposto $1 \leq r \leq s \leq n$, la varietà $\Phi^{(r)}$ passa per la $\Phi^{(s)}$ colla molteplicità $\kappa_{r,s-1}$ ⁽²⁾.

Anzi, poichè se $r < n$ è

$$1 < \kappa_{r,r} < \kappa_{r,r+1} < \dots < \kappa_{r,n-1},$$

si ha di più che (per $r < n$, $s = r+1, r+2, \dots, n$) la varietà $\Phi^{(s)}$ risulta il luogo dei punti di $\Phi^{(r)}$ multipli secondo $\kappa_{r,s-1}$ (almeno), e quindi è univocamente determinata da $\Phi^{(r)}$. Avuto riguardo al fatto che $\Phi^{(r)}$ non è altro che la varietà riempita dagli spazi S_{n-r} che congiungono $n-r+1$ punti variabili di $\Phi^{(n)}$ ⁽³⁾, si conclude che:

La successione formata dalle n varietà Φ risulta pienamente individuata in Σ_v da una qualunque delle sue varietà.

7. Riferiamoci da ultimo al caso particolare in cui, sempre essendo $r < s$, sussiste la

$$r + s = n + 1$$

ed applichiamo la prima proposizione del n. 6, dopo aver fatto la seguente osservazione. Dire che una quadrica-inviluppo \mathfrak{Q} (non specializzata), di S_n ,

(1) Si noti che, conformemente a questo enunciato, valgono le identità:

$$v - \delta_{r,n} - 1 = \frac{1}{2} (s-1) (s+2) \quad , \quad \delta_{r,n} = \delta_{r,n} + \delta_{r,s-1} + 1.$$

(2) Questo risultato è anche vero per $r = s$, in base a quanto è stato osservato in nota al n. 2; esso generalizza la proprietà conosciuta secondo cui $\Phi^{(1)}$ passa s volte per $\Phi^{(s)}$.

(3) Cfr. C. SEGRE, loc. cit.

è tale che i suoi iperpiani tangenti appartenenti alla stella ∞^{s-1} di centro un dato S_{n-s} , involuppano, nella stella, un cono quadrico $r = n - s + 1$ volte specializzato, è come dire che la quadrica-luogo aderente a \mathcal{S} contiene il suddetto S_{n-s} . Dunque:

Nell'ipotesi che sia $r < s$, $r + s = n + 1$, il cono Γ , di cui al n. 6, si rappresenta in S_n col sistema delle quadriche-involuppo aderenti alle quadriche-luogo che passano per lo spazio S_{n-s} ivi considerato⁽¹⁾.

Matematica. — Operatori permutabili di secondo ordine.

Nota di L. TOSCANO, presentata⁽²⁾ dal Socio S. PINCHERLE.

1. Sia A un operatore lineare fondamentale il quale faccia corrispondere allo spazio lineare (S) lo spazio medesimo.

E si consideri un secondo operatore lineare X (operante sullo stesso spazio) permutabile di secondo ordine con A , tale cioè che il suo scarto⁽³⁾ dalla permutabilità rispetto ad A sia un operatore P permutabile con A .

Vale

$$(1) \quad AX - XA = P.$$

Nel caso particolare in cui P è l'operazione identica la precedente diventa

$$(2) \quad AX - XA = I$$

e gli operatori A e X si dicono, seguendo il Pincherle, associati.

In generale moltiplicando la (1) a destra per P^{-1} si ha

$$AXP^{-1} - XAP^{-1} = I$$

cioè

$$(3) \quad A(XP^{-1}) - (XP^{-1})A = I.$$

Analogamente

$$(3') \quad A(P^{-1}X) - (P^{-1}X)A = I,$$

e si conclude che sono associati gli operatori A e XP^{-1} o A e $P^{-1}X$.

Per gli operatori associati soddisfacenti la (2) abbiamo stabilito relazioni⁽⁴⁾ che legano

(1) Va rilevato che, nelle condizioni ammesse, la generica di queste quadriche risulta non specializzata. La suddetta proposizione è anche vera per $r = s$ in base al n. 5, salvo che, in tal caso, P è semplice per $\Phi^{(r)}$ e Γ si riduce ad uno spazio lineare.

(2) Nella seduta del 7° marzo 1936.

(3) S. PINCHERLE, *Sullo scarto dalla permutabilità nelle operazioni lineari*. («Rend. Acc. Scienze di Bologna», anno accademico 1930-31).

(4) L. TOSCANO, *Operatori lineari e numeri di Stirling generalizzati*. («Annali di Matematica», ser. 4°, to. XIV, 1935-36); Su gli operatori lineari associati. Questi lavori li richiameremo in seguito con [I] e [II].

$$AX^u, X^u A, A^u X, XA^u, A^s X^s, X^s A^s, X^{-u+1}, A^{-u+1},$$

e possiamo allora concludere che le stesse relazioni valgono per gli operatori

$$A(XP^{-1})^u, (XP^{-1})^u A, A^u(XP^{-1}), (XP^{-1})^s A^s, A^s(XP^{-1})^s, \\ (XP^{-1})^s A^s, (XP^{-1})^{-u+1}, A^{-u+1},$$

e analoghi con $P^{-1}X$ invece di XP^{-1} , dove A, X, P soddisfano la (1).

Si vede così quanto siano fondamentali le nostre ricerche su gli operatori lineari associati, e qui vogliamo occuparci dei casi interessanti

$$P = 1 + A, \quad P = 1 - A.$$

2. Senza ledere la generalità dei risultati supponiamo che lo spazio (S) sia di base

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

e che A sia l'operazione differenza finita Δ , con $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, e X la moltiplicazione per x , in quanto

$$(4) \quad \Delta x - x\Delta = 1 + \Delta.$$

Introduciamo l'operazione θ con la posizione ⁽¹⁾

$$\theta f(x) = f(x+1),$$

da cui

$$P = 1 + \Delta = \theta, \quad P^{-1} = \theta^{-1};$$

allora le (3) e (3') diventano

$$\Delta(x\theta^{-1}) - (x\theta^{-1})\Delta = 1$$

$$\Delta(\theta^{-1}x) - (\theta^{-1}x)\Delta = 1,$$

e concludiamo che gli operatori differenza finita Δ e prodotto della moltiplicazione per x con sostituzione di $x-1$ a x o della sostituzione di $x-1$ a x con la moltiplicazione per x sono associati.

Così Δ e $x\theta^{-1}$ o Δ e $\theta^{-1}x$ si comportano come la derivazione rispetto a x con la moltiplicazione per x .

Possiamo ancora supporre che A sia l'operazione differenza finita ⁽²⁾ $\bar{\Delta}$, con $\bar{\Delta}f(x) = f(x) - f(x-1)$, e $P = 1 - \bar{\Delta} = \theta^{-1}$, in quanto

$$(5) \quad \bar{\Delta}x - x\bar{\Delta} = 1 - \bar{\Delta}.$$

(1) L'operazione di passaggio da x a $x+1$ è stata denotata con θ dal Casorati; cfr. S. PINCHERLE, *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'analisi*. Zanichelli, Bologna, 1901.

(2) Oltre l'operazione Δ viene anche considerata da vari autori l'operazione $\bar{\Delta}$; cfr. NIELSEN, *Traité élémentaire des nombres de Bernoulli*. (Paris, Gauthier-Villars, 1923).

Le (3) e (3') in tal caso diventano

$$\bar{\Delta}(x\theta) = (x\theta)\bar{\Delta} = 1$$

$$\bar{\Delta}(\theta x) = (\theta x)\bar{\Delta} = 1$$

e concludiamo che $\bar{\Delta}$ e $x\theta$ o $\bar{\Delta}$ e θx sono operatori associati.

Valgono inoltre le relazioni ⁽¹⁾

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\theta x)^i = \theta^i x^i = (x+1)^i \theta^i \\ (x\theta)^i = x^i \theta^i = \theta^i (x-1)^i \\ (\theta^{-1} x)^i = \theta^{-i} x^i = (x-1)^i \theta^{-i} \\ (x\theta^{-1})^i = x^i \theta^{-i} = \theta^{-i} (x+1)^i \\ \theta^{-1} \Delta = \bar{\Delta}, \quad \theta \bar{\Delta} = \Delta. \end{array} \right.$$

3. Pertanto tutte le relazioni stabilite in [I] e [II] si traducono in altrettante pel calcolo delle differenze finite e ci limitiamo a segnalare il gruppo notevole ⁽²⁾

$$(7) \quad (-1)^{n-1} \Delta^n x^n = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i-1} h_{n,i} (\Delta x)^i$$

$$(8) \quad (-1)^n \Delta^n x^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i h_{n+1,i+1} ((x+1)\Delta)^i$$

$$(9) \quad x^n \Delta^n = \sum_{i=1}^{i=n} h_{n,i} (x\Delta)^i$$

$$(10) \quad (x+1)^n \Delta^n = \sum_{i=0}^{i=n} h_{n+1,i+1} (\Delta x)^i$$

$$(11) \quad (-1)^{n-1} (\Delta x)^n = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i-1} k_{n,i} \Delta^i x^i$$

$$(12) \quad (-1)^n ((x+1)\Delta)^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i k_{n+1,i+1} \Delta^i x^i$$

$$(13) \quad (x\Delta)^n = \sum_{i=1}^{i=n} k_{n,i} x^i \Delta^i$$

(1) Come d'uso si pone

$$x^i = x(x-1) \cdots (x-i+1) \text{ e } x^{\bar{i}} = x(x+1) \cdots (x+i-1).$$

(2) I coefficienti $h_{n,i}$, $k_{n,i}$ che figurano nelle relazioni sono i numeri di Stirling di prima e seconda specie.

$$(14) \quad (\Delta x)^n = \sum_{i=0}^{i=n} k_{n+1, i+1} (x+1)^i \Delta^i$$

$$(15) \quad (\Delta x)^n = \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} ((x+1) \Delta)^i$$

$$(16) \quad ((x+1) \Delta)^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} (\Delta x)^i$$

$$(17) \quad (\Delta x)^n - ((x+1) \Delta)^n = \sum_{i=0}^{i=n-1} (\Delta x)^{n-i-1} ((x+1) \Delta)^i$$

$$(18) \quad \Delta^n x^n = \sum_{i=0}^{i=n} (n-i)! \binom{n}{i}^2 (x+1)^i \Delta^i$$

$$(19) \quad (-1)^n (x+1)^n \Delta^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i (n-i)! \binom{n}{i}^2 \Delta^i x^i$$

$$(20) \quad [\theta \Delta x (x-1)]^n = (x+1)^{n-1} \theta^n \Delta^n x^{n+1}$$

$$(21) \quad [x (x+1) \theta \Delta]^n = x^{n+1} \theta^n \Delta^n (x-1)^{n-1}$$

$$(22) \quad (x \Delta \bar{\Delta})^n = \Delta^{n-1} \theta (x-1)^n \bar{\Delta}^{n+1} = \bar{\Delta}^{n-1} x^n \Delta^n \bar{\Delta}$$

$$(23) \quad (\Delta \bar{\Delta} x)^n = \bar{\Delta} \Delta^n x^n \bar{\Delta}^{n-1} = \bar{\Delta}^{n+1} (x+1)^n \theta \Delta^{n-1}$$

Analoghe relazioni valgono per l'operatore $\bar{\Delta}$ e per l'altro δ , definito dalla $\delta f(x) = f(x) + f(x-1)$, e che trovasi largamente usato, ad esempio, nella citata opera del Nielsen.

4. Come ultima applicazione delle nostre relazioni su gli operatori associati supponiamo che lo spazio (S) sia di base $1, e^x, e^{2x}, \dots, e^{nx}, \dots$, che $A = D_{e^x}$ rappresenti la derivazione rispetto ad e^x e X la moltiplicazione per e^x .

Risulta

$$XA = e^x D_{e^x} = D_x$$

e dalle nostre relazioni si ottengono le altre

$$(24) \quad D_x^n = \sum_{i=1}^{i=n} k_{n,i} e^{ix} D_{e^x}^i$$

$$(25) \quad e^{nx} D_{e^x}^n = \sum_{i=1}^{i=n} h_{n,i} D_x^i = D_x (D_x - 1) \dots (D_x - n + 1),$$

la prima delle quali è dovuta a Herschel⁽¹⁾.

(1) D'OCAGNE, *Sur une classe de nombres remarquables*. (« American Journal of Mathematics », vol. IX, 1887).

Matematica. — « *Densità* » di un continuo di punti o di rette, e « *densità* » di una corrispondenza. Nota ⁽¹⁾ di F. TRICOMI, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. FUBINI.

... in particolare mi permetto di richiamare la Sua attenzione sugli stretti rapporti esistenti fra le interessanti considerazioni raccolte nel § 2 della Sua recente « *Integralgeometrie. I* » ⁽³⁾ e la definizione di « *densità* » di una corrispondenza del tipo di una reciprocità, da me proposta in un mio lavoro di cinque anni or sono ⁽⁴⁾, i cui principali risultati sono anche citati da Bonnesen e Fenchel nella loro *Theorie der konvexen Körper* ⁽⁵⁾.

Nel § 6 di detto lavoro osservavo preliminarmente che, in una corrispondenza C fra punti di due piani (x, y) e (x', y') , il jacobiano $d(x', y')/d(x, y)$ può riguardarsi come misura della *densità* di C nell'intorno di una coppia di punti omologhi P_0, P'_0 , nel senso che esso dà un'idea dell'*addensamento relativo* dei punti corrispondenti P, P' prossimi a P_0 e P'_0 rispettivamente. Se invece — aggiungevo su per giù — si trattasse di una corrispondenza del tipo di una reciprocità, p. es., di una corrispondenza fra punti (X, Y, Z) e piani (U, V, W) di S_3 , il jacobiano $d(U, V, W)/d(X, Y, Z)$ non può fare un ufficio analogo, non essendo invariante rispetto al gruppo dei movimenti.

Facevo poi vedere come la difficoltà potesse superarsi ricorrendo a certi opportuni assi mobili, pervenendo così, infine alla formula:

$$(1) \quad \delta = \frac{d(U, V, W)}{d(X, Y, Z)} (U^2 + V^2 + W^2)^{-2}$$

per la *densità* di una corrispondenza fra punti (X, Y, Z) e piani $(U, V, W) \equiv UX + VY + WZ + 1 = 0$ di S_3 , densità questa che risulta invariante rispetto al gruppo dei movimenti.

La connessione fra queste mie considerazioni e quelle del § 2 del Suo volumetto è quasi immediata e — se non m'inganno — interessante a rilevare:

Tal quale come, nel caso di una corrispondenza fra punti (x, y) , (x', y') di due piani, il jacobiano $d(x', y')/d(x, y)$ fornisce il valore del

(1) Estratto da una lettera al prof. dott. W. BLASCHKE in Hamburg.

(2) Nella seduta del 1° marzo 1936.

(3) « *Hamburger mathematische Einzelschriften* », n. 20. (Leipzig, Teubner, 1935).

(4) Sulla distribuzione dei baricentri delle sezioni piane di un corpo e Ancora sulla distribuzione, ecc. . . « *Rend. Lincei* » (6), XIII (1931), 407-411 e 478-484.

(5) Berlin, Springer, 1934. (« *Ergebnisse der Mathematik* », III-1).

rapporto fra i corrispondenti elementi superficiali, o — come Ella dice — fra le corrispondenti densità \mathfrak{x} e \mathfrak{x}' :

$$(2) \quad \frac{d(x', y')}{d(x, y)} = \frac{r'}{r};$$

così, nel caso di una corrispondenza fra punti (x, y) e rette $(u, v) \equiv uX + vY + 1 = 0$ del piano (X, Y) , la mia densità δ fornisce il valore del rapporto fra le corrispondenti densità \mathfrak{x} e \mathfrak{g} quali sono definite nel Suo volume; sussiste cioè la formula:

$$(3) \quad \boxed{\delta = \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{x}}}.$$

Naturalmente, trattandosi qui di corrispondenze piane invece che spaziali, la formula che fornisce δ va modificata nel senso che immediatamente discende dai ragionamenti contenuti nelle mie Note precedentemente citate; precisamente occorrerà sostituire la (1) con la formula analoga:

$$(4) \quad \delta = \pm \frac{d(u, v)}{d(x, y)} (u^2 + v^2)^{-\frac{3}{2}},$$

dove l'incertezza di segno (connessa con la potenza di esponente $-3/2$) può eliminarsi attribuendo un determinato orientamento alla retta (u, v) . Oppure se — come Ella fa — ci si limita a considerare le densità in valore assoluto, si può, più semplicemente, porre δ uguale al valore assoluto del secondo membro della (4).

Per giungere alla (3) conviene partire dall'espressione di \mathfrak{g} data dalla sua formula (38) che io — rinunciando in questo scritto alle Sue, pur tanto comode, notazioni abbreviate — scriverò:

$$(5) \quad \mathfrak{g} = \frac{d(p, \varphi)}{d(x, y)} dx dy,$$

supposto — concordemente con le Sue ipotesi — che l'equazione della retta del piano (X, Y) corrispondente di un dato punto (x, y) sia posta sotto la forma

$$X \cos \varphi + Y \sin \varphi - p = 0.$$

Poichè la (4) presuppone invece che l'equazione della stessa retta sia scritta sotto la forma

$$Xu + Yv + 1 = 0,$$

per poter collegar fra loro la (4) e la (5) dovremo aver riguardo alle uguaglianze

$$u = -\frac{\cos \varphi}{p}, \quad v = -\frac{\sin \varphi}{p},$$

donde si trae subito che

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{v}{u}, \quad p = \pm (u^2 + v^2)^{-\frac{1}{2}}$$

e, successivamente, che

$$\frac{d(p, \varphi)}{d(u, v)} = -\frac{u}{\pm (u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{u}{u^2 + v^2} -$$

$$- \frac{v}{\pm (u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{v}{u^2 + v^2} = \pm (u^2 + v^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

Ma dalla (5) si deduce che

$$\frac{g}{x} = \frac{g}{dx dy} = \frac{d(p, \varphi)}{d(u, v)} \frac{d(u, v)}{d(x, y)},$$

dunque si ha senz'altro che

$$\frac{g}{x} = \pm \frac{d(u, v)}{d(x, y)} (u^2 + v^2)^{-\frac{3}{2}} = \delta,$$

come volevasi dimostrare.

Ovvia l'estensione al caso di tre o più variabili.

Le formule (3)-(4) possono, fra l'altro, utilizzarsi per studiare le corrispondenze di tipo reciproco *analoghe alle equivalenze*, cioè tali da conservare le densità: $g = g$.

All'uopo dovrà porsi $\delta = 1$, ciò che, prescindendo dal segno, conduce all'equazione a derivate parziali

$$(6) \quad \frac{d(u, v)}{d(x, y)} = (u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}},$$

che può essenzialmente semplificarsi col porre

$$(7) \quad u = \frac{\cos \xi}{\eta}, \quad v = \frac{\sin \xi}{\eta},$$

dove ξ ed η denotano due nuove funzioni — da determinarsi — di x e y .

Invero, avendosi che

$$u^2 + v^2 = \eta^{-2}, \quad \frac{d(u, v)}{d(\xi, \eta)} = \eta^{-3},$$

con l'accennata sostituzione la (6) diviene

$$\frac{1}{\eta^3} \frac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)} = \frac{1}{\eta^3}$$

cioè

$$(8) \quad \frac{d(\xi, \eta)}{d(x, y)} = 1;$$

ch'è un'equazione d'immediata interpretazione geometrica: *la corrispondenza fra il piano (x, y) e il piano ausiliare (ξ, η) dev'essere un'equivalenza.*

Se ne conclude che *le trasformazioni fra punti e rette del piano conservanti le densità, sono tutte e sole quelle che si ottengono operando prima una arbitraria trasformazione puntuale equivalente, e poi la speciale trasformazione definita dalle formule (7).*

Della trasformazione (7) può — come mi viene suggerito dal collega Terracini — darsi una semplice costruzione geometrica con le operazioni seguenti: 1° Applicazione del piano (ξ, η) su di un cilindro circolare C di raggio 1 dello spazio (x, y, z) , avente per asse l'asse z , in modo tale che il punto $\xi = \eta = 0$ vada a cadere nel punto $x = 1, y = z = 0$, e l'asse η si adagi su la parallela all'asse z condotta per detto punto e orientata concordemente con l'asse z . 2° Proiezione dei punti del cilindro C dall'origine degli assi x, y, z sul piano $z = -1$. 3° Trasformazione della figura proiettata mediante la polarità del suo piano avente come conica unita la circonferenza intersezione col cilindro C. È superfluo riportare la dimostrazione di questa costruzione, che non è altro se non un elementare esercizio di Geometria analitica.

Matematica. — *Sulle funzioni determinanti.* Nota di U. BROGGI, presentata dal Socio G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulle varietà di Veronese a due indici.* Nota II di B. SEGRE, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Moto generato da una sorgente liquida piana addossata a un profilo rigido rettilineo con formazione di vortici.* Nota di C. AGOSTINELLI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. È noto che il problema di determinare la configurazione del campo dovuto ad una corrente traslatoria piana che investe in direzione perpendicolare un profilo rigido rettilineo, nell'ipotesi che posteriormente ad esso si formino due vortici puntiformi, simmetrici rispetto all'asse del profilo, non ammette soluzione permanente ⁽²⁾.

È notevole però il fatto, non ancora rilevato, e di cui mi occupo in questa Nota, che se il moto è generato da una sorgente addossata nel punto di mezzo di una delle facce del profilo, sussiste una soluzione stazionaria del problema con formazione di due vortici, simmetrici rispetto all'asse del profilo, e dalla parte medesima della sorgente, caratterizzata ancora dal fatto che gli estremi del profilo risultano regolarizzati nel senso di Cisotti ⁽³⁾, nel senso cioè che in quei punti la velocità si mantiene finita.

2. Sia allora ASA'BA un profilo rigido rettilineo ed S una sorgente piana puntiforme di portata Q, addossata nel punto di mezzo del lato sinistro del profilo (fig. 1). Poichè il campo $C + C'$ del moto risulta simmetrico rispetto all'asse MN, basta considerare il moto generato dalla sorgente di portata $Q/2$, posta nel vertice S della spezzata $M_\infty SABN_\infty$, considerata rigida, e che avviene nel semipiano $C \equiv M_\infty AN_\infty$, tagliato lungo il contorno SAB. Assunti gli assi BN, BA come assi cartesiani ortogonali x, y con l'origine in B e posto

$$(1) \quad z = x + iy, \quad Z = X + iY = \sqrt{z^2 + a^2},$$

colla determinazione $z = ia$ per $Z = 0$, ove a è la semilunghhezza del profilo AA', il campo C del moto risulta rappresentato conformemente sul semipiano Z di ordinate positive, nel modo come è messo in evidenza nella fig. 2.

(1) Nella seduta del 1° marzo 1936.

(2) Cfr. H. VILLAT, *Leçon sur la théorie des tourbillons*. Paris, Gauthier-Villars, p. 182, 1930.

(3) U. CISOTTI, *Sulla regolarizzazione dei salienti idrodinamici*. «Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano», vol. VIII, 1934.

Infatti, posto

$$Z - a = \rho_1 e^{i\sigma_1}, \quad Z + a = \rho_2 e^{i\sigma_2},$$

risulta

$$\zeta = \sqrt{Z^2 - a^2} = \sqrt{\rho_1 \rho_2} e^{\frac{1}{2}i(\sigma_1 + \sigma_2)},$$

con

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \begin{cases} \pi & \text{sopra } M_\infty S, \\ \frac{\pi}{2} & \text{» } SA + AB, \\ 0 & \text{» } BN_\infty, \end{cases}$$

e perciò, mentre Z descrive l'asse reale X da $-\infty$ a $+\infty$, il punto ζ descrive il contorno $M_\infty SABN_\infty$ del campo C del moto. Si vede poi facilmente che ad un punto Z di ordinata $Y > 0$ corrisponde un punto del campo C .

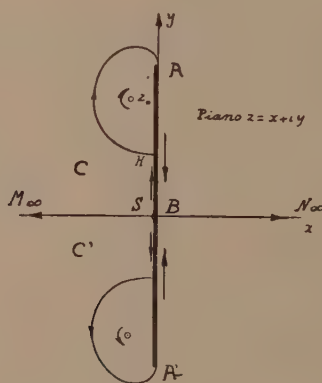


Fig. 1.

Se φ è il *potenziale di velocità* e ψ la *funzione di corrente*, possiamo porre inoltre

$$(2) \quad \psi = \begin{cases} Q/2, & \text{sopra } MS, \\ 0, & \text{» } SA + AB + BN, \end{cases}$$

e nell'ipotesi che nel punto z_0 del campo del moto si formi un vortice di intensità I , il potenziale complesso $f = \varphi + i\psi$, la cui parte immaginaria ψ soddisfi sul contorno alle (2), con riferimento al semipiano Z , risulta ⁽¹⁾

(1) Infatti la funzione f deve essere infinita nel punto S ($Z = -a$), e nel punto Z_0 . D'altra parte sul contorno (asse reale X), la (3) porge $\psi = \frac{Q}{2\pi} \arg(Z + a)$; ma $\arg(Z + a) = \begin{cases} \pi & \text{sopra } MS, \\ 0 & \text{» } SA + AB + BN \end{cases}$; perciò la (3) soddisfa alle condizioni (2).

$$(3) \quad f = \varphi + i\psi = \frac{Q}{2\pi} \log(Z+a) + \frac{I}{2i\pi} \log \frac{Z-Z_0}{Z-KZ_0},$$

ove $Z_0 = X_0 + iY_0 = \sqrt{\zeta_0^2 + a^2}$ e KZ_0 è il coniugato di Z_0 .

Dalla seconda delle (1) e dalla (3) si ricava

$$(4) \quad \zeta = \sqrt{Z^2 - a^2} \quad ; \quad \frac{d\zeta}{dZ} = \frac{Z}{\sqrt{Z^2 - a^2}};$$

$$(5) \quad \frac{df}{dZ} = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{Z+a} + \frac{I}{2i\pi} \left(\frac{1}{Z-Z_0} - \frac{1}{Z-KZ_0} \right);$$

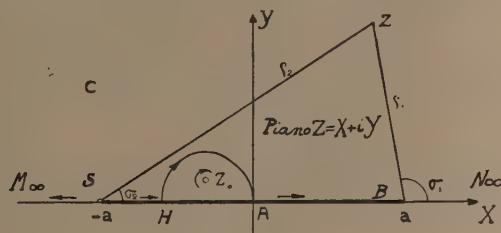


Fig. 2.

quindi la velocità complessa $w = u - iv$, di un punto generico del campo del moto, che com'è noto soddisfa alla relazione,

$$w = \frac{df}{d\zeta} = \frac{df}{dZ} \frac{dZ}{d\zeta};$$

risulta

$$(6) \quad w = \left[\frac{Q}{2\pi} \frac{1}{Z+a} + \frac{I}{2i\pi} \left(\frac{1}{Z-Z_0} - \frac{1}{Z-KZ_0} \right) \right] \frac{\sqrt{Z^2 - a^2}}{Z},$$

la quale in generale è infinita, oltre che nel punto S ($Z = -a$), e nel vortice ($Z = Z_0$), anche nel punto A ($Z = 0$).

Se vogliamo che la velocità sia finita nel punto A, dobbiamo imporre evidentemente la condizione che la quantità [] sia nulla per $Z = 0$, cioè che si abbia, dopo facili semplificazioni,

$$(7) \quad \frac{Q}{a} + \frac{2IY_0}{X_0^2 + Y_0^2} = 0.$$

3. Ciò posto, calcoliamo ora la velocità di spostamento $w_0 = u_0 - iv_0$ del vortice. Essa sarà data da ⁽¹⁾

$$w_0 = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \left(w - \frac{I}{2i\pi} \frac{1}{\zeta - \zeta_0} \right),$$

(1) Cfr. H. VILLAT, loc. cit., p. 154.

cioè, considerando z e z_0 funzioni rispettivamente di Z e Z_0 , per la (6) si ha

$$\begin{aligned} w_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \left[\frac{Q}{2\pi} \frac{1}{Z+a} + \frac{I}{2i\pi} \left(\frac{1}{Z-Z_0} - \frac{1}{Z-KZ_0} \right) \right] \frac{\sqrt{Z^2-a^2}}{Z} - \frac{I}{2i\pi} \frac{1}{z-z_0} \right\} = \\ = \frac{\sqrt{Z_0^2-a^2}}{Z_0} \left[\frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{1}{Z_0+a} - \frac{I}{2i\pi} \frac{1}{Z_0-KZ_0} \right] + \\ + \frac{I}{2i\pi} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{\sqrt{Z^2-a^2}}{Z(Z-Z_0)} - \frac{1}{\sqrt{Z^2-a^2} - \sqrt{Z_0^2-a^2}} \right], \end{aligned}$$

ovvero

$$(8) \quad w_0 = \frac{\sqrt{Z_0^2-a^2}}{Z_0} \left[\frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{1}{Z_0+a} - \frac{I}{2i\pi} \frac{1}{Z_0-KZ_0} \right] + \frac{I}{2i\pi} \cdot \frac{a^2}{2Z_0^2\sqrt{Z_0^2-a^2}}.$$

Se vogliamo che la velocità di spostamento del vortice sia nulla, dobbiamo porre

$$2Z_0(Z_0-a^2) \left[\frac{Q}{Z_0+a} + \frac{iI}{Z_0-KZ_0} \right] - iIa^2 = 0,$$

cioè, semplificando ed eliminando il rapporto Q/I mediante la (7), dovrà aversi

$$-2Z_0(Z_0-a) a \left(\frac{1}{Z_0} - \frac{1}{KZ_0} \right) + \frac{2Z_0(Z_0^2-a^2)}{Z_0-KZ_0} - a^2 = 0,$$

che equivale alle due relazioni fra quantità reali

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{-4aY_0^2}{X_0^2+Y_0^2} (X_0^2-Y_0^2-aX_0) + X_0(X_0^2-3Y_0^2-a^2) = 0, \\ \frac{-4aY_0^3}{X_0^2+Y_0^2} (2X_0-a) + Y_0(3X_0^2-Y_0^2-2a^2) = 0. \end{cases}$$

Moltiplicando la 2ª di queste per il rapporto X_0/Y_0 e sottraendo dalla relazione così ottenuta la prima delle (9), si deduce facilmente

$$(9') \quad Y_0^2 = \frac{X_0(2X_0^2-a^2)}{2(2a-X_0)}.$$

Sostituendo questo valore nella prima delle (9) e riducendo a forma intera si ottiene

$$X_0(24X_0^3-24aX_0^2-3a^2X_0+8a^3) = 0.$$

Esclusa la soluzione $X_0 = Y_0 = 0$, altrimenti per la (8) risulterebbe w_0 infinita, anzichè nulla, come vogliamo, la X_0 dovrà essere radice della equazione

$$24 X_0^3 - 24 a X_0^2 - 3 a^2 X_0 + 8 a^3 = 0.$$

Ora è facile vedere che questa equazione ammette una sola radice reale che è negativa e compresa fra $-a/\sqrt{2}$ e $-a/2$, cioè con approssimazione

$$X_0 = \sim -0.512 a,$$

in corrispondenza della quale la (9') dà un valore reale per Y_0 , che approssimativamente risulta (escludendo il segno negativo),

$$Y_0 = \sim 0.22 a.$$

Nel punto X_0, Y_0 così trovato si ha pertanto una posizione di arresto del vortice a cui corrisponde una soluzione permanente del problema. Un altro vortice simmetrico del precedente rispetto all'asse MN si avrà evidentemente quando si consideri tutto il campo del moto $C + C'$.

4. Non è privo di interesse determinare ancora l'equazione della linea di flusso che limita il campo del vortice, sulla quale deve essere $\psi = 0$.

Dalla (3) si ricava facilmente

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \tan^{-1} \frac{Y}{X+a} - \frac{I}{4\pi} \log \frac{(X-X_0)^2 + (Y-Y_0)^2}{(X-X_0)^2 + (Y+Y_0)^2},$$

e questa, uguagliandola a costante, ed esprimendo X ed Y in funzione di x e y , per mezzo delle (1), dà l'equazione delle linee di flusso.

In particolare l'equazione della linea di flusso che limita il campo del vortice, eliminando il rapporto I/Q per mezzo della (7), risulta

$$(10) \quad \frac{Y}{X+a} - \tan \left[\frac{X_0^2 + Y_0^2}{4aY_0} \log \frac{(X-X_0)^2 + (Y+Y_0)^2}{(X-X_0)^2 + (Y-Y_0)^2} \right] = 0.$$

Dividendo ambo i membri della (10) per Y e passando al limite per $Y \rightarrow 0$, si ottiene

$$\frac{1}{X+a} - \frac{X_0^2 + Y_0^2}{a[(X-X_0)^2 + Y_0^2]} = 0,$$

la quale è soddisfatta per $X = 0$ (punto A), e per

$$X = X_1 = 2X_0 + (X_0^2 + Y_0^2)/a.$$

Cioè la linea di flusso che limita il campo del vortice passa per il punto A e per il punto H del profilo di ordinata $y_1 = \sqrt{a^2 - X_1^2}$. Chiamando ψ_0 il primo membro della (10) si verifica inoltre che

$$\lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ Y \rightarrow 0}} \frac{dY}{dX} = - \lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ Y \rightarrow 0}} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial X} / \frac{\partial \psi_0}{\partial Y} \right) = \infty,$$

e così pure

$$\lim_{\substack{X \rightarrow X_1 \\ Y \rightarrow 0}} \frac{dY}{dX} = \infty.$$

In corrispondenza si ricava

$$\lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ Y \rightarrow 0}} \frac{dy}{dx} = \infty \quad ; \quad \lim_{\substack{X \rightarrow X_1 \\ Y \rightarrow 0}} \frac{dy}{dx} = 0;$$

cioè, la linea di flusso che limita il campo del vortice nasce tangenzialmente al profilo rigido nel punto A, e lo incontra ortogonalmente nel punto H.

Meccanica. — *Sopra un problema idrodinamico relativo ad un arco di circonferenza.* Nota di B. CALDONAZZO, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

Un recente studio del Cisotti⁽²⁾ per la valutazione delle azioni dinamiche sopra un ostacolo circolare, munito di una sorgente addossata e immerso in una corrente traslocircolatoria, mi ha condotto a considerare il seguente problema, in cui l'ostacolo è una lamina piegata ad arco di circonferenza e la sorgente è aperta nel centro della circonferenza.

In questa Nota preliminare espongo rapidamente i risultati, per rilevare che, quando l'arco si chiude a circonferenza, nella regione esterna si ha come caso limite il moto considerato dal Cisotti, con la sorgente nel punto dove l'arco si è chiuso. In questo punto però la lamina costituente l'ostacolo va considerata *interrotta*. Attraverso questa interruzione si stabilisce il collegamento del moto esterno con quella della regione interna alla circonferenza, il quale ultimo è dovuto alla sorgente posta nel centro ed a quella aperta sul contorno nello stesso punto dove si apre quella rivolta

(1) Nella seduta del 1° marzo 1936.

(2) U. CISOTTI, *Un criterio di valutazione delle azioni dinamiche sopra un ostacolo circolare munito di una sorgente e immerso in una corrente traslocircolatoria*. Questi « Rendiconti », vol. XXII (2° sem. 1935), p. 275.

all'esterno, sorgenti di portata eguale ed opposta attraverso le quali effluisce tutta la portata della sorgente centrale.

Quindi, come è ovvio nel caso dell'arco aperto, anche nel caso dell'arco chiuso il contorno dell'ostacolo è costituito tanto dal bordo esterno che da quello interno dell'arco.

Nel valutare la risultante delle azioni dinamiche occorre quindi tener conto di entrambi i bordi. Tale risultante risulta sempre finita, anche per l'arco chiuso. In questo ultimo caso essa si compone della nota spinta del Rayleigh, indipendente dalla sorgente, e del cosiddetto *effetto di zavorra* valutato dal Cisotti.

Esaminando le due sorgenti, una interna e l'altra esterna, poste nello stesso punto del contorno, nel caso dell'arco chiuso, se si inverte la velocità di una di queste, per esempio di quella interna, le due sorgenti insieme formerebbero un'unica sorgente da cui il liquido uscirebbe, o entrerebbe se fosse un pozzo, egualmente in tutte le direzioni. Ma se il campo interno, cerchio, avesse un'altra configurazione o anche se la sorgente interna avesse un'altra posizione il moto liquido interno ne risulterebbe modificato ed assieme ad esso in generale anche la sorgente sul contorno, che potrebbe perdere in particolare l'accennata simmetria. Ciò fa pensare che il problema idrodinamico relativo ad un ostacolo munito di sorgente involga essenzialmente la natura della sorgente. Nel caso di una sorgente, simmetrica come quella considerata, aperta in un punto del contorno, in cui questo ammette curvatura determinata, si potrà in particolare pensare ricavata in seno all'ostacolo una cavità circolare, osculatrice al contorno nel punto dove si è posta la sorgente, aprendo nel centro della cavità una sorgente di portata eguale a quella che la sorgente al contorno emette nel campo esterno. Nella valutazione delle azioni dinamiche si dovrà tener conto anche di quelle esercitate sul contorno della cavità.

Non sempre la cavità accennata può essere contenuta nell'ostacolo, come ad esempio nel caso di ostacoli lineari, quale la lamina rettilinea. In tal caso si potrebbe forse diramare, a partire dalla tangente all'ostacolo nel punto dove è aperta la sorgente e dalla parte opposta a quella dove effluisce il liquido, un semipiano (foglio di Riemann), sovrapposto al piano del moto e prendere questo semipiano come sostegno della cavità da cui ha origine la sorgente.

Mi limito a questo semplice cenno, riservando ad un ulteriore studio una esposizione più estesa della questione.

SORGENTE. — Nel piano $x + iy = z$ si consideri il moto liquido dovuto ad una sorgente puntiforme, simmetrica, posta nell'origine, di portata q , in presenza dell'ostacolo costituito da una lamina rigida foggata ad arco di circonferenza, di raggio a ed apertura angolare 2α (fig. 1). Il centro della circonferenza è nell'origine e l'asse delle y positive dimezza l'arco.

La determinazione della velocità w_s del moto liquido si può fare agevolmente ricorrendo ad una nota trasformazione conforme del piano tagliato dall'arco in un piano forato da un cerchio. Qui mi limito a dare senz'altro la espressione della w_s , direttamente in funzione della z :

$$(1) \quad w_s = \frac{q}{2\pi} \frac{z - ia}{\pm z \sqrt{A}},$$

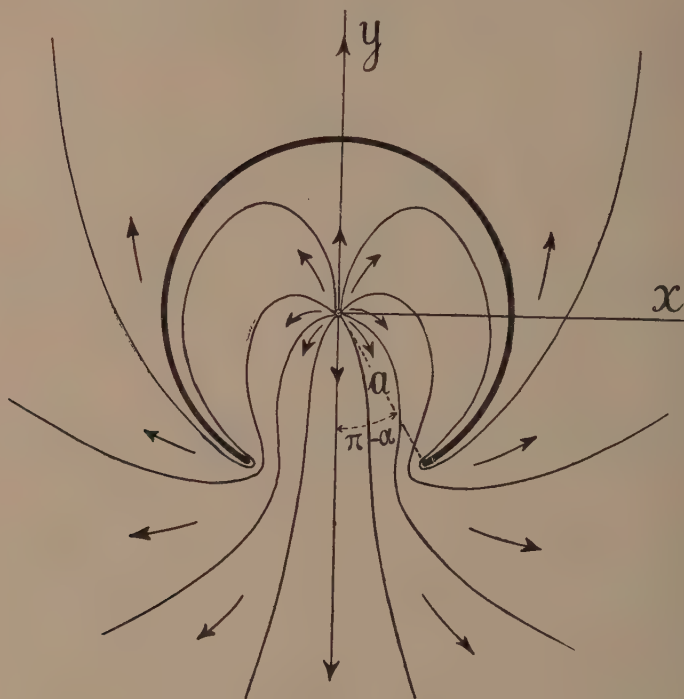


Fig. 1.

dove per semplicità si è posto

$$A = (z - ia e^{-i\alpha})(z - ia e^{i\alpha}),$$

e dove la determinazione del radicale va fatta in modo che il segno + vale sul bordo convesso dell'arco, il segno — su quello concavo. Non è difficile controllare che la w_s sull'arco risulta tangente ad esso e che per $|z|$ molto grande essa tende a

$$\frac{q}{2\pi z},$$

che è la velocità dovuta alla stessa sorgente, ma senza la presenza dell'ostacolo. Risultano poi immediati i punti di arresto, affacciati sui due bordi,

nel punto di mezzo dell'arco $\chi = ia$ e le singolarità di w_s negli estremi dell'arco (cuspidi salienti), $\chi = ia e^{-ia}$, $\chi = ia e^{ia}$ e nella sorgente $\chi = 0$.

Applicando la nota formula del Blasius, per determinare la risultante delle pressioni dinamiche sull'arco,

$$R_s = R_{sy} + iR_{sx} = -\frac{\rho}{2} \int w_s^2 d\chi,$$

dove ρ è la densità del liquido e l'integrale va esteso ai due bordi dell'arco, si trova che detta risultante è nulla:

$$(2) \quad R_s = 0.$$

Il risultato è quasi ovvio del resto (e sarebbe immediato se la w_s non diventasse infinita negli estremi dell'arco) qualora si rilevi che secondo la (1) in punti affacciati sui due bordi dell'arco le velocità sono eguali ed opposte cosicchè negli stessi due punti le pressioni sono eguali.

Il momento risultante delle pressioni dinamiche, rispetto al centro dell'arco, è manifestamente nullo.

CORRENTE TRASLATORIA. — Una corrente traslatoria, la cui velocità w_t all'infinito ha il valore V e forma con l'asse delle x l'angolo β , investe l'arco sopra considerato. La w_t è stata determinata dal Bickley⁽¹⁾ ed ha l'espressione

$$(3) \quad w_t = \frac{V}{2} \left\{ e^{-i\beta} - \frac{a^2 e^{i\beta}}{\chi^2} \right\} + \\ + \frac{V}{\pm 2\sqrt{A}} \left\{ e^{-i\beta} (\chi - ia \cos \alpha) + \frac{a^2 e^{i\beta}}{\chi^2} (\chi \cos \alpha - ia) \right\},$$

valendo ancora la convenzione già fatta relativa al segno del radicale.

La risultante delle pressioni dinamiche dovute alla sola corrente traslatoria, d'accordo col Bickley citato, è

$$(4) \quad R_t = R_{ty} + iR_{tx} = \frac{I}{2} \pi \rho V^2 a \sin^2 \alpha \{ 1 - e^{2i\beta} \cos \alpha \}.$$

CORRENTE CIRCOLATORIA. — Una corrente circolatoria, attorno all'arco, di circolazione C , ha la velocità (che si calcola facilmente ricorrendo alla trasformazione cui si è accennato sopra),

$$(5) \quad w_c = \frac{C}{4\pi i\chi} \left\{ 1 + \frac{\chi + ia}{\pm \sqrt{A}} \right\},$$

(1) W. G. BICKLEY, *Some Two-Dimensional Potential Problems connected with the Circular Arc*. « Philosophical Magazine », 1918, vol. XXXV, p. 396; vol. XXXVI, p. 273.

colla solita convenzione sul doppio segno. Questa velocità non ha zeri al finito, per $|\zeta|$ molto grande si comporta come $C/2\pi i\zeta$, cioè come se fosse dovuta ad un vortice di intensità C , posto nell'origine; diventa infinita negli estremi dell'arco, dove A si annulla ed è regolare dovunque altrove, anche nell'origine, dove in particolare assume il valore

$$\frac{C}{4\pi a} (1 + \cos \alpha).$$

La risultante delle azioni dinamiche dovute a questa corrente è

$$(6) \quad R_c = R_{cy} + iR_{cx} = \frac{\rho C^2}{8\pi a} (1 + \cos \alpha);$$

che agisce secondo l'asse di simmetria dell'arco, verso l'esterno.

COMPOSIZIONE DEI TRE MOTI. — Combinando le tre correnti traslatoria, circolatoria e quella dovuta alla sorgente, il moto risultante, compatibile con la presenza dell'ostacolo, ha la velocità $w = w_t + w_c + w_s$. La risultante delle pressioni dinamiche sui due bordi

$$R = R_y + iR_x = -\frac{\rho}{2} \int \{w_t + w_c + w_s\}^2 d\zeta$$

risulta somma delle tre R_t, R_c, R_s , precedentemente valutate con le (4), (6) e (2), e dei contributi recati dai doppi prodotti nello sviluppo del quadrato, che sono dati, con evidente significato dei simboli, da

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{tc} = -\frac{1}{4} \rho VC \{ e^{-i\beta} (3 - \cos \alpha) + e^{i\beta} (\cos \alpha + \cos 2\alpha) \}, \\ R_{ts} = -\frac{1}{2} \rho q V i e^{i\beta} \sin^2 \frac{\alpha}{2} (1 + 3 \cos \alpha), \\ R_{cs} = \frac{1}{2\pi a} \rho q C i \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \end{array} \right.$$

PASSAGGIO DALL'ARCO APERTO ALLA CIRCONFERENZA. — Facendo crescere l'ampiezza 2α dell'arco, per α prossima a π l'arco diviene una circonferenza con una piccola interruzione, in corrispondenza del punto $\zeta = -ia$, attraverso alla quale deve effluire tutta la portata della sorgente ed attraverso alla quale penetra la corrente traslocircolatoria. Si capisce che in prossimità dell'apertura il valore della velocità deve diventare molto grande anzi debba crescere oltre ogni limite finito al restringersi indefinito dell'apertura stessa. In pari tempo la corrente traslocircolatoria penetra sempre meno nella regione interna, per restarne esclusa quando gli estremi dell'arco si

avvicinano indefinitamente. Ciò è confermato dai valori limiti w_i^* , w_i^* , w_e^* che le tre velocità (1), (3), (5) assumono per $\alpha \rightarrow \pi$; nella *regione esterna*, cioè per $|\zeta| \geq a$,



Fig. 2.

$$(8) \quad w_i^* = \frac{q}{2\pi} \frac{\zeta - ia}{\zeta(\zeta + ia)} \quad , \quad w_i^* = V \left\{ e^{-i\beta} - \frac{a^2 e^{i\beta}}{\zeta^2} \right\} \quad , \quad w_e^* = \frac{C}{2\pi\zeta} ;$$

nella *regione interna*, cioè per $|\zeta| \leq a$,

$$(9) \quad w_i^* = -\frac{q}{2\pi} \frac{\zeta - ia}{\zeta(\zeta + ia)} \quad , \quad w_i^* = 0 \quad , \quad w_e^* = 0 .$$

La prima delle (8) è la velocità, già stabilita dal Masotti⁽¹⁾ provocata, nel liquido esterno al cerchio dalla sorgente aperta sul contorno nel punto $\zeta = -ia$, ma della quale occorre considerare soltanto il flusso nella *regione esterna*, flusso cui compete, sempre in detta regione, la portata q

(1) A. MASOTTI, *Moti piani indotti da una sorgente addossata ad un ostacolo*. « Acta Pont. Acad. Scient. Novi Lyncei », Annus LXXXVII (1933-34), p. 253.

(metà della portata che competerebbe alla sorgente se il liquido potesse effluire liberamente in tutte le direzioni). Le altre due delle (8) danno le note velocità di una corrente traslatoria e di una circolatoria in presenza di un ostacolo circolare. Internamente le (9) mostrano che la corrente traslocircolatoria svanisce; rimane il moto la cui velocità è definita dalla prima delle (9), moto dovuto alla sorgente nel centro, di portata q e dalla sorgente sul contorno, affacciata a quella rivolta al campo esterno, di portata (rispetto al campo interno) — q (fig. 2).

Le risultanti delle azioni dinamiche, valutate sia direttamente per questo caso $\alpha = \pi$, sia dedotte da quelle precedentemente trovate (2), (4), (6) e (7) facendovi $\alpha = \pi$, sono:

$$R_s^* = R_t^* = R_c^* = 0 \quad , \quad R_{tc}^* = -\rho V C e^{-i\beta} \quad , \quad R_{ts}^* = \rho q V i e^{i\beta} \quad ,$$

$$R_{cs}^* = \frac{\rho q C}{2\pi a} i \quad .$$

La risultante complessiva è pertanto

$$R^* = -\rho V C e^{-i\beta} + \rho q V i e^{i\beta} + \frac{\rho q C}{2\pi a} i \quad ,$$

nel primo termine della quale si riconosce la spinta trasversale del Rayleigh, dovuta alla corrente traslocircolatoria, mentre gli ultimi due termini rappresentano separatamente l'effetto di zavorra dovuto, il primo alla corrente traslatoria, il secondo alla corrente circolatoria, stabiliti dal Cisotti nella Nota citata.

Meccanica. — *Questioni di elasticità vincolata.* — IV. *Significato geometrico del vincolo.* Nota di E. VOLTERRA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Facendo seguito a quattro precedenti Note pubblicate su questi «Rendiconti» ⁽²⁾ riprendo lo studio delle deformazioni dei solidi elastici, di cui una dimensione è preponderante, ad asse sia rettilineo che curvilineo, nell'ipotesi di elasticità vincolata.

9. SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL VINCOLO.

Nei riguardi del vincolo espresso dall'ipotesi che il vettore spostamento elastico sia del tipo

$$(1) \quad U = \lambda y + \mu z + v$$

essendo x l'ascissa curvilinea dell'asse del solido, y e z le coordinate trasversali, λ , μ e v tre vettori, funzioni *a priori* incogniti della sola x , già ebbi a mostrare nella prima Nota come ciò implicasse la conservazione delle sezioni piane trasversali. Per altro una tale conservazione non esaurisce tutto il contenuto geometrico della posizione (1). Voglio ora precisare che cosa in esso è contenuto di più.

Fissato un generico elemento materiale del solido, indichiamone con x, y, z , le coordinate della posizione P da esso occupato allo stato naturale e con x', y', z' le coordinate della posizione P' nello stato deformato.

Dalla Nota I abbiamo:

$$(2) \quad \begin{cases} x' = x + u = x + \lambda^1 y + \mu^1 z + v^1, \\ y' = y + v = y + \lambda^2 y + \mu^2 z + v^2, \\ z' = z + w = z + \lambda^3 y + \mu^3 z + v^3, \end{cases}$$

(1) Nella seduta del 1° marzo 1936.

(2) Vedi E. VOLTERRA: 1°) *Elasticità vincolata e sua schematizzazione matematica*, vol. XVI, ser. 6^a, 2° sem., fasc. 5 e 6, settembre 1932; 2°) *Questioni di elasticità vincolata*: 1° *Componenti di deformazione e potenziale elastico in coordinate qualsivogliano*, vol. XX, id. id., fasc. 11, dicembre 1934; 3°) *Id. id. id.*: 2° *Forma appropriata del ds^2 e conseguenze del vincolo geometrico*, vol. XX, id. id., fasc. 12, dicembre 1934; 4°) *Id. id. id.*: 3° *Espressioni della θ e della ψ nel caso generale. Le equazioni dell'elasticità vincolata per solidi la cui fibra baricentrica è piana*, vol. XXI, id. id., fasc. 1, gennaio 1935; ved. pure E. VOLTERRA, *Elasticità libera ed elasticità vincolata. Applicazione del concetto di elasticità vincolata*. «Atti del Congresso Internazionale di Matematica di Zurigo», settembre 1932.

indicando con u, v, w le componenti del vettore $(P' - P) = \mathbf{U}$ e con λ^i, μ^i, ν^i ($i = 1, 2, 3$) quelle dei vettori λ, μ e ν .

Il passaggio dalla posizione $P(x, y, z)$ alla posizione $P'(x', y', z')$ si può immaginare decomposto in due trasformazioni successive: una prima T_1 che porta P in un punto ausiliario P_1 e una trasformazione T_2 che porta P_1 in P' :

$$(3) \quad T_1 \begin{cases} (1) & x_1 = x \\ (2) & y_1 = y + \lambda^2 y + \mu^2 z + \nu^2, \\ (3) & z_1 = z + \lambda^3 y + \mu^3 z + \nu^3; \end{cases} \quad T_2 \begin{cases} x' = x_1 + \lambda^1 y_1 + \mu^1 z_1 + \nu^1, \\ y' = y_1, \\ z' = z_1, \end{cases}$$

Per rendersene conto basta sostituire materialmente nella T_2 in luogo di x_1, y_1, z_1 , i loro valori forniti dalla T_1 (cioè formare il prodotto operativo $T_2 T_1$) osservando che nel nostro ordine di approssimazione $\lambda^1 y_1, \mu^1 z_1$ differiscono di quantità trascurabili da $\lambda^1 y, \mu^1 z$.

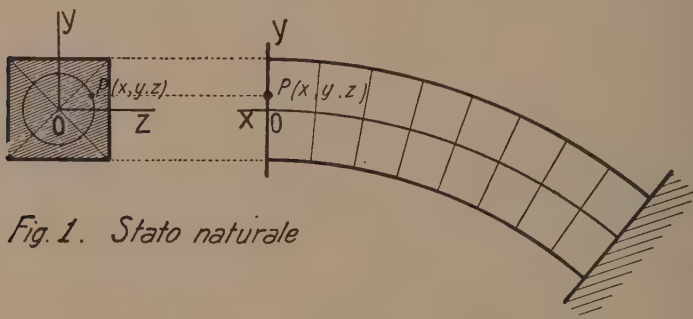


Fig. 1. Stato naturale

Analizziamo separatamente queste due trasformazioni.

Nella trasformazione T_1 è $x = x_1$; si tratta quindi di trasformazione che opera in un generico piano normale all'asse del solido, sicchè in questa prima operazione le singole sezioni normali non solo si conservano piane ma addirittura si mutano ciascuna in se stessa. Tutto è ricondotto a renderci conto della corrispondenza indotta in un generico piano normale dalle formule (2) e (3) della T_1 .

Si tratta di una trasformazione lineare e quindi sotto l'aspetto geometrico di una affinità perchè le rette all'infinito si corrispondono. Come è noto, nell'affinità, punteggiate corrispondenti sono simili.

Interpretazione geometrica è notoriamente che l'affinità si riduce ad una deformazione pura accompagnata da un moto rigido. Basta infatti porre:

$$f = \frac{1}{2} [\lambda^2 y^2 + (\mu^2 + \lambda^3) y z + \mu^3 z^2]; \quad \omega = \frac{1}{2} (\mu^2 - \lambda^3); \quad a_y = \nu^2; \quad a_z = \nu^3$$

perchè la (2) e la (3) della T_1 si possano mettere sotto la forma:

$$(4) \quad \begin{cases} y_1 - y = \frac{df}{dy} + \omega \bar{z} + a_y, \\ \bar{z}_1 - \bar{z} = \frac{df}{d\bar{z}} - \omega y + a_{\bar{z}}, \end{cases}$$

in cui $a_y, a_{\bar{z}}$ vanno interpretate come componenti di un vettore α (del piano $y\bar{z}$) ω come componente secondo l'asse delle x di un vettore ω normale al piano.

Nel caso in cui la deformazione sia infinitesima i tre addendi del secondo membro si possono riguardare provenienti da un prodotto operativo di tre trasformazioni successive:

da una pura deformazione, che fa passare da P al punto P' definito da

$$(P' - O) = (P - O) + \text{grad}_P f,$$

da una rotazione che fa passare da P' a P'' definito da

$$(P'' - O) = (P' - O) + \omega \wedge (P' - O),$$

da una traslazione che fa passare da P'' a P_1 definito da

$$(P_1 - O) = (P'' - O) + \alpha.$$

Infatti basta sostituire in quest'ultima $(P'' - O)$ col suo valore in funzione di $(P' - O)$ e questo col suo valore in funzione di $(P - O)$ e trascurare i termini d'ordine superiore per ritrovare le (4).

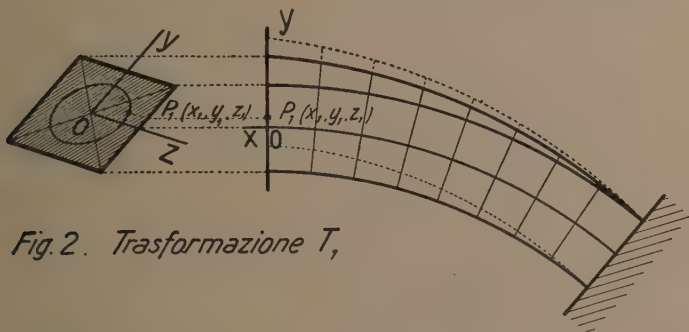


Fig. 2. Trasformazione T_1 ,

Passiamo adesso alla trasformazione spaziale T_2 . Per effetto di essa ogni retta parallela all'asse delle x scorre (rigidamente) su se stessa; l'ampiezza dello scorrimento $x^1 - x_1$ variando da retta a retta.

In virtù della prima delle T_2 è

$$x^1 - x_1 = \lambda^1 y_1 + \mu^1 \bar{z}_1 + \nu^1$$

il che mostra intanto che $x^i - x_i$ si annulla ogni qualvolta è

$$\lambda^i y_i + \mu^i z_i + v^i = 0.$$

Riferendoci al piano π_i normale all'asse (il quale non è altro che π trasformato in base alla T_1) le rette parallele all'asse (e quindi normali a π_i) possono immaginarsi individuate dalla loro intersezione Q con π_i .

Vogliamo rendere espressiva per ciascuna delle rette in questione la dipendenza dello scorrimento dalla rispettiva intersezione Q . Basta all'uopo interpretare la prima delle formule T_2 cioè

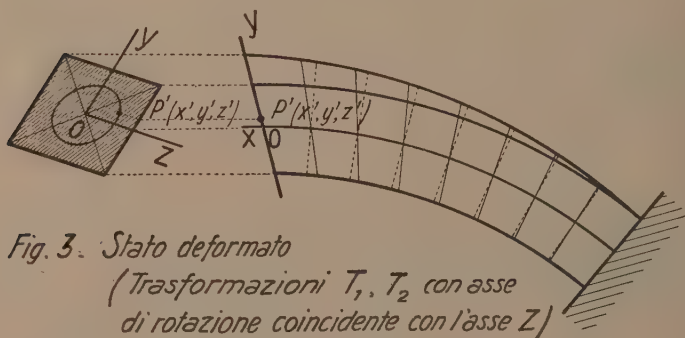
$$x^i - x_i = \lambda^i y_i + \mu^i z_i + v^i$$

la quale può essere scritta così

$$x^i - x_i = \sqrt{\mu^{i2} + v^{i2}} \left\{ \frac{\lambda^i y_i + \mu^i z_i + v^i}{\sqrt{\mu^{i2} + v^{i2}}} \right\}.$$

Ne desumiamo che lo scorrimento è proporzionale alla distanza di Q dalla retta r del piano π_i , definita dall'equazione:

$$\lambda^i y_i + \mu^i z_i + v^i = 0.$$



Atteso il carattere infinitesimo del suddetto scorrimento $x^i - x_i = \lambda^i y_i + \mu^i z_i + v^i$ normale piano π_i , lo possiamo anche interpretare come una rotazione rigida intorno alla retta r . Ricordando che la T_1 operava sulle singole sezioni normali, trasformandole in sè, mentre la T_2 provoca una rotazione della sezione trasformata intorno alla retta r , ritroviamo in particolare la proprietà già rilevata nella prima Nota, che, nelle deformazioni elastiche sottoposte al vincolo del tipo considerato, cioè per effetto sovrapposto dalle due trasformazioni T_1 T_2 , le sezioni normali all'asse si conservano piane. In più abbiamo ora illustrate le modalità geometriche con cui opera il vincolo.

Meccanica. — *Deduizione unitaria delle equazioni dinamiche dell'Appell e del Maggi.* Nota di E. GUGINO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Le equazioni dinamiche di Eulero-Lagrange secondo G. Hamel.* Nota di E. GUGINO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geofisica (Meteorologia). — *Relazioni tra la temperatura invernale e la temperatura estiva a Roma.* Nota di GABRIELLA CONTI presentata⁽¹⁾ dal Socio G. ARMELLINI.

Questo studio ha per oggetto l'esame dei massimi estivi e dei minimi invernali della temperatura di Roma e le eventuali relazioni tra le variazioni degli uni e degli altri.

Ho avuto a mia disposizione 62 anni di osservazioni della Specola Capitolina, dove dal 1873 si nota giorno per giorno, tra gli altri dati meteorologici, la temperatura massima e la temperatura minima delle 24 ore segnata da appositi termometri a massima e a minima.

Ho ristretto le ricerche alle temperature minime dei tre mesi dell'inverno meteorologico (dicembre, gennaio e febbraio) e alle temperature massime dei tre mesi dell'estate meteorologico (giugno, luglio, agosto). Per la grande mole del materiale è stato necessario un raggruppamento per decenni; cioè in ciascun mese invernale ho tenuto conto dei tre minimi assoluti, raggiunti rispettivamente nelle tre decadi, mentre per i mesi estivi ho tenuto conto dei massimi assoluti di ciascuna decade.

Ho così avuto, per ciascun anno, nove temperature minime invernali e nove temperature massime estive, il cui insieme serve molto bene a dare un'idea dell'andamento invernale ed estivo della temperatura nella nostra città.

Non potendo riportare qui per esteso tutti questi dati (che saranno pubblicati in altra sede) presento per ogni anno un'unica temperatura minima invernale risultante dalla media dei nove minimi delle nove decadi dell'in-

(1) Nella seduta del 1° marzo 1936.

TABELLA.

Anno	In- verno	Estate	Differenze invernali	Differenze estive	Anno	In- verno	Estate	Differenze invernali	Differenze estive
1874	— 1.19	32.23	—	—	1905	— 1.28	31.68	— 3.92	— 0.33
75	+ 0.01	32.51	+ 1.20	+ 0.28	06	+ 0.31	30.87	+ 1.59	— 0.81
76	— 0.37	31.01	— 0.38	— 1.50	07	— 0.37	31.02	— 0.68	+ 0.15
77	+ 2.17	32.42	+ 2.54	+ 1.41	08	— 0.02	31.61	+ 0.35	+ 0.59
78	+ 0.27	32.27	— 1.90	— 0.15	09	— 0.79	30.09	— 0.77	— 1.52
79	+ 1.44	32.00	+ 1.17	— 0.27	10	+ 1.53	29.96	+ 2.32	— 0.13
80	— 2.33	31.31	— 3.77	— 0.69	11	0.00	32.36	— 1.53	+ 2.40
81	+ 0.69	32.73	+ 3.02	+ 1.42	12	+ 0.90	30.88	+ 0.90	— 1.48
82	+ 0.08	30.83	— 0.61	— 1.90	13	+ 0.51	30.26	— 0.39	— 0.62
83	+ 1.02	31.13	+ 0.94	+ 0.30	14	+ 0.70	30.33	+ 0.19	+ 0.07
84	— 0.59	29.86	— 1.61	— 1.27	15	+ 2.06	30.61	+ 1.36	+ 0.28
85	+ 0.76	32.50	+ 1.35	+ 2.64	16	+ 2.13	32.31	+ 0.07	+ 1.70
86	+ 0.34	30.53	— 0.42	— 1.97	17	+ 1.43	31.86	— 0.70	— 0.45
87	— 0.44	32.39	— 0.78	+ 1.86	18	— 0.59	30.18	— 2.02	— 1.68
88	— 0.97	31.47	— 0.53	— 0.92	19	+ 1.16	31.09	+ 1.75	+ 0.91
89	0.00	31.58	+ 0.97	+ 0.11	20	+ 1.39	32.10	+ 0.23	+ 1.01
90	— 1.20	32.46	— 1.20	+ 0.88	21	+ 2.33	31.11	+ 0.94	— 0.99
91	— 2.14	31.26	— 0.94	— 1.20	22	+ 0.10	32.42	— 2.23	+ 1.31
92	+ 0.68	32.64	+ 2.82	+ 1.38	23	+ 0.76	31.03	+ 0.66	— 1.39
93	— 1.03	31.48	— 1.71	— 1.16	24	+ 0.77	31.19	+ 0.01	+ 0.16
94	— 0.28	31.67	+ 0.75	+ 0.19	25	+ 1.86	31.47	+ 1.09	+ 0.28
95	— 0.87	31.87	— 0.59	+ 0.20	26	+ 1.64	29.90	— 0.22	— 1.57
96	— 0.81	31.28	+ 0.06	— 0.59	27	+ 0.86	32.84	— 0.78	+ 2.94
97	+ 1.44	32.93	+ 2.25	+ 1.65	28	+ 1.72	33.57	+ 0.86	+ 0.73
98	0.00	31.90	— 1.44	— 1.03	29	— 1.80	33.09	— 3.52	— 0.48
99	+ 1.83	30.81	+ 1.83	— 1.09	30	+ 1.76	31.76	+ 3.56	— 1.33
1900	+ 1.49	31.18	— 0.34	+ 0.37	31	+ 1.20	32.88	— 0.56	+ 1.12
01	— 0.73	31.43	— 2.22	+ 0.25	32	— 0.87	31.54	— 2.07	— 1.34
02	+ 1.36	31.59	+ 2.09	+ 0.16	33	+ 2.16	30.71	+ 3.03	— 0.83
03	+ 0.71	30.44	— 0.65	— 1.15	34	+ 1.51	31.16	— 0.65	+ 0.45
04	+ 2.64	32.01	+ 1.93	+ 1.57	35	+ 0.36	33.18	— 1.15	+ 2.02

verno; ed un'unica temperatura massima estiva, risultante dalla media dei nove massimi delle nove decadi dell'estate. Queste temperature sono riportate nella tabella seguente, accanto alla indicazione del millesimo relativo ed alle rispettive differenze con le temperature dell'anno precedente.

Esaminando questa tabella con la dovuta attenzione si possono fare alcune interessanti considerazioni.

In primo luogo si nota la falsità del detto popolare « ad inverno freddo segue estate calda e viceversa ».

Infatti, facendo le medie generali dei 62 anni si trova che la temperatura minima invernale di Roma è in media $+ 0^{\circ},44$ e la temperatura massima $31^{\circ},56$.

Se diciamo, come è giusto, *inverno freddo* quello in cui la media dei minimi è inferiore a $+ 0^{\circ},44$, ed *estate calda* quella in cui la media dei massimi è superiore a $31^{\circ},56$, da uno sguardo alla tabella ci accorgiamo che su 62 anni, 31 volte il detto popolare ha avuto ragione, in quanto che ad un inverno freddo è seguita un'estate calda e viceversa, ma in altri 31 anni è avvenuto tutto il contrario onde il *si dice* non può essere assolutamente assunto come legge.

Ancora più interessante è la seconda considerazione, risultante dall'esame delle colonne delle differenze delle temperature di ciascun anno con le corrispondenti dell'anno precedente.

Si trova infatti che quando la media dei minimi invernali di un anno è superiore o inferiore alla stessa media dell'anno precedente, anche la media dei massimi estivi è rispettivamente superiore o inferiore alla corrispondente media dell'anno precedente. Ciò che si può enunciare più brevemente dicendo che *in generale la stagione estiva e la stagione invernale di un dato anno subiscono variazioni di temperatura dello stesso segno, rispetto alle corrispondenti stagioni dell'anno precedente.*

Su 62 anni, 41 seguono questa legge, onde si deduce che, con la probabilità del 70% dal comportamento dell'inverno può dedursi il comportamento dell'estate successiva.

Chiamiamo, tanto per intenderci, *anni regolari* quelli in cui si verifica la suddetta legge ed osserviamo, sulla tabella, come anni a differenze positive ed anni a differenze negative siano generalmente alternati e come i cambiamenti di comportamento del clima avvengano tra l'estate e l'inverno piuttosto che tra l'inverno e l'estate.

In 62 anni, solo 8 volte alla fine di un anno regolare non si è avuto cambiamento di segno alla differenza delle medie, onde siamo autorizzati a concludere che *alla fine dell'estate di un anno regolare si può predire col 90% di probabilità il comportamento del prossimo inverno, e con la probabilità del 63% il comportamento di tutto l'anno successivo.*

Astronomia. — *Sulle variazioni rapide di colore di alcune stelle.* Nota di M. MAGGINI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio E. BIANCHI.

Rimessa in efficienza la Specola di Collurania, dopo due anni d'inazione, e riprese le misure fotoelettriche l'autunno scorso, ho continuato nel programma di fotometria eterocromatica che comprende anche la ricerca dei cambiamenti rapidi di colore di alcune variabili, problema a cui accennai in una Nota presentata all'Accademia nel 1933 ⁽²⁾.

Una volta mostrato che la cellula fotoelettrica ha una tale selettività da rivelare delle variazioni di colore o, ciò che è lo stesso, della lunghezza d'onda effettiva, non apprezzate dall'occhio, per effettuare delle misure fotometriche che possano realmente garantire il grado di precisione che di solito si esige da tal genere di strumenti, non rimane che rendere monocromatiche le immagini. Ma rendere monocromatiche le immagini, e praticamente non vi è altro mezzo che adoperare dei filtri, vuol dire perdere qualche grandezza stellare, cioè limitare ancor più il campo di lavoro della fotometria fotoelettrica, già assai limitato.

Vi è però un metodo che, dispensando dall'impiego di filtri, permette di misurare le variazioni di colore contemporaneamente a quelle d'intensità: si tratta di alternare le misure con due cellule aventi due diverse sensibilità spettrali $\sigma_1(\lambda)$ e $\sigma_2(\lambda)$, per esempio una cellula al sodio ed una al rubidio o cesio. L'intensità della radiazione di una stella misurata alla distanza zenitale χ con una cellula di sensibilità $\sigma(\lambda)$ è data da ⁽³⁾:

$$J = \int_0^{\infty} e(\lambda) \sigma(\lambda) f(\lambda, \chi) \cdot d\lambda$$

in cui $e(\lambda)$ è la funzione che esprime la distribuzione dell'energia nello spettro della stella. L'indice di colore relativo alle due cellule sarà espresso da

$$I_{1,2} = -2.5 \log \frac{\int_0^{\infty} e(\lambda) \sigma_1(\lambda) f(\lambda, \chi) \cdot d\lambda}{\int_0^{\infty} e(\lambda) \sigma_2(\lambda) f(\lambda, \chi) \cdot d\lambda}.$$

(1) Nella seduta del 1° marzo 1936.

(2) Cfr. questi « Rendiconti », vol. XVIII, ser. 6ª, 2° sem., fasc. 5-6, 1933.

(3) A stretto rigore, per misure eseguite ad un rifrattore occorre prendere in conto anche la funzione $o(\lambda)$ che esprime la trasparenza dei vetri alle varie λ .

Indicando con t_1 e t_2 i tempi impiegati dall'indice dei due elettrometri a percorrere un uguale intervallo della scala, avremo allora:

$$I_{1,2} = 2,5 \log \left(\frac{t_2}{t_1} \right).$$

Quindi ogni variazione nella differenza di grandezza misurata fra le due cellule mantenendo invariate le condizioni strumentali, corrisponde ad una variazione di colore della stella.

Sia ora una stella variabile v confrontata con una stella s di sicura costanza tanto nello splendore che nel colore, se I_v e I_s sono gli indici di colore che ad esse competono e Δm_1 , Δm_2 le differenze $v-s$ misurate con le due cellule, avremo:

$$I_s - I_v = \Delta m_1 - \Delta m_2.$$

La differenza $\Delta m_1 - \Delta m_2$ rimarrà dunque costante se nella v non avviene alcun cambiamento di colore. Alternando le misure nelle due cellule si otterranno due serie di valori Δm_1 e Δm_2 i cui andamenti, nel caso in cui il colore della v cambi, debbono risultare opposti.

Questo metodo applicato a diverse stelle mi ha permesso di riconoscere dei rapidi cambiamenti di colore sopravvenuti nell'intervallo di pochi minuti, cambiamenti che, se le misure fossero state effettuate con una sola cellula, come di solito si usa, sarebbero passati inosservati o attribuiti ad errori di misura.

Una variabile che mi ha mostrato in modo assai evidente questo fenomeno, è la *AR Cass.* di tipo Algol, scoperta nel 1918 da Stebbins⁽¹⁾; la *AR Cass.* fa parte di un programma di ricerche intraprese a Collurania, sulla distribuzione del potere radiante sui dischi stellari, su cui riferirò a suo tempo. Lo strumento impiegato in queste misure è il fotometro doppio, di cui detti già una descrizione⁽²⁾; le cellule attualmente in uso sono una al sodio e l'altra al rubidio forniteci dal prof. Kunz e molto sensibili alle deboli illuminazioni: il potenziale acceleratore è per ambedue intorno ai 410 Volta, ciò che permette di adoperare un'unica linea elettrica. Il massimo della curva di sensibilità e l'equazione di colore sono⁽³⁾, per ciascuna cellula:

	Cell. Na	Cell. Rb
Max	350 $\mu\mu$	530 $\mu\mu$
Eq. di col.	1.05	0.70.

(1) « Publ. of the American astronom. Society », 4, 115, 1919; « Astrophysical Journal », LIV, 81, 1921.

(2) « Mem. della Soc. Astron. It. », vol. VI, 1932, p. 5.

(3) Valori dedotti da una prima determinazione e quindi provvisori.

La *AR Cass.* venne confrontata con le due stelle *1 Cass.* e *σ Cass.* aventi circa la stessa grandezza e lo stesso tipo spettrale. Lo schema secondo cui vennero eseguiti i confronti permetteva in ciascuna misura di ricavare la differenza di grandezza $1 - \sigma$ la cui costanza mi poneva al riparo da eventuali variazioni di colore delle stelle di confronto. A titolo di esempio riporto qui sotto due serie di misure riferentisi alle date 19 e 28 novembre 1935; i Δm sono stati ridotti alla *1 Cass.* e corretti di quei pochi millesimi che importa l'estinzione differenziale.

19 novembre 1935

t. m. E. C.	Δm		<i>d</i>
	Na	Rb	
18 ^h 30 ^m	+ 0.020	— 0.048	— 0.068
45	— .008	— .038	— .030
55	— .017	— .040	— .023
19 8	— .027	— .013	+ .014
20	— 0.052	+ 0.019	+ 0.071

28 novembre 1935

t. m. E. C.	Δm		<i>d</i>
	Na	Rb	
18 ^h 15 ^m	— 0.029	+ 0.062	+ 0.091
28	— .020	+ .048	+ .068
45	.000	+ .027	+ .027
58	+ .031	+ .020	— .011
19 10	+ .038	+ .011	— .027
23	+ .054	+ .008	— .046
35	+ 0.063	— 0.000	— 0.063

Dall'andamento delle differenze si deduce che alla data 19 novembre il colore della *AR Cass.* ha variato verso il giallo, mentre il 28 novembre ha variato verso l'azzurro. I tempi segnati nella prima colonna permettono

di apprezzare la rapidità con cui sono avvenuti questi cambiamenti, i quali, molto probabilmente, dato il loro ammontare di qualche centesimo di grandezza, sarebbero stati considerati come errori di misura, se le osservazioni fossero state eseguite con una sola cellula. È opportuno far notare che alle due date in esame la *AR Cass.* si trovava nel periodo di costanza di luce.

Un'altra variabile che presenta cambiamenti rapidi di colore è la β *Lyrae*, che osservo dal 1929; ma per quanto le misure effettuate siano numerose, non mi è stato finora possibile riconoscere un andamento sistematico in quei valori dell'indice di colore che scartano in modo brusco dall'andamento generale, di modo che essi debbono venir considerati come variazioni non periodiche.

Leggere fluttuazioni nell'indice di colore, ossia nella lunghezza d'onda effettiva, avvengono anche in stelle non variabili. Già il Guthnick ⁽¹⁾ fece rilevare le variazioni rapide di grandezza che hanno luogo in α *Lyrae*: queste sono accompagnate da variazioni di colore che, nel caso di misure eseguite con una sola cellula, possono venire attribuite alla grandezza; lo stesso dicasi per α *Canum Venaticorum* ed α *Virginis*, di cui ho già raccolte varie misure. Casi come quello della α *Coronae*, riportato nella mia Nota già citata, sembrano abbastanza frequenti; si tratta di spostamenti della lunghezza d'onda effettiva contemporanei a quelli della grandezza ed in senso tale che per un dato ricevitore selettivo (occhio, cellula ecc.) vi è compenso fra i due effetti. Ma di questo tratterò in una prossima Nota.

(1) « Sitzungsber. d. Preuss. Ak. d. Wiss., Phys. Math. Klasse », 1931, II.

Fisica. — *Sulla velocità dei neutroni lenti.* Nota di J. R. DUNNING, G. B. PEGRAM, G. A. MITCHELL, G. FINK, E. SEGRÈ, presentata ⁽¹⁾ dal Socio O. M. CORBINO.

Il problema della velocità raggiunta dai neutroni per effetto degli urti successivi con nuclei d'idrogeno nel metodo di rallentamento di Fermi e collaboratori ⁽²⁾, non ha ancora trovato una soluzione definitiva e specialmente la distribuzione delle velocità e il suo rapporto coi gruppi di neutroni dotati di coefficienti di assorbimento diversi, sono tuttora assai oscuri.

Moon e Tillmann ⁽³⁾ e successivamente Fermi e collaboratori ⁽⁴⁾, nonché Frisch e Sørensen ⁽⁵⁾ hanno mostrato che alcuni dei neutroni raggiungevano velocità paragonabili con quelle dell'agitazione termica a temperatura ambiente. Le esperienze di Moon e Tillmann, confermate da Fermi e collaboratori, si servono dell'effetto della temperatura del mezzo rallentante e sono di interpretazione molto difficile; anche i mezzi meccanici di Fermi e collaboratori e Frisch sono alquanto indiretti e comunque non possono dare alcuna indicazione sulla distribuzione di velocità dei neutroni.

Scopo di questa Nota è di riferire su alcune esperienze in cui la velocità dei neutroni del gruppo C ⁽⁶⁾ sono misurate con mezzi meccanici diretti. Si trovano neutroni con velocità dell'ordine di grandezza di quella dovuta all'agitazione termica.

Il selettore di velocità (fig. 1) è costituito da quattro ruote a settori di cadmio. Di queste due sono fisse (A) e due sono girevoli solidalmente (B). Gli spazi occupati dai settori di cadmio sono di 3,7°, quelli liberi di 3,5°. Poiché il Cd negli spessori usati (0,5 mm.) è completamente opaco pei neutroni del gruppo C le coppie di ruote formano degli otturatori che vengono periodicamente aperti e chiusi al girare delle ruote mobili. La trasparenza delle coppie di ruote è pertanto una funzione periodica del tempo eguale a meno della fase per ambedue le coppie di ruote. La differenza di fase tra l'apertura della prima e della seconda coppia di ruote è facilmente regolabile ruotando una delle ruote mobili rispetto all'altra ruota mobile.

(1) Nella seduta del 1° marzo 1936.

(2) E. FERMI, E. AMALDI, B. PONTECORVO, F. RASETTI, E. SEGRÈ, « Ric. scient. », V, 2, 280, 1934.

(3) P. B. MOON e J. R. TILLMANN, « Nature », 135, 98, 1935.

(4) E. AMALDI, O. D'AGOSTINO, E. FERMI, B. PONTECORVO, E. SEGRÈ, « Ric. scient. », VI, 1, 581, 1935.

(5) O. FRISCH, E. T. SØRENSEN, « Nature », 135, 258, 1935.

(6) E. AMALDI, E. FERMI, « Ric. scient. », VI, 2, 544, 1935.

Le due coppie di ruote distano di 54 cm. Abbiamo impiegato velocità di rotazioni fino a 6000 giri per minuto.

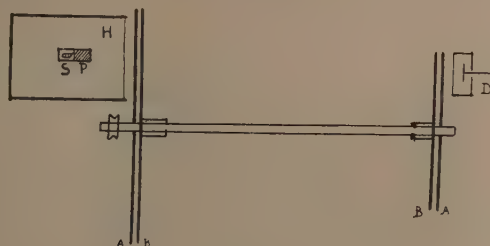


Fig. 1.

La sorgente di neutroni era un tubetto contenente $Rn + Be$ (ca 600 mC). Il tubetto (S) era posto al centro di un cilindro di paraffina (H) del diametro di 16 cm. e della lunghezza di 22 cm. I raggi γ erano schermati con un blocchetto di piombo P. I neutroni erano rivelati da una camera di ionizzazione rivestita di litio (D) e connessa con un amplificatore proporzionale e con un sistema di conteggio a thyatron.

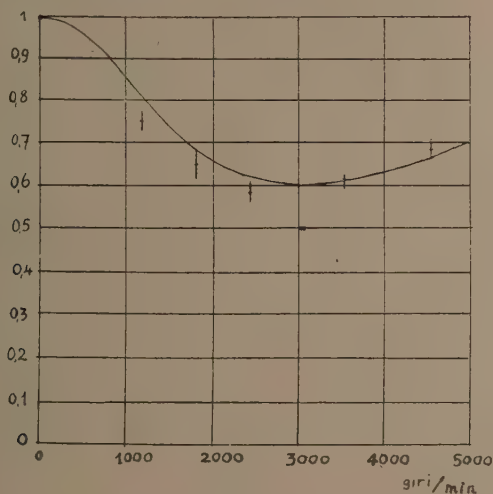


Fig. 2.

Se s'interpone una lastra di cadmio di qualche decimo di mm. di spessore tra la seconda coppia di ruote e la camera di ionizzazione in modo da intercettare completamente i neutroni del gruppo C, ovvero se si chiude il selettore spostando una coppia di ruote rispetto all'altra si registrano ancora circa la metà degli impulsi che si hanno a selettore aperto. Questi sono dovuti a neutroni veloci, raggi gamma e neutroni di gruppi diversi dal

gruppo C. Quando le coppie di ruote girano in fase il numero di impulsi registrati per minuto si abbassa da un massimo che si ha quando le ruote girano lentamente (250 giri al minuto) a un minimo che si ha per una velocità di rotazione delle ruote di 2500 giri al minuto. La fig. 2 dà il numero di impulsi per minuto registrati in funzione della velocità di rotazione delle ruote assumendo come unità il numero di impulsi per minuto che si hanno quando le ruote girano molto lentamente.

Nel fare i rapporti è stato sottratto da numeratore e denominatore il numero di impulsi che si avrebbero anche a selettore chiuso. I tratti indicano l'errore statistico. Le osservazioni sono state eseguite colle ruote A e B in fase.

Il decremento di intensità è dovuto al fatto che alcuni neutroni che sono passati attraverso la prima coppia di ruote trovano la seconda coppia chiusa perchè nel tempo che essi hanno impiegato a percorrere i 54 cm. che separano le due coppie di ruote, la seconda coppia s'è chiusa. Si capisce come questo metodo in linea di principio si presti anche a determinare la distribuzione di velocità dei neutroni lenti, qualora si conosca la sensibilità del rivelatore per neutroni di diverse velocità. Tuttavia la precisione degli esperimenti descritti in questa Nota sia per lo scarso potere risolutivo del dispositivo che per gli errori statistici nei conteggi non è sufficiente per trarre conclusioni quantitative su questo punto. In ogni modo in fig. 2 abbiamo anche riportato in tratto pieno il valore del rapporto tra l'intensità a ruote ferme e quella a ruote in moto che si otterrebbe se i neutroni del gruppo C avessero nella paraffina una distribuzione di velocità maxwelliana corrispondente alla temperatura ambiente.

Per controllare che il decremento del numero degli impulsi sia effettivamente dovuto alla velocità dei neutroni lenti e non a qualche ragione strumentale, abbiamo eseguito diversi controlli invertendo il senso di rotazione dei dischi e soprattutto mettendo il primo e il secondo disco, anzichè in fase, sfasati, in modo che quando la prima coppia di ruote è chiusa, la seconda è aperta completamente. In tal caso girando le ruote lentamente si ha un minimo nel numero degli impulsi per minuto e questo numero cresce al crescere della velocità di rotazione in modo perfettamente complementare al decremento osservato quando il selettore di velocità ha le due coppie di ruote in fase.

Da queste esperienze si può pertanto concludere che i neutroni del gruppo C hanno una velocità di un ordine di grandezza tale che percorrono i 54 cm. che separano le due coppie di ruote in un tempo di ca. $2,4 \cdot 10^{-4}$ sec, quanto cioè occorre, colla velocità angolare di 2500 giri/minuto, a spostare le ruote mobili dell'angolo corrispondente a un settore, e quindi hanno una velocità di ca. $2,2 \cdot 10^5$ cm/sec. Si osservi questa velocità è proprio dell'ordine di grandezza della velocità dovuta all'agitazione termica per un gas di neutroni a temperatura ambiente.

Fisica. — *Sulla legge di assorbimento dei neutroni lenti.*

Nota di F. RASETTI, E. SEGRÈ, G. FINK, J. R. DUNNING, G. B. PEGRAM, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. F. RASETTI.

La teoria della cattura dei neutroni lenti da parte dei nuclei sviluppata da Fermi ⁽²⁾, Bethe ⁽³⁾, Perrin e Elsasser ⁽⁴⁾ sulla base di un'interazione tra i nuclei e i neutroni rappresentabile da una buca di potenziale della profondità di alcuni milioni di volt e di un raggio paragonabile col raggio nucleare, porta per neutroni con lunghezza d'onda di de Broglie grande in confronto alle dimensioni nucleari a una sezione d'urto che varia in ragione inversa della velocità dei neutroni; e ciò qualunque sia il valore assoluto della sezione d'urto stessa. Questo risultato può essere espresso in altre parole dicendo che la probabilità di cattura di un neutrone lento che traversa uno strato di materiale di spessore dato, è proporzionale al tempo che il neutrone impiega a traversarlo.

Tuttavia i fenomeni di assorbimento selettivo e l'esistenza di diversi gruppi di neutroni fanno vedere come questa legge non valga al meno in qualcuno dei casi investigati. È particolarmente interessante provare con un metodo meccanico diretto la validità di questa legge in un caso ben determinato (neutroni del gruppo C) ⁽⁵⁾ in cui si sa anche che la velocità dei neutroni è dell'ordine di grandezza della velocità di agitazione termica ($2,5 \cdot 10^5$ cm/sec) ⁽⁶⁾.

Per far questo e per trovare la direzione di eventuali scostamenti della sezione d'urto dalla legge di proporzionalità inversa alla velocità ci siamo giovati del fatto che data la bassa velocità dei neutroni del gruppo C è possibile costruire dispositivi meccanici con parti che si muovono con velocità paragonabili a quelle dei neutroni stessi. Un disco di acciaio di pochi de-

(1) Nella seduta del 1° marzo 1936.

(2) AMALDI, D'AGOSTINO, FERMI, PONTECORVO, RASETTI, SEGRÈ, «Proc. Roy. Soc.», A 149, 522 (1935).

(3) BETHE, «Phys. Rev.», 47, 747 (1935).

(4) PERRIN e ELSASSER, «C. R.», 200, 450 (1935).

(5) MOON e TILLMAN, «Nature», 135, 904 (1935); BJERGE e WESTCOTT, «Proc. Roy. Soc.», A 150, 709 (1935); ARSIMOVITCH, KOURTSCHATOW, MICCOVSKI e PALIBIN, «C. R.», 200, 2159 (1935); RIDENOUR e YOST, «Phys. Rev.», 48, 383, (1935); PONTECORVO, «Ric. Scient.», VI-II, 145 (1935), e soprattutto AMALDI e FERMI, «Ric. Scient.», VI-II, 544 (1935).

(6) DUNNING, PEGRAM, FINK, MITCHELL, SEGRÈ, «Rend. Linc.». Questo stesso volume, pp. 340-342.

cimi di mm. di spessore e di 50 cm. di diametro è compreso tra due sottili dischi di duralluminio e può rotare a 6000 giri al minuto. L'assorbimento dei dischi di duralluminio e di acciaio per i neutroni lenti (gruppo C) è molto piccolo in paragone a quello di una pellicola di 0,02 mm. di cadmio che ricopre il disco d'acciaio, e che costituisce il vero strato assorbente. La velocità lineare periferica del disco è di ca. $1,4 \cdot 10^4$ cm/sec. Un fascio di neutroni lenti traversa il disco presso l'orlo sotto un angolo col piano del disco di ca. 25° in modo che ruotando il disco in un senso, ovvero nel senso opposto, ca. il 90 % della velocità del cadmio era aggiunta o sottratta alla velocità relativa del cadmio rispetto ai neutroni. È chiaro che in queste condizioni se vale la legge $1/v$ per la sezione d'urto non si deve osservare alcun cambiamento nell'assorbimento quando si inverte il senso di rotazione perchè il tempo trascorso dai neutroni nella pellicola di cadmio è indipendente dal verso di rotazione del disco; in altri termini il percorso maggiore o minore compiuto dai neutroni nel cadmio è esattamente compensato dalla variazione di sezione d'urto del cadmio stesso. Se invece la sezione d'urto non varia in modo inversamente proporzionale alla velocità, ma segue una legge differente, si deve osservare una differenza nell'assorbimento. Per esempio se la sezione d'urto fosse costante si dovrebbe trovare un assorbimento più grande quando l'assorbitore si muove incontro ai neutroni che quando si muove in direzione opposta perchè nel primo caso i neutroni pur rimanendo lo stesso tempo nel cadmio, vi compiono un cammino più lungo.

Abbiamo trovato che $8,2 \pm 0,8$ % in meno dei neutroni che traversa il cadmio quando questo si muove incontro ai neutroni che quando si muove nello stesso verso dei neutroni. I neutroni lenti erano distinti da quelli veloci considerando come lenti solo quelli che erano assorbiti da uno strato di cadmio di alcuni decimi di mm. di spessore, si trattava cioè di neutroni del gruppo C. Abbiamo contato circa 150.000 particelle con una camera di ionizzazione foderata di litio e connessa con un amplificatore proporzionale. Questa differenza nell'assorbimento corrisponde nelle nostre condizioni sperimentali a un cambiamento del coefficiente d'assorbimento del 6,3 %. Se si assumesse una sezione d'urto del cadmio indipendente dalla velocità e una distribuzione di velocità dei neutroni lenti nella paraffina Maxwelliana e corrispondente alla temperatura ambiente, il cambio nel coefficiente d'assorbimento dovrebbe essere di circa il 9 % cioè non molto più grande dell'effetto osservato.

Nel caso del cadmio concludiamo pertanto che non vi ha proporzionalità inversa tra la sezione d'urto e la velocità, ma che la sezione d'urto varia con la velocità meno rapidamente che $1/v$, ed è anzi approssimativamente costante.

Lo stesso esperimento è stato ripetuto con un disco di argento dello spessore di 0,8 mm. come assorbitore. Il risultato è stato differente poichè in questo caso non è stato possibile rivelare un cambiamento, nel coefficiente

di assorbimento, al ruotare del disco, che uscisse dalle fluttuazioni statistiche (contando 90.000 impulsi abbiamo trovato un cambiamento del $0,7 \pm 0,9 \%$). Da questo esperimento sembra che i neutroni del gruppo C siano assorbiti nell'argento secondo la legge $1/v$.

Sono in corso esperimenti simili col boro e con altri elementi sia per l'assorbimento che per la diffusione.

Fisica. — *Su di una recente esperienza considerata come conferma ad una nuova interpretazione della rifrazione in condizioni di riflessione totale.* Nota di G. USIGLIO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio Q. MAJORANA.

1. In una precedente Nota ⁽²⁾, si è cercato di chiarire il meccanismo inerente alla penetrazione della perturbazione nel secondo mezzo, nella riflessione totale, mediante un modello che stabilisce una separazione del fenomeno globale in due processi il cui complessivo effetto sia tale da generare quella alterna pulsazione di energia tra i due mezzi, che la teoria generale indica; mostrando anche come, in linea di massima, esso si presti bene alla spiegazione delle esperienze eseguite in vicinanza dell'angolo limite; le sole in cui, usando onde luminose, sia possibile disporre in modo osservabile di uno soltanto dei due processi.

Scopo della presente Nota è quello di prendere in esame i risultati di una esperienza recentemente eseguita dal Beauvais con onde hertziane, che si presta a giustificare ulteriormente il modello stesso ⁽³⁾; in primo luogo perchè ne verifica le conseguenze *anche in condizioni lontane da quelle limiti*; in secondo luogo perchè mostra, con maggiore evidenza, quale sia la costituzione del fascio entrante in *vicinanza del punto critico*, recando una più chiara spiegazione dei fatti sperimentali osservati in tali condizioni.

2. Le esperienze eseguite dal detto Autore vertono sulla riflessione totale di un'onda hertziana di breve lunghezza (18 cm.). Il campo elettromagnetico del fascio rifratto (onda evanescente) è in questo caso, a differenza di quanto avviene per le esperienze condotte con la luce, direttamente accessibile agli strumenti di misura; ciò che ha permesso a Beauvais una serie di osservazioni, che sono state eseguite con l'aiuto di un radiometro appositamente costruito per la rivelazione e misura delle componenti

(1) Nella seduta del 1° marzo 1936.

(2) G. USIGLIO, *Una nuova interpretazione della propagazione nel secondo mezzo nella riflessione totale.* « Rend. Acc. Lincei », vol. XXIII, p. 191.

(3) BEAUVAIS, *Recherches expérimentales sur la réflexion totale des ondes hertziennes.* « L'onde Electrique », vol. 12, pp. 161, 213, 274, 1933.

elettriche del campo stesso. Le esperienze sono condotte nel seguente modo: un fascio di radiazioni parallele viene fatto cadere su di un prisma a riflessione totale (di paraffina); si provvede poi, con opportuno dispositivo, a far percorrere al fascio emergente il cammino inverso in modo da generare in definitiva due onde evanescenti che « scivolano » in senso inverso lungo la faccia ipotenusata del prisma. La sovrapposizione di tali onde genera un sistema stazionario di cui viene studiata la distribuzione vettoriale elettrica, per diversi valori della polarizzazione e dell'angolo di incidenza dell'onda primitiva ed a diverse distanze dalla faccia ipotenusata. A tali esperienze se ne aggiunge un'altra che appare atta in modo particolare a fornire un contributo alla conoscenza delle modalità inerenti alla propagazione nel secondo mezzo. Essa viene eseguita appoggiando alla faccia ipotenusata del prisma e normalmente alla direzione di propagazione dell'onda evanescente (in questo caso unica), uno specchio metallico che « riflette » l'onda stessa. Conseguentemente si hanno due distinti effetti, a seconda che lo specchio si trovi davanti o dietro all'apparecchio rivelatore.

3. *Lo specchio sia posto davanti al rivelatore.* In questo caso Beauvais ha osservato che, di mano in mano che lo specchio si avvicina ad esso, la deviazione fornita diminuisce, accusando in tal modo il continuo indebolimento della componente del campo elettrico in esame.

Secondo i concetti esposti nella Nota precedente, il detto campo sarebbe composto da una perturbazione direttamente proveniente, con traiettoria inclinata, dalla superficie di separazione e da un'altra, indiretta, dovuta al fascio simmetrico di ritorno (fig. 1). Questo poi, a sua volta, si incrementerebbe dei contributi ceduti da tutte le propagazioni del fascio entrante, che interessano quella traiettoria del fascio di ritorno che va ad incontrare il radiometro. Ora è chiaro che, di mano in mano che lo specchio avanza portandosi da A verso B, quella traiettoria del fascio di ritorno che interessa il rivelatore, viene a perdere le quote corrispondenti alla decomposizione dei campi entranti intercettati successivamente dallo schermo, fino a che, giunto esso in B, il radiometro finisce con l'accusare il solo campo dovuto alla propagazione diretta; proseguendo lo spostamento dello specchio, anche quest'ultimo campo viene finalmente ad annullarsi.

L'esperienza descritta si presta inoltre a meglio chiarire la costituzione del fascio rifratto, nel caso di un fascio finito che incida in estrema vicinanza del limite. Si supponga infatti che (fig. 2) ⁽¹⁾ A rappresenti il punto di incontro del bordo anteriore di un fascio incidente con la superficie rifrangente. La perturbazione, giunta in A, penetrerà, in parte, nel secondo mezzo e vi si propagherà nella direzione data dalla relazione ricavata nella

(1) Si è ritenuto utile chiarire meglio la fig. 2 con l'aggiunta (a destra) di un disegno di insieme del fascio incidente.

citata Nota precedente. Se si prende ora in esame un punto C del secondo mezzo posto nelle immediate vicinanze di quello che si potrà chiamare bordo anteriore del fascio entrante ⁽¹⁾, si osserva che la perturbazione relativa è rappresentata pressochè dal solo campo di tale fascio, e ciò poichè il fascio rientrante si trova appena agli inizi della sua costituzione e non dà quindi, nella sovrapposizione, effetto apprezzabile. L'ellisse descritta dal vettore rappresentativo sarà quindi assai prossima ad un segmento di retta e la configurazione istantanea delle linee di forza del vettore radiante complessivo subirà, rispetto a quella del caso normale, una deformazione analoga a quella che essa subisce in conseguenza dell'avvicinamento alla superficie rifrangente di un'altra superficie limitante un terzo mezzo ⁽²⁾.

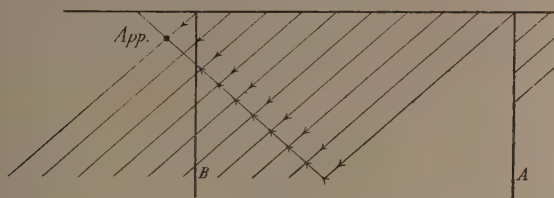


Fig. 1.

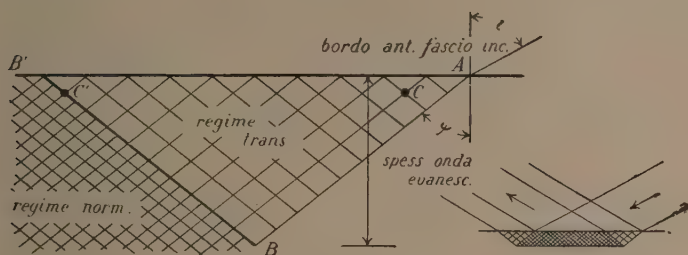


Fig. 2.

Di mano in mano che il punto C si sposta parallelamente al piano separatore nella direzione della propagazione apparente, il fascio uscente va costituendosi e l'ellisse descritta dal vettore risultante va avvicinandosi a quella del caso normale in cui, portatosi il punto C in C', il fenomeno raggiunge la sua sistemazione di regime. Tale può essere l'interpretazione dell'esperienza di Beauvais la quale, in sostanza, si presta a venire considerata come una esplorazione, da parte dell'apparecchio rivelatore, del bordo che lo specchio, con la sua azione di schermo e col suo movimento, crea e sposta rispetto al rivelatore stesso.

(1) Si prescinde qui da considerazioni relative all'influenza della rapida sparizione del campo ai bordi.

(2) Cfr. SCHAEFER e GROSS, *Untersuchungen über die Totalreflexion*. « Ann. d. Phys. », 32, 648, 1910.

Se si esamina ora un sottile fascio compreso tra la direzione AB ed un'altra a questa vicinissima, si vede che esso è formato pressochè dal solo flusso entrante. Se poi l'incidenza diminuisce verso il valore limite, si vede subito che la zona interessata dal regime spaziale transitorio si allarga rapidamente sino a che, per incidenze molto vicine a quella limite, la larghezza dei consueti fasci sperimentali potrà diventare insufficiente ad ottenere il regime normale; per giustificare la quale affermazione occorre far presente che lo spessore della zona interessata dall'onda evanescente tende all'infinito al tendere dell'incidenza verso l'angolo limite. Pertanto, in tali condizioni, il fascio entrante avrà la costituzione di quello ora considerato con la differenza che, invece di annientarsi a distanza radiale limitata, si spingerà a distanza radiale notevole. Ciò è, d'altra parte, intuitivo quando si osservi che, in questo caso, il piano di egual fase essendo pressochè normale alla direzione di propagazione, viene ad accentuarsi la somiglianza di questo fascio con quello corrispondente dell'incidenza pur prossima al limite, ma da opposta banda.

Naturalmente il fascio considerato sarà soggetto, per la sua limitata apertura, al fenomeno della diffrazione; e siccome le particolarità di questa dipendono dalla sua sezione ossia in definitiva da quella del fascio incidente e dall'angolo di incidenza, è chiaro che tali parametri debbano figurare nelle espressioni che fissano le modalità del fenomeno ⁽¹⁾.

Si può quindi concludere che le considerazioni svolte nella precedente Nota vengono dalla presente discussione ancor meglio chiarite ⁽²⁾; giova però fare nuovamente presente che le propagazioni relative ai due casi pur non mancando di talune analogie, rimangono tra loro sostanzialmente diverse. Ciò che conferma la veduta che si passi dall'una all'altra attraverso la scomparsa della propagazione.

4. *Lo specchio sia posto dietro al rivelatore.* In questo caso si notano, nelle deviazioni del radiometro, di mano in mano che lo specchio si allontana da esso, dei *massimi* e *minimi* regolarmente spazati, che Beauvais attribuisce al sistema stazionario creantesi per interferenza dell'onda diretta con quella riflessa. Con ciò egli viene tacitamente ad ammettere che l'onda evanescente possa riflettersi *mantenendo inalterata la propria costituzione e le proprie caratteristiche di propagazione.*

(1) Non si parla qui della variazione dell'indice di rifrazione in rapporto alla lunghezza d'onda in quanto si ragiona su radiazione monocromatica. Cfr. comunque RAMAN, *On the Nature of the Disturbance in The Second Medium in total Reflexion.* « Phil. Mag. », 50, 812, 1925.

(2) Dipendentemente però dalla larghezza del fascio incidente quello rifratto sarà anche composto da una parte, più o meno grande, di energia di ritorno il che potrà contribuire alla produzione dei complessi fenomeni che si osservano, per es., nelle esperienze del tipo di quella di VOIGT, *Über das bei der sogenannten totalen Reflexion in das zweite Medium eindringende Licht.* « Wied. Ann. », 67, 185, 1899.

Volendo esaminare i risultati di cui sopra sulla base del modello a suo tempo proposto, si osservi che le due propagazioni dalla sovrapposizione delle quali si suppone derivare l'onda evanescente, sono tali da portare i vettori loro competenti in fase su piani perpendicolari alla direzione di propagazione apparente. Essi generano quindi, incidendo su di uno specchio posto perpendicolarmente alla direzione detta e rimanendone pertanto sezionati, una distribuzione apparente di fase di velocità infinita, come si è mostrato in altro lavoro; in conseguenza la loro riflessione dovrebbe generare un'onda propagantesi normalmente allo specchio e, a parte fenomeni di diffrazione, indefinitamente, in quanto la sua costituzione risulterebbe analoga a quella delle normali onde piane. La sua velocità di propagazione *non potrebbe poi essere diversa da quella V_2 relativa al mezzo*. Ma l'onda evanescente viaggia con la velocità, ad essa inferiore, di $\frac{V_2}{n \sin i}$. La sua sovrapposizione quindi con quella riflessa non potrà dare luogo ad un'onda stazionaria del solito tipo. Per indagare il fenomeno in esame, occorrerà allora procurarsi l'equazione relativa all'interferenza di due propagazioni di egual periodo T , ma di diversa lunghezza d'onda λ_1 e λ_2 , e che viaggino in senso contrario l'una all'altra. Supposte entrambe di ampiezza unitaria e chiamando con P e P' i valori istantanei delle loro grandezze rappresentative, si potrà scrivere:

$$P = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_1} \right), \quad P' = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda_2} \right)$$

da cui:

$$a) \quad P + P' = 2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{1}{2} x \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \right) \cos 2\pi \frac{1}{2} x \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2}.$$

Equazione rappresentante in luogo della sinusoide che, nel caso normale, è l'espressione istantanea del fenomeno, una curva le cui ordinate sono date dal prodotto di due grandezze sinusoidali. Si vede poi che ad ogni punto compete una vibrazione che ha la frequenza comune e la cui ampiezza e fase dipendono dalla particolare scelta di esso, e che la vibrazione risultante si annulla in punti le cui coordinate si ricavano dalla relazione:

$$\cos 2\pi \frac{1}{2} x \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} = \cos \pi x \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} = 0;$$

se interessa la sola equidistanza tra questi punti si dovrà scrivere:

$$\pi x_d \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} = H \pi$$

dove H è un numero intero. Vale a dire:

$$x_d = H \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

espressione che per $\lambda_1 = \lambda_2$ dà $x_d = H \frac{\lambda}{2}$, come si sapeva dallo studio delle normali onde stazionarie. Tra questi punti, che si potranno ancora chiamare nodali, se ne trovano altri di massima ampiezza simmetricamente disposti rispetto ad essi. L'ampiezza di tali ventri è, come nel caso normale, doppia di ciascuna di quelle componenti. Si può osservare che le vibrazioni risultanti non sono tra loro in fase ⁽¹⁾ altro che a distanze definite dalla condizione che si abbia:

$$\pi x \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} = H \times 2 \pi$$

dove H è un numero intero, da cui:

$$x = 2 H \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Nei punti compresi tra quelli successivi definiti come sopra, che si potranno chiamare nodi di fase rispetto ad una origine qualsiasi, l'angolo tra le vibrazioni dei punti successivi varia con continuità. Nel caso in cui le velocità di propagazione siano eguali, l'internodo di fase diviene:

$$x = 2 H \frac{\lambda^2}{0} = \infty.$$

Ciò vuol dire che se, partendo da un punto, si vuole ritrovare un altro punto tale che nell'intervallo la fase abbia ruotato di un intero giro, occorre portarsi all'infinito; ossia che non esiste sfasamento tra le successive vibrazioni risultanti. Si osservi infine che il valore $x = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ degli internodi di ampiezza, è intermedio tra quelli relativi ai due casi delle onde stazionarie generantesi per sovrapposizione di vibrazioni che abbiano velocità di propagazione rispettivamente eguali entrambe all'una od all'altra di quelle del caso in esame.

Riferendosi finalmente all'esperienza in discorso, si noti che, essendo i valori calcolati da Beauvais basati sull'ipotesi che l'onda riflessa abbia velocità eguale a quella dell'onda diretta, i valori osservati dovrebbero, ove le cose stessero come si sono prospettate, essere superiori a quelli. Come si vede dalla tabella che segue (che è relativa a prove eseguite con polarizzazione tale da portare il vettore elettrico nel piano normale a quello

(1) Si prescinde qui dalla periodica inversione di segno dovuta al secondo fattore della a); della quale occorre invece tenere conto se si voglia, per esempio, ricavare la curva istantanea.

di incidenza, con che, senza che nulla venga mutato di sostanziale nelle deduzioni si è più certi circa la supposta eguale ampiezza dei vettori diretto e riflesso), su tre valori osservati, per diverse incidenze, due sono realmente superiori a quelli calcolati. Si deve però osservare che i valori calcolati nell'ipotesi delle diverse velocità si allontanano anch'essi sensibilmente da quelli rilevati; ma occorre far presente che, invece, le osservazioni eseguite con la sovrapposizione di due onde evanescenti e cioè con due propagazioni di velocità rigorosamente eguali, hanno dato osservazioni perfettamente aderenti alle previsioni.

Incidenze	Val. calc. Beauvais	Val. calc. n. ipotesi	Valori osservati
45°	8.9	9	9
54°	7.75	8.25	8
57°	7.40	8.10	7.40

5. Si osservi infine come quest'ultima parte dell'esperienza descritta dimostri che, come si è supposto, ciascuno dei due fasci, e non il solo loro complesso, sia tale da portare i vettori in fase su piani normali alla direzione della propagazione apparente. Infatti, se così non fosse, ognuno dei due fasci verrebbe rimandato dallo specchio non normalmente a sé stesso, ma in direzione diversa, dipendentemente dalla particolare distribuzione di fase nella sezione, e l'esperienza darebbe risultati del tutto differenti.

Se, per esempio si ponesse uno specchio nella zona comune ai fasci incidente e riflesso totalmente nel primo mezzo (la cui sovrapposizione dà appunto, per quanto abbia origine da onde piane, una distribuzione risultante in fase su piani verticali); si osserverebbero due fasci riflessi e non uno solo mentre, ad una distanza dallo specchio paragonabile alla sua dimensione verticale (alle normali incidenze) il campo comune ai detti fasci scomparirebbe; e non si potrebbe più rilevare la distribuzione risultante tra il campo totale primitivo e quello comprendente anche la sovrapposizione degli ulteriori due, riflessi dallo specchio. In altre parole, se si volesse supporre l'onda evanescente come generata dalla composizione di due particolari onde piane, tale supposizione cadrebbe di fronte all'esperienza in discorso.

In definitiva sembra di poter concludere che anche l'esame della seconda parte dell'esperienza in discussione, porti ad una conferma del modello a suo tempo proposto per la propagazione nel secondo mezzo.

Mi è grato rivolgere i più vivi ringraziamenti al chiarissimo prof. Majorana per l'interessamento dimostrato al presente, come al precedente lavoro e per i consigli ricevuti.

Fisica. — *Sull'annichilazione degli elettroni positivi*⁽¹⁾.
Nota di G. C. WICK, presentata⁽²⁾ dal Socio O. M. CORBINO.

È ben noto che per i raggi γ si deve considerare, oltre gli ordinari fenomeni di diffusione e assorbimento per effetto fotoelettrico, anche un tipo particolare di assorbimento, che avviene nell'atomo stesso che emette un quanto γ in seguito a una disintegrazione radioattiva del suo nucleo; questo fenomeno di assorbimento vien detto di conversione interna, e la sua intensità non può senz'altro calcolarsi dalle ordinarie formule per l'assorbimento; occorre invece per questo uno studio *ex novo* dell'effetto fotoelettrico nelle particolari condizioni che si considerano.

In modo simile si è condotti a studiare, oltre i fenomeni di annichilazione già studiati da vari autori⁽³⁾, anche quello per cui un positrone emesso da un atomo radioattivo, come P^{30} , viene annichilato prima di uscire dall'atomo stesso. Com'è noto, l'annichilazione può avvenire sia per emissione di due quanti γ , che con emissione di un quanto solo. In quest'ultimo caso occorre, oltre l'elettrone negativo che viene annichilato insieme col positivo, anche la cooperazione di una terza particella, che nei casi più importanti è il nucleo a cui è legato l'elettrone negativo. È plausibile ammettere che l'annichilazione con emissione di due quanti possa calcolarsi senz'altro mediante la formula data da Dirac, anche nel caso che ci interessa. Invece il secondo tipo di annichilazione richiede nel nostro caso uno studio a parte, precisamente come la conversione interna dei raggi γ . È dunque soprattutto a questo che il presente lavoro è dedicato.

Cerchiamo dapprima di valutare brevemente la probabilità di « annichilazione interna » per emissione di due quanti. Dirac ha mostrato che un positrone che si muove con velocità v in un'atmosfera elettronica di densità n , possiede una probabilità di annichilazione per unità di percorso paria a:

$$n \cdot \pi e^4 / m^2 c^3 v.$$

Se dunque indichiamo con $n(r)$ la densità di elettroni alla distanza r dal nucleo dell'atomo, sarà:

$$P = \frac{\pi e^4}{m^2 c^3 v} \int_0^\infty n(r) dr$$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico di Roma.

(2) Nella seduta del 1° marzo 1936.

(3) DIRAC, « Proc. Cambr. Soc. », 26, 361, 1929; FERMI e UHLENBECK, « Phys. Rev. », 44, 510, 1933; ved. anche BETHE, « Proc. Roy. Soc. », 869, 129, 1935.

la probabilità di annichilazione interna con emissione di due quanti. Per una valutazione grossolana, possiamo sostituire a $n(r)$ il valore approssimato dato dal metodo statistico, con le riserve che ora vedremo. Si trova così:

$$(I) \quad P = 0,32 \frac{Z^{5/3}}{137^4} \frac{c}{v} \int_0^\infty \varphi^{1/2}(x) \frac{dx}{x^{3/2}}$$

dove φ è la funzione tabulata da Fermi ⁽¹⁾.

Qui osserviamo che l'integrale a secondo membro è divergente. Ciò è dovuto a un'imperfezione del metodo statistico, che dà una densità elettronica infinita nel centro dell'atomo, mentre la densità data dall'equazione di Schrödinger è naturalmente finita. Per ovviare a questo inconveniente basta arrestare l'integrazione a una certa distanza dal nucleo dell'ordine del raggio dell'anello K, e tener poi conto di questo a parte, mediante autofunzioni idrogenoidi. Si trova così praticamente:

$$P \sim 0,4 \cdot 10^{-8} Z^2 \frac{c}{v}.$$

Come si vede la probabilità P è molto piccola salvo per positroni lentissimi.

§ 1. Passiamo ora al calcolo dell'annichilazione per emissione di un solo quanto. Per questo occorre calcolare la probabilità di transizione di un elettrone da uno dei normali livelli occupati dall'atomo a uno stato d'energia cinetica negativa, corrispondente a un positrone che si allontana dal nucleo. L'autofunzione che rappresenta questo stato non può obbedire alle regole di continuità ordinariamente ammesse; essa deve infatti possedere una singolarità nell'origine. Questa singolarità è analoga a quella delle soluzioni delle equazioni di Maxwell che si usano per descrivere la radiazione elettromagnetica emessa da un nucleo ⁽²⁾. Considereremo per semplicità solo gli elettroni dell'anello K, poichè questi danno ordinariamente in fenomeni di questo genere il grosso del risultato. Supporremo inoltre che l'atomo non sia troppo pesante e che il positrone venga emesso con una velocità piccola rispetto a quella della luce e con momento angolare nullo. L'uso di questa approssimazione non-relativistica, o meglio quasi-relativistica, si giustificherà a posteriori col fatto che il fenomeno è particolarmente intenso per piccole velocità, cosicchè lo studio di queste è il più interessante.

Come autofunzione per l'elettrone K potremo prendere, nelle ipotesi ammesse:

(1) « Z. f. Ph. », 48, 73, 1928.

(2) Ved., per es., HULME, « Proc. Roy. Soc. », 138, 643, 1932; TAYLOR e MOTT, « Proc. Roy. Soc. », 138, 665, 1932.

$$(2) \quad \begin{pmatrix} iF \cos \vartheta \\ iF \sin \vartheta \cdot e^{i\varphi} \\ G \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oppure:} \quad \begin{pmatrix} -iF \sin \vartheta \cdot e^{-i\varphi} \\ iF \cos \vartheta \\ 0 \\ -G \end{pmatrix}$$

secondo la direzione del momento intrinseco dell'elettrone. Si ha:

$$(3) \quad F = \frac{h}{4\pi mc} \frac{dG}{dr}, \quad G = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a} \right)^{3/2} e^{-\frac{Zr}{a}}.$$

Per l'elettrone positivo fisseremo arbitrariamente la direzione dello spin, rappresentandolo mediante l'autofunzione:

$$(4) \quad \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ -ig \cos \vartheta \\ -ig \sin \vartheta \cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad g = \frac{h}{4\pi mc} \frac{df}{dr}$$

dove f è una soluzione dell'equazione:

$$(5) \quad \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left(W - \frac{Ze^2}{r} \right) f = 0$$

(W è l'energia cinetica del positrone) e precisamente quella soluzione che per r molto grande si comporta asintoticamente secondo la:

$$(6) \quad f \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi v}} \cdot e^{-\tilde{n}r/r}.$$

Mediante queste autofunzioni dobbiamo al solito formare le espressioni per la corrente; queste si possono molto semplificare osservando che, al solito, $G \gg F$ e $f \gg g$. Possiamo quindi ritenere solamente i termini contenenti il prodotto Gf e trascurare i prodotti come Gg , Ff , e a maggior ragione Fg .

In questa approssimazione, che è del resto coerente con quella usata sin dall'inizio, le componenti della corrente sono:

$$0, \quad 0, \quad Gf$$

per la prima delle autofunzioni (2) e:

$$-Gf, \quad -iGf, \quad 0$$

per la seconda.

L'intensità dell'irraggiamento si calcola con formule ben note (non è permesso usare l'approssimazione di dipolo!). Si trova che la probabilità

di emissione di un quanto, riferita all'unità di tempo e sommando i contributi dei due elettroni K, è uguale a:

$$(7) \quad A = \frac{4}{3} \frac{2\pi e^2}{hc} 2\pi\nu \cdot 3I^2$$

dovè ν , la frequenza del quanto emesso, è praticamente uguale a $2mc^2/h$ e I è l'integrale:

$$(8) \quad I = 2\lambda \int_0^\infty Gf \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} r \cdot r \, dr$$

con $\lambda = c/\nu$.

Passiamo ora al calcolo di I . Per questo dobbiamo procurarci una espressione analitica della soluzione f dell'equazione (5).

È noto che le soluzioni regolari dell'equazione di Schrödinger nel continuo si possono esprimere mediante un integrale complesso⁽¹⁾.

È facile modificare il cammino di integrazione in modo che questo stesso integrale rappresenti un'autofunzione che soddisfa alla (6). Si trova così, che, con le abbreviazioni:

$$\gamma = \frac{2\pi Ze^2}{h\nu} \quad ; \quad \kappa = \frac{2\pi}{h} m\nu$$

si può porre:

$$(9) \quad -f = \frac{I}{4\pi\sqrt{\nu}} \sqrt{\frac{2\gamma}{e^{2\pi\gamma} - 1}} \frac{I}{r} \int e^{-2i\kappa r \xi} \left(\frac{\xi + \frac{I}{2}}{\xi - \frac{I}{2}} \right)^{i\gamma} \frac{d\xi}{\xi^2 - \frac{I}{4}}$$

dove l'integrale va esteso a un cammino nel piano complesso della variabile ξ , che partendo da $-i\infty$ gira intorno al punto $\xi = \frac{I}{2}$ in senso contrario alle lancette dell'orologio e torna a $-i\infty$. Bisogna inoltre fissare il valore dell'integrando colla convenzione che sia inizialmente:

$$\arg \frac{\xi + \frac{I}{2}}{\xi - \frac{I}{2}} = 0.$$

Si verifica facilmente che l'espressione (9) soddisfa all'equazione (5) e alla condizione (6)⁽¹⁾. Sostituendo nell'equazione (8) si trova, dopo eseguita l'integrazione rispetto a r :

(1) Ved., per es., «Handb. d. Phys.», vol. XXIV₁, articolo di BETHE, p. 289 sg.

$$(10) \quad I = \frac{\pi}{\sqrt{v}} \left(\frac{Z}{\pi a} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{2\gamma}{e^2 \pi \gamma - 1}} \int \frac{1}{(\kappa \gamma + 2\pi i \kappa \xi)^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2} \left(\frac{\xi + \frac{1}{2}}{\xi - \frac{1}{2}} \right)^{i\gamma} \frac{d\xi}{\xi^2 - \frac{1}{4}}.$$

Integrali di questo tipo si possono in generale eseguire facilmente mediante il teorema di Cauchy, ossia deformando opportunamente il cammino di integrazione. Tuttavia questo procedimento incontra nel caso presente alcune difficoltà, che non mi è riuscito di superare. Fortunatamente una valutazione rigorosa non è necessaria poichè ci si può valere del fatto che nella approssimazione ammessa la lunghezza d'onda λ è molto più piccola sia di $\frac{a}{Z}$ che della lunghezza d'onda di De Broglie del positrone. L'integrale che compare nella (10) può quindi con buona approssimazione porsi uguale a:

$$\left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 \int \left(\frac{\xi + \frac{1}{2}}{\xi - \frac{1}{2}} \right)^{i\gamma} \frac{d\xi}{\xi^2 - \frac{1}{4}}.$$

Il cammino d'integrazione può ora venir deformato in modo da percorrere l'intero asse immaginario da $+i\infty$ a $-i\infty$. L'integrale diventa così:

$$\left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 2ie^{\pi\gamma} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-2\gamma\theta} d\theta.$$

Sostituendo nella (10) e poi nella (7) si trova finalmente il valore di A . Siccome abbiamo normalizzato l'autofunzione (4) in modo che essa rappresentasse un flusso di un positrone per unità di tempo, il valore di A ci dà senz'altro la probabilità di annichilazione cercata. Abbiamo dunque:

$$(11) \quad P = A = \frac{Z^2}{\pi} \left(\frac{2\pi e^2}{\hbar c} \right)^3 \left[e^{\frac{4\pi^2 Z e^2}{\hbar v}} - 1 \right].$$

Come si vede questo valore è in generale trascurabile, ma cresce molto rapidamente per piccole velocità del positrone. Sarà opportuno ricordare però che quando P diventa dell'ordine dell'unità non è più lecito trattare l'irraggiamento in prima approssimazione, poichè esso perturba il fenomeno stesso dell'emissione da parte del nucleo.

Vorrei fare qui alcune osservazioni a proposito dello spettro dei positroni emessi da un nucleo. Ellis e Henderson hanno osservato⁽¹⁾ che la curva

(1) ELLIS e HENDERSON, «Proc. Roy. Soc.», 152, 714, 1935.

d'assorbimento dei positroni emessi dal fosforo radioattivo è inizialmente convessa verso l'alto, diversamente da quanto avviene per le ordinarie sostanze radioattive per raggi β . Ciò indica che nello spettro di positroni la parte lenta è mancante; gli autori citati valutano che questa parte mancante abbia inizio al disotto di 200.000 Volt-elettroni. Qui si possono fare due ipotesi: o il nucleo stesso non emette positroni di così bassa velocità, oppure questi positroni per qualche ragione non vengono osservati. Un meccanismo che potrebbe produrre un fatto di questo genere è fornito dalla annichilazione dei positroni nell'interno dell'atomo stesso che li emette. Una delle ragioni per cui è stato intrapreso il calcolo contenuto nel presente lavoro è stata appunto la considerazione di questa possibilità. Tuttavia vediamo che sia la (I) che la (II) non permettono di render conto del fenomeno osservato da Ellis e Henderson, poichè una annichilazione sensibile non si ha che per velocità notevolmente più basse di quelle richieste dai dati sperimentali di questi autori.

Sembra probabile che la anomalia sia presente già nella stessa emissione da parte del nucleo. Ciò indicherebbe una asimmetria nelle proprietà dei positroni e degli elettroni, che può essere molto interessante. Naturalmente una asimmetria nell'emissione è anche data dalle azioni coulombiane; grazie alla repulsione del nucleo i positroni vengono accelerati, ciò produce una assenza di positroni lenti nello spettro di emissione; tuttavia è facile prevedere, e risulta, per es., dalle formole che si deducono dalla teoria di Fermi della disintegrazione β ⁽¹⁾, che questo effetto, che è nel senso desiderato, non si presenta che per energie molto basse, più precisamente per energie dello stesso ordine di quelle richieste dalla (II). E considerazioni di carattere generale mostrano che questo è indipendente dalla forma particolare della teoria. Si dovrebbe dunque piuttosto ritenere che la dissimmetria abbia un'origine più profonda.

(1) Ved. WICK, « Rend. Lincei », 19, 319, 1934.

Chimica. — *Sullo spettro dell'ossido di Praseodimio allo stato di vapore* ⁽¹⁾. Nota di G. PICCARDI, presentata ⁽²⁾ dal corrisp. L. ROLLA.

Sempre valendomi del nuovo dispositivo di fiamma, usato nel caso dell'ossido di Nd ⁽³⁾ e dell'ossido di Sa ⁽⁴⁾, ho ripreso alcuni spettrogrammi dell'ossido di Pr allo stato di vapore, allo scopo di studiare in modo migliore lo spettro di questo ossido, che io avevo osservato, per primo, alcuni anni fa ⁽⁵⁾. Ho esteso la ricerca dello spettro anche alla regione ultravioletta, fino a λ 3200 I. A.

A differenza di quanto è avvenuto per gli ossidi di Nd e di Sa, nulla di nuovo è risultato usando l'attuale dispositivo di fiamma; lo spettro ottenuto è identico a quello registrato nel 1929.

Le bande non sono risolubili in righe nelle condizioni di dispersione in cui ho operato (spettrografi Hilger D2 ed E1). Lo spettro si estende soltanto ad una parte della regione visibile e si presenta un poco meno complesso di quelli degli ossidi di Nd e di Sa. Anche in questo caso lo spettro è risultato esente da righe atomiche; vi compaiono peraltro, ma molto debolmente, i gruppi di bande a λ 4418 e λ 4372 I. A. dell'ossido di La, presente in minime tracce ⁽⁶⁾ nel materiale praseodimifero usato.

Riporto per brevità solo i dati numerici, rimandando ad altra Nota le considerazioni riguardanti lo spettro. I simboli della quarta colonna significano: n = nitida, f = fine, ff = finissima, l = larga, ll = larghissima, s = sfumata, ss = sfumatissima, o = ombra diffusa. Le graffe riuniscono le lunghezze d'onda relative ai limiti estremi di bande molto larghe.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 1° marzo 1936.

(3) G. PICCARDI, questi « Rendiconti » (6), 21, 584 (1935).

(4) G. PICCARDI, questi « Rendiconti » (6), 21, 589 (1935).

(5) G. PICCARDI, « Nature », 24, 618 (1929).

(6) Vedi a questo riguardo: *Spettri molecolari ed analisi spettroscopica, sulla ricerca del lantanio*. Questi « Rendiconti » (6), 15, 83 (1932).

λ (aria)	ν (vuoto)	i	oss.	λ (aria)	ν (vuoto)	i	oss.
6717, ∞	—	—	ossll	6336	15778	2	sl
6697 ∞	—	—	os	6324	15808	1	s
6672 ∞	—	—	os	6319	15821	3	sl
6663 ∞	—	—	os	6297,5	15874,9	5	nf
6635 ∞	—	—	os	6293,5	15885,1	0	n
6610 ∞	—	—	os	6280,1	15919,0	7	n
6599	oll	6273,9	15935,4	2	s
6593				6270,5	15943,4	6	n
6583	oll	6265,2	15956,8	6	l
6577				6260,0	15970,2	6	f
6557	oll	6227	16055 ∞	0	oss
6546				6217	16081 ∞	0	os
6536 ∞	—	—	os	6208	16104 ∞	0	os
6524,5	15325,2	3	n	6200	16125	1	f
6515,4	15344,3	4	n	6196	16135	0	s
6500,9	15387,1	2	n	6191	16148	1	ff
6494,8	15392,9	6	n	6185	16164	0	s
6486,9	15411,6	2	n	6183	16169	1	ff
6475,5	15438,7	8	n	6175	16190	2	ss
6453	15492	1	s	6168,3	16207,5	2	s
6439,5	15525,3	2	fn	6162,8	16222,2	2	f
6434	15536			6157	16237	1	os
6426	15556	3	ll	6136	16293	2	ss
6416	15580	1	sl	6131	16306	2	s
6409	15598	1	sl	6123	16327	2	s
6394	15634	1	s	6117	16344	2	ss
6387,1	15652,6	2	ff	6099	16392	4	s
6374,3	15683,8	1	ff	6085,5	16428,6	0	f
6360	15718			6078,9	16446,0	2	ff
6357	15725	3	ll	6074,0	16459,2	2	ff
6353,5	15735,2	2	f	6061,5	16493,2	1	s
6346	15752	2	sll	6057,0	16505,5	4	f

λ (aria)	ν (vuoto)	i	oss.	λ (aria)	ν (vuoto)	i	oss.
6050,1	16524,1	2	s	5788	17272	1	ff
6043,1	16543,5	4	n	5779	17299	4	sl
6037,5	16559,2	10	n	5768	17332	2	s
6026,4	16589,2	8	n	5764,4	17343,3	9	n
6019,6	16607,9	12	n	5753,6	17375,9	4	n
6005,5	16646,9	1	n	5748,9	17390,1	4	n
6002,4	16655,5	5	n	5746	17399	1	f
5991	16687	5	s	5742	17410	1	f
5983,9	16707,2	4	s	5736,6	17427,4	4	s
5971,1	16742,8	6	l	5732,6	17439,5	5	s
5963,5	16764,5	3	n	5726,2	17459,0	4	s
5951,1	16799,3	2	f	5721,6	17473,0	3	—
5943,7	16821,5	1	ff	5709 ∞	17512	0	oss
5934	16848	4	sll	5706,8	17518,4	4	n
5923	16879	4	sll	5705,0	17523,8	4	n
5916,8	16896,8	4	n	5702	17533	2	—
5912,5	16909,0	4	n	5691,8	17564,5	10	—
5882	16997	2	n	5687,4	17577,5	3	n
5876	17014	2	s	5683,4	17589,8	1	n
5872	17025	2	n	5676	17613	5	n
5863	17052	1	—	5671	17629	2	ll
5859	17063	2	n	5662	17657		
5857,5	17067,7	1	s	5656	17675	2	$n \equiv \text{LaO}$
5848,6	17100,0	0	s	5652	17687	2	$n \equiv \text{LaO}$
5835	17133	0	s	5643,9	17713,6	2	n
5831	17145	0	s	5638,1	17731,5	2	n
5824	17165	0	s	5634,0	17744,5	2	n
5814,5	17193,9	0	ff	5628,8	17761,0	7	$n \equiv \text{LaO}$
5808,8	17210,8	0	nff	5627	17767	2	$n \equiv \text{LaO}$
5795,9	17249,2	0	nff	5619	17792	3	ls
5795	17251	1	ff	5614,7	17805,7	0	n
5791	17264	1	ff	5612,7	17812,0	9	n

λ (aria)	v (vuoto)	i	oss.	λ (aria)	v (vuoto)	i	oss.
5602,3	17843,8	3	$n \equiv \text{LaO}$	5378	18589	2	sl
5600,1	17852,0	3	$f \equiv \text{LaO}$	5370	18616	0	sl
5597,1	17861,7	8	n.	5367	18627	0	sl
5406	18493	0	$s \equiv \text{LaO}$	5362	18644	1	n
5393	18537	0	f	5352	18679	4	n
5390	18547	1	f	5336	18746	0	s
5385	18565	3	s	5293	18887	2	s
5382	18575	2	$s \equiv \text{LaO}$	5279	18937	2	s

Biologia. — *Razze fisiologiche di «Euplanaria gonocephala» differenziate dalla diversa attitudine alla scissiparità.* ⁽¹⁾ Nota di M. BENAZZI, presentata ⁽²⁾ dal Socio E. GIACOMINI.

Espongo in questa Nota alcuni risultati di ricerche che sto svolgendo sulla riproduzione merogenetica (e sui suoi rapporti con quella sessuale) dei Tricladi d'acqua dolce. Non ho creduto inutile fare un cenno particolare delle osservazioni qui raccolte, poichè esse permettono di definire un fatto che appariva ancora discusso. È noto che alcune planarie hanno la capacità di riprodursi, oltrechè per via gametica, anche per semplice divisione trasversa del corpo, seguita dalla rigenerazione dei frammenti. Tale moltiplicazione può riscontrarsi, più o meno frequentemente, in vari Tricladi, ed in alcuni anzi (ad es. in *Eupl. subtentaculata* ed in *Fonticola vitta*, come pure in forme americane) essa sembra assumere, nella conservazione della specie, una importanza predominante rispetto alla riproduzione sessuale. Inoltre l'attitudine alla scissiparità non varia solo nelle diverse specie, ma pur nell'ambito di una stessa specie si sono potute riscontrare razze a comportamento nettamente diverso. Ciò è stato illustrato per alcuni Tricladi europei ed americani; io stesso (1928) ho avuto occasione di fornirne un esempio molto evidente in due colonie di *Polycelis (Ijimia) cornuta* Johnson dei dintorni di Torino. Nuove osservazioni ho potuto compiere su stazioni di *Euplanaria*

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata della R. Università di Sassari.

(2) Nella seduta del 1° marzo 1936.

(*Planaria*) *gonocephala* Dugès trovate in Sardegna. In un altro lavoro ⁽¹⁾ ho ricordato che la possibilità di una normale moltiplicazione scissipara in questa specie è stata oggetto di varie discussioni. Lo Steinmann (1916) aveva descritto la scissione in *Eupl. gonocephala*, ammettendo tuttavia che essa avvenga unicamente come reazione a fattori esterni (temperatura elevata e scarsità d'ossigeno) ed in individui completamente sviluppati; in condizioni normali infatti non ha mai osservato il fenomeno. Il Vandel, d'altra parte, afferma che *gonocephala* non è specie scissipara (in Europa almeno), tutti i casi descritti dovendo essere riferiti, secondo l'A., a fatti patologici. La moltiplicazione per scissione si nota invece nella affine *Eupl. subtentaculata*, nella quale anzi tale modalità di riproduzione è quasi esclusiva, essendo rarissimi gli individui sessuati; secondo il Vandel (1925) *subtentaculata* non rappresenterebbe che una razza asessuata di *gonocephala* ed egli ritiene (seguito in ciò da altri AA.) che le stazioni di *gonocephala* riproducentisi, in condizioni normali, per scissione siano da riferire a *subtentaculata* ⁽²⁾.

Nella mia Nota precedente (1933) ho illustrato una stazione di planarie (trovata in Piemonte, nella Val di Susa) presentanti tutti i caratteri di *Eupl. gonocephala*, ma in cui la riproduzione si compie pressoché esclusivamente per scissione; infatti su un numero notevolissimo di esemplari, raccolti in diverse escursioni, non potei trovarne che due soli sessuati.

Nuove osservazioni che mi sembrano di un certo interesse ho potuto fare esplorando ruscelli e torrenti della Sardegna. In quasi tutti i corsi d'acqua esaminati si trova abbondante *gonocephala* ⁽³⁾, rappresentata, nella grande maggioranza dei casi, da individui sessuati o da giovani destinati a divenirlo. Avendo allevati in Laboratorio molti di questi esemplari, durante la primavera-estate 1935, ho potuto constatare frequenti accoppiamenti ed ottenere numerose deposizioni di bozzoli, da cui sono schiusi i piccoli, mentre le divisioni, anche nei mesi più caldi, sono sempre state rarissime e di carattere, si può dire, eccezionale.

Particolare interesse offre pertanto un'altra stazione di *gonocephala* posta nel Rio Viglietu, presso lo Stazzo Lisandru, nel Comune di Tempio (Gal-

(1) M. BENAZZI, « Boll. Musei di Zool. e Anat. comp. della R. Univ. di Torino », vol. XLIII, 1933.

(2) ABELOOS (1930) che ha compiuto ricerche sull'accrescimento e la rigenerazione in *Pl. gonocephala*, riferisce che di un gran numero di individui, pur sottoposti a condizioni sperimentali d'ambiente ed a traumatismi vari, nessuno ha mai presentato riproduzione per scissione; egli ritiene che *gonocephala* e *subtentaculata* siano da considerarsi come due forme genotipicamente distinte.

(3) Colgo l'occasione per riferire che nelle ricerche fino ad ora compiute, nei dintorni di Sassari e nella Gallura, oltre a *gonocephala* non ho trovato che qualche stazione di *Eupl. lugubris*. Ho constatata, almeno pel momento, l'assenza di generi, quali *Polycelis* e *Dendrocorlum*, e di specie che sono tra le più note e diffuse nel Continente. Ricordo che dalle ricerche di Arndt risulta che anche in Corsica *gonocephala* è ampiamente diffusa; essa si trova pure nell'Isola d'Elba, ove fu raccolta dal Borelli.

lura). Quivi nell'aprile '35 ho trovato, insieme a diversi individui grossi e sessuati, parecchi altri divisi di recente od in fase di rigenerazione. Allevati in Laboratorio questi esemplari hanno continuato a dividersi spontaneamente e sempre più frequentemente, a mano a mano che la temperatura si faceva più elevata; nel corso dell'allevamento le dimensioni degli esemplari sono andate gradatamente diminuendo, mentre sempre più scarsi si sono dimostrati quelli presentanti il poro genitale ben distinto. Il 9 giugno, avendo minutamente esaminati tutti gli individui di questa coltura, non ne ho trovato più alcuno che presentasse i segni della maturità sessuale: tutti gli esemplari erano di piccole dimensioni e quasi tutti in fase di rigenerazione. Nel corso dell'estate, non avendo più potuto accudirvi personalmente, gli esemplari sono morti. Ho raccolto nuovamente, all'inizio di novembre, planarie del Rio Viglietu, ma questa volta quasi tutti gli esemplari erano integri, parecchi di notevoli dimensioni e ben sessuati; molto rari invece quelli divisi. Tuttavia il 16 ed il 20 di novembre nel recipiente contenente queste planarie ne trovai alcune (naturalmente non sessuate) che si erano divise spontaneamente. In seguito però le scissioni sono cessate, senza dubbio per l'influenza della temperatura ambiente, scesa a circa 10°-11° C. Ho voluto compiere allora una ulteriore prova comparativa: il 2 dicembre ho posto 5 esemplari giovani ed asessuati di *gonocephala* di Scala di Giocca (stazione in cui normalmente non si osservano scissioni) e 5 di Rio Viglietu in un termostato alla temperatura di circa 28° C. Dopo 10 giorni un esemplare di Rio Viglietu si era diviso dietro al faringe, isolando un piccolo frammento posteriore, e successivamente anche gli altri esemplari (all'infuori di uno) si sono divisi; tutti i frammenti hanno rigenerato rapidamente ed inoltre qualche porzione anteriore dopo alcuni giorni si è di nuovo scissa e questa volta davanti al faringe. Ad un mese circa dall'inizio dell'esperienza il numero degli esemplari di Rio Viglietu si era più che raddoppiato, mentre dei 5 esemplari di Scala di Giocca nessuno si era diviso.

Continuando poi le osservazioni su individui di Rio Viglietu, ho potuto cogliere con la più grande evidenza la diversa evoluzione che presentano i giovani individui, a seconda che sono destinati alla sessualità oppure alla scissione. Nel mese di dicembre gli esemplari, alimentati frequentemente con lombrichi, hanno raggiunto, in maggioranza, un discreto sviluppo; tutti appaiono integri, poichè da parecchio tempo non si osserva alcuna scissione, certo in conseguenza della temperatura ambiente relativamente bassa (circa 10°). Tuttavia mentre un certo numero di queste planarie, di dimensioni notevoli, si presenta con l'apparato copulatore ben sviluppato, molte altre invece, pur essendo già di discrete dimensioni (fino a 15 mm. circa) non ne mostrano traccia; neppure appare la piccola macchia biancastra che nei giovani individui indica l'inizio dello sviluppo di detto apparato (faccio notare che gli esemplari raccolti nelle stazioni ove la riproduzione è esclusivamente gametica si mostrano invece già sessuati, od almeno con gli inizi ben palesi del-

l'apparato copulatore, quando sono di dimensioni ancora notevolmente inferiori, cioè di una lunghezza che non supera i 10 mm. circa). Gli esemplari di Rio Viglietu in cui l'evoluzione dell'apparato sessuale non si compie malgrado la progredita maturità somatica appaiono, evidentemente, destinati alla moltiplicazione agamica; ed infatti nel mese di gennaio, ad una temperatura ambiente di circa 12° a 15°, ho potuto notare la ripresa delle scissioni.

Dall'insieme dei fatti ricordati risulta quindi chiaramente che anche *Eupl. gonocephala* (forma tipica) può presentare una riproduzione scissipara in condizioni normali: la planaria di Rio Viglietu non potrebbe infatti essere ascritta a *subtentaculata*, poichè in questa specie (o razza) si osserva quasi esclusivamente la scissione (gli individui sessuati non compaiono che eccezionalmente, come risulta dalle osservazioni di vari AA. che io stesso ho potuto controllare in allevamenti compiuti a Torino) mentre degli esemplari di Rio Viglietu una notevole percentuale si presenta sempre coi caratteri della maturità sessuale.

Le mie osservazioni dimostrano poi (in accordo con quanto è stato affermato da Vandel e da me stesso per altre specie) che la scissione è legata a fattori intrinseci dell'individuo: le condizioni esterne non intervengono affatto come primi determinanti del fenomeno, ma possono solo regolarne l'estrinsecazione. Risulta infine che stirpi di *gonocephala*, simili morfologicamente e viventi nelle stesse condizioni, si differenziano nettamente nei riguardi della capacità di divisione spontanea. Come già ho detto, esempi analoghi sono stati illustrati per diversi Tricladi europei ed americani. Oltre alle osservazioni di vari AA. su *Planaria alpina* e *Polycelis cornuta*, ricordo quelle recenti di De Beauchamp su *Fonticola vitta*; tra le specie americane il fatto è noto soprattutto per *Eupl. maculata* (Curtis, Hyman), ma anche in *Eupl. dorotocephala* (secondo recentissime ricerche di Kenk) si possono distinguere razze in cui varia molto la tendenza a raggiungere la maturità sessuale.

All'infuori dei Tricladi, fatti simili possono poi riscontrarsi in organismi appartenenti a diversi tipi zoologici; mi piace, in questa nota, ricordare le interessanti ricerche del Monticelli (1896) su *Cucumaria planci* Br. La forma tipica di questo Oloturoide che si trova (nel Golfo di Napoli) nei fondi detritici, nelle praterie di Posidonia, non mostra mai moltiplicazione autotomica. Invece nei fondi arenosi misti di fango, al largo della Banchina Caracciolo, si trovano individui della stessa specie, ma alquanto differenti per abito e per dimensioni, e questi presentano una divisione spontanea (che può avvenire con modalità diverse) seguita da rigenerazione dei frammenti, la quale dimostra tutti i caratteri di una autotomia moltiplicativa. Essa può compiersi successivamente per parecchie volte, ma, secondo le osservazioni dell'A., finisce per portare alla degenerazione degli individui se non è interrotta dal processo coniugativo. Non intendo discutere in questa Nota tale veduta del Monticelli, che investe un arduo problema di Biologia generale;

e interessante tuttavia ricordare che l'A. ammetteva una degenerazione senile ed un processo coniugativo di ringiovanimento, paragonando i fatti da lui osservati a ciò che si riteneva in quel tempo (sulla base delle idee del Maupas e prima delle ricerche di Enriques e di altri AA.) per gli Infusori. Anche nei riguardi dei Metazoi le conclusioni del Monticelli non paiono generalizzabili. Tra gli stessi Tricladi sono noti esempi di razze o specie che da tempo si moltiplicano pressochè esclusivamente per divisione, senza che gli individui manifestino alcun fatto degenerativo. Essi si differenziano solo per le dimensioni generalmente minori e pel mancato sviluppo dell'apparato genitale, ma questi sono caratteri direttamente connessi con la scissiparità.

Biologia. — *Ipofisi e gestazione nei Selaci*⁽¹⁾. Nota di S. RANZI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. F. RAFFAELE.

In una serie di ricerche⁽³⁾ ho studiato i rapporti tra embrioni e madre nei Selaci ovovivipari e vivipari. Ho così posto in evidenza il diverso accrescimento degli embrioni delle diverse specie, accrescimento che ho dimostrato essere in rapporto con la diversa composizione del liquido uterino, che serve di nutrimento all'embrione. Ho esaminato i diversi aspetti istofisiologici degli epiteli uterini e delle placente e anche ho studiato le modificazioni, che subisce il fegato nel corso della gravidanza.

Giunto a questo punto, decisi di intraprendere lo studio delle modificazioni che subiscono le diverse ghiandole a secrezione interna in rapporto alla gestazione. Questo studio è ancora all'inizio, ma, per l'ipofisi, ha già dato risultati sui quali voglio qui brevemente intrattenermi.

Giudicai che il lavoro dovesse essere iniziato con lo studio di tre diversi Selaci, che presentano le condizioni più caratteristiche di rapporti tra embrioni e madre: la *Torpedo ocellata* Rud., ovovivipara, nella quale la quantità di sostanze organiche, che passano dalla madre agli embrioni è minima; il *Trygon violacea* Bp., ovoviviparo, nel quale la quantità di sostanze organiche, che gli embrioni traggono dalla madre è massima, e il *Mustelus laevis* Risso, viviparo (con placenta vitellina).

Le ricerche vennero così divise: il dott. O. Carere Comes studiò la *Torpedo ocellata* e *T. marmorata*⁽⁴⁾ ed io iniziai lo studio delle altre due

(1) Ricerche eseguite nella Stazione Zoologica di Napoli e nell'Istituto di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparate della R. Università di Perugia.

(2) Nella seduta del 1° marzo 1936.

(3) S. RANZI, «Pubb. Staz. Zool. Napoli», vol. 12, p. 209, 1932; «Att. Pontif. Acc. Scienze», vol. 87, p. 100, 1934; «Pubb. Staz. Zool. Napoli», vol. 13, p. 332, 1934; «Boll. Zoologia», vol. 6, p. 153, 1935.

(4) O. CARERE COMES, «Pubb. Staz. Zool. Napoli» (in stampa).

specie associandomi, in un secondo tempo, come collaboratrice per il *Trygon violacea* la sig.na dott.ssa M. Pitotti.

Nei Batoidei l'adenoiipofisi è unita alla base del diencefalo per mezzo di uno stretto peduncolo il che rende possibile di isolarla con una semplice dissezione e pesarla. Eseguii queste pesate in *Trygon violacea* e, per ottenere valori comparabili, determinai poi l'indice dell'ipofisi e cioè il rapporto tra il peso dell'ipofisi (*I*) e il peso del corpo della madre (*M*), detratti gli uteri, perchè questi falserebbero il risultato dato il loro aumento in peso nel corso della gravidanza. Moltiplicai poi il valore così ottenuto per 10^7 onde non avere numeri con troppi zeri. L'indice in questione è quindi $\frac{10^7 \cdot I}{M}$ (tabella I).

TABELLA I.

Stadio di gestazione	Data di raccolta	Peso madre (<i>M</i>) g.	Peso ipofisi (<i>I</i>) mg.	$\frac{10^7 \cdot I}{M}$
Uova uterine	2 VII 1935	6334	56,3	88,9
»	2 VII 1935	4192	32,5	77,5
Embrioni 9 g. . . .	24 VII 1935	6589	72,0	109,3
» 22 g. . . .	2 VII 1935	5487	55,0	100,25
» 27 g. . . .	24 VII 1935	8037	60,5	75,3
» 30 g. . . .	24 VII 1935	4990	57,0	114,2
» 32 g. . . .	24 VII 1935	7705	70,0	90,85
» 81 g. . . .	5 VIII 1935	3550	45,5	128,2
» 84 g. . . .	5 VIII 1935	4256	43,5	102,2
» 168 g. . . .	5 VIII 1935	6074	56,5	93,0
Pochi giorni dopo il parto	2 IX 1935	3854	44,0	114,2

In base a questi dati si vede che il peso dell'ipofisi aumenta man mano che la gravidanza procede.

Nell'adenoiipofisi dei Selaci si osserva un lobo anteriore e un lobo intermedio ambedue ben sviluppati.

Nell'ipofisi di femmina non gestante, il lobo anteriore è costituito da un insieme di tuboli ghiandolari che, molte volte, non presentano un lume ed appaiono quali cordoni. In *Torpedo*, Carere Comes ha visto che questi tuboli sono diverticoli della cavità centrale della ipofisi. La parete di essi è costituita da due sorta di cellule assai ben visibili in *Trygon*: cellule che versano nel lume del tubolo un secreto che col Giemsa si tinge azzurro e cellule che versano nei sinusoidi, che sono tra tubolo e tubolo, un secreto eosinofilo.

Il lobo intermedio appare invece costituito da tanti cordoni di cellule disposte a raggiera intorno a un capillare nel quale versano un secreto eosinofilo.

Nel corso della gestazione si vede, nel lobo anteriore, attenuarsi e sparire quasi completamente l'eosinofilia degli elementi periferici. Aumenta invece la quantità di secreto contenuto nei tuboli e si vede un certo numero di cordoni, che hanno acquistato un lume e sono divenuti tuboli. I sinusoidi appaiono notevolmente dilatati.

Nel lobo intermedio si osserva un aumento in dimensione delle cellule ghiandolari, dovuto specialmente al loro allungamento secondo l'asse perpendicolare alla parete del vaso centrale del cordone. Questo aumento in dimensione è accompagnato da una aumentata eosinofilia, particolarmente ben visibile nei preparati di *Torpedo ocellata* di Carere Comes. Poichè anche nel lobo intermedio si osserva iperemia, ne risulta che i cordoni del lobo intermedio sono notevolmente ingranditi.

L'aumento in dimensione dell'ipofisi nel corso della gestazione è quindi dovuto alla generale iperemia, all'accumulo di secreto nei tubuli del lobo anteriore, e all'aumento in dimensione delle cellule del lobo intermedio.

Le principali modificazioni che subisce l'ipofisi dei Selaci man mano che la gestazione procede sono quindi le seguenti: aumento del secreto contenuto nei tuboli del lobo anteriore, diminuzione della secrezione eosinofila delle cellule del lobo anteriore, aumento dell'eosinofilia delle cellule del lobo intermedio, generale iperemia.

Tutto questo deve essere interpretato quale aumentata secrezione ipofisaria o quale immagazzinamento nell'ipofisi del secreto che, così, non vien posto in circolo, ma è trattenuto nella ghiandola? L'ingrandimento dei tuboli ripieni di secreto nel lobo anteriore, l'ingrossamento e l'aumentata eosinofilia delle cellule del lobo intermedio potrebbero essere interpretati quale un ristagno di secreto, mentre sicuramente si osserva diminuzione della secrezione eosinofila del lobo anteriore.

È a tutti ben noto che, nei Mammiferi, l'ipofisi presenta modificazioni caratteristiche nel corso della gravidanza ma, per quanto sappia, è questa la prima volta che tali modificazioni si osservano in altri Vertebrati, e sarebbe assai interessante vedere se qualcosa di simile si osservi anche nei Rettili gestanti.

Un altro aspetto della questione ci si presenta: le modificazioni dell'ipofisi osservate nel corso della gestazione dei Selaci sono le medesime che si osservano nel corso della gestazione dei Mammiferi? Come ho accennato, in questi animali, sono stati da molti Autori descritti cambiamenti dell'ipofisi in rapporto alla gestazione. Comparando i fatti osservati nei Selaci con quelli descritti sulla cavia da Weis⁽¹⁾ in un lavoro dei più recenti e completi sull'ar-

(1) M. WEIS, *Contribution a l'étude histologique de la glande pituitaire du cobaye à l'état normal au cours de la gestation et dans le post-partum.* « Nancy », 1934.

gomento, vediamo che in ambedue i casi si osserva: aumento in dimensione dell'ipofisi dovuta principalmente a iperemia e accumulo di secreto nel lobo anteriore; in ambedue i casi si osserva eosinofilia di talune cellule del lobo anteriore, presente all'inizio della gestazione, che va man mano attenuandosi (questo processo è però più rapido in *Trygon* e *Torpedo* che non in cavia), eosinofilia delle cellule del lobo intermedio, che va man mano aumentando nel corso della gestazione.

Fisiologia (Chimica fisiologica). — *Sulla cristallizzazione della carbossemoglobina del sangue essiccato di varie specie animali, e su una particolare regola di applicazione medico-legale* ⁽¹⁾.
Nota di E. BIOCCA, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

È noto che l'emoglobina può cristallizzare sia sotto forma di emoglobina ridotta che di ossiemoglobina.

G. Amantea ⁽³⁾ — come noi stessi abbiamo avuto occasione di ricordare altrove ⁽⁴⁾ —, utilizzando il noto metodo della saponina (elaborato insieme con Krzyzskowsky), aveva potuto studiare, separatamente, per molti sangui, i cristalli di ossiemoglobina e di emoglobina ridotta, indagando il comportamento, a questo riguardo, delle singole e numerose specie considerate. Appunto il metodo della saponina gli permise di eseguire osservazioni con tecnica uniforme, adatta a stabilire confronti adeguati, nonchè a porre delle regole, senza dubbio valide per le condizioni di osservazione adottate. Egli era riuscito così a stabilire, che i cristalli di emoglobina ridotta e di ossiemoglobina non si ottengono sempre e con la stessa facilità in ogni caso. Da questo punto di vista, anzi, risultarono nette differenze di comportamento, che permisero la distinzione di quattro tipi diversi di sangue: 1) Quelli in cui, nelle sue condizioni di tecnica, l'emoglobina cristallizza in tutte e due le forme (ossiemoglobina ed emoglobina ridotta). 2) Quelli in cui l'emoglobina cristallizza solo come ossiemoglobina. 3) Quelli in cui cristallizza solo come emoglobina ridotta. 4) Quelli, infine, che non danno mai cristalli nè di emoglobina ridotta nè di ossiemoglobina.

In un nostro precedente lavoro ⁽⁵⁾, in cui studiavamo il comportamento

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 1° marzo 1936.

(3) G. AMANTEA e KRZYZSKOWSKY, *Sulla cristallizzazione dell'emoglobina*. « Archivio Fisiol. », vol. XVIII, fasc. I-VI, 1919-20; G. AMANTEA, *La cristallizzazione dell'emoglobina studiata col metodo della saponina*. « Ibid. », vol. XXI, fasc. II, 1923.

(4) E. BIOCCA, *Sul diverso comportamento del sangue di varie specie animali nei riguardi della cristallizzazione della carbossemoglobina*. « Rendiconti Accademia dei Lincei », vol. XX, ser. 6°, sem. II, fasc. 12, 1934.

(5) E. BIOCCA, loc. cit.

del sangue di varie specie animali nei riguardi della cristallizzazione della carbossiemoglobina, utilizzando i dati citati e il metodo della saponina di G. Amantea, avevamo potuto constatare: 1) che la cristallizzazione della carbossiemoglobina si ottiene, costantemente, solo per quei sangui, che, esplorati in condizioni ordinarie, cioè senza il trattamento con ossido di carbonio, sono capaci di fornire cristalli di ossiemoglobina (diano o non diano insieme pure quelli di emoglobina ridotta); 2) che la cristallizzazione della carbossiemoglobina non si ottiene mai da sangui, che, nelle stesse condizioni e senza ossido di carbonio, non danno cristalli di sorta, ovvero li danno soltanto di emoglobina ridotta.

Da questi fatti, bene accertati, traevamo la conseguenza, che, siccome il sangue umano appartiene appunto a quest'ultima categoria, e cioè al gruppo di sangui, che, col metodo della saponina, danno cristalli soltanto di emoglobina ridotta e mai di ossiemoglobina (Amantea), ne deriva la seguente regola di applicazione medico-legale:

Un sangue, che, emolizzato con saponina e trattato con ossido di carbonio, si riveli capace di fornire cristalli di carbossiemoglobina, non è sangue umano.

Ma in questo nostro precedente lavoro ci eravamo sempre riferiti ad osservazioni fatte su sangui freschi. Già da molto tempo, però, lo stesso Amantea⁽¹⁾ aveva preso in considerazione la cristallizzazione dell'emoglobina da sangui disseccati, ed era giunto alla conclusione, che, dopo pochi giorni di essiccamento, l'ossiemoglobina non si può più ottenere cristallizzata, mentre si continua a poter ottenere cristalli di emoglobina ridotta, anche da sangui (del 1° e 3° tipo) da molto tempo essiccati.

Era logico, che, stando a tale punto le cose, noi cercassimo di esplorare il comportamento della cristallizzabilità della carbossiemoglobina su sangui diversi, previamente essiccati, e da un tempo più o meno lungo.

Qualora il comportamento della carbossiemoglobina si fosse rivelato simile a quello della emoglobina ridotta, se ne sarebbero potute trarre conclusioni, che avrebbero avvalorato, dal punto di vista dell'interesse medico-legale, la regola da noi già stabilita sperimentando sui sangui freschi, e sopra ricordata.

Ricerche sulla cristallizzazione dell'emoglobina da sangui essiccati, oltre che da G. Amantea, erano state anche fatte prima con scopi medico-legali da altri Autori; noi rimandiamo al lavoro citato dello stesso G. Amantea, per le notizie complete al riguardo.

Nelle ricerche nostre, per avere cristalli dal sangue essiccato, ci siamo serviti dello stesso metodo già usato e descritto da G. Amantea. Precisamente facevamo essiccare il sangue su lastre di vetro o su piatti smaltati. Quindi, per le singole prove, frammenti secchi del sangue da esplorare di-

(1) G. AMANTEA, *La cristallizzazione dell'emoglobina dal sangue disseccato*. «Zacchia», n. 3, maggio-giugno 1924.

sponevamo in provette, aggiungendo una quantità opportuna di acqua distillata, in modo da poter ottenere, a dissolvimento completo, una soluzione di emoglobina, sufficientemente concentrata. La proporzione conveniente è risultata di regola quella di una parte di sangue secco per due o tre di acqua. Ottenuta la dissoluzione completa — per cui in genere bastano 24 ore, — 2-3 cm. della soluzione si deponevano su un grande vetrino portaoggetti (di 8-10 cm. di lato), e vi si sovrapponeva un coprioggetti, pure di grandi dimensioni, e precisamente a piano inclinato, come consiglia G. Amantea, cioè facendolo poggiare da un lato su un piccolo cuscinetto di ovatta o di carta (di un paio di mm. di spessore), ovvero meglio su una assicella di vetro.

Tale espediente serve effettivamente molto bene ad assicurare il buon risultato delle prove. Così infatti, per lenta evaporazione si concentra tutta la soluzione da una parte nel preparato, e non si formano bolle di aria nell'interno di essa. In tale modo si operava per allestire i preparati, che dovevano servire di controllo, fornendo, o non, cristalli di emoglobina ridotta o di ossiemoglobina. Per quelli invece, destinati alle osservazioni sul comportamento della carbossiemoglobina, si seguiva la stessa tecnica sostanziale, ma con la differenza che, dopo aver ottenuto la dissoluzione dei frammenti secchi in acqua distillata, si faceva gorgogliare nella soluzione ossido di carbonio (ricorrendo, come sorgente, al gas illuminante), fino ad ottenere la evidente trasformazione dell'emoglobina in carbossiemoglobina (e valutando dal viraggio verso il colore caratteristico). Col sangue così trattato, si allestivano i preparati — di solito più preparati — per ciascuna esperienza. Qualche volta, disponendo di scarsa quantità di soluzione, abbiamo ottenuto anche buoni risultati, disponendone due o tre gocce, su un comune porta-oggetti, adagiandovi sopra un comune vetrino copri-oggetti e chiudendo con balsamo.

Abbiamo utilizzato — essiccati — gli stessi sangui esplorati come tali (o freschi) nelle precedenti ricerche sulla carbossiemoglobina⁽¹⁾. Per ogni sangue si facevano i primi accertamenti dopo pochissimi giorni di essiccamento; quindi si continuavano ad esplorare periodicamente per parecchi mesi successivi (fino a un massimo di circa otto mesi). In ogni caso la metà della soluzione allestita serviva a preparare una prova di controllo (per l'emoglobina ridotta e l'ossiemoglobina), e l'altra metà per gli accertamenti sulla carbossiemoglobina.

Riassumiamo brevemente i risultati ottenuti:

1° Concordemente coi precedenti rilievi, fatti al riguardo da G. Amantea, abbiamo osservato, che si possono ottenere cristalli di ossiemoglobina da qualsiasi sangue essiccato, il quale sia capace di darli anche allo stato di sangue fresco; ma di regola non è più possibile ottenerne dopo 8-12 giorni dall'essiccamento;

(1) E. BIoCCA, loc. cit.

2° Una volta scomparsa la capacità a cristallizzare dell'ossiemoglobina, pei sangui capaci di fornire normalmente col metodo della saponina anche cristalli di emoglobina ridotta, abbiamo continuato — come già prima G. Amantea — a ottenere cristalli di quest'ultima, e persino da sangui essiccati da otto mesi; lo stesso vale pei sangui, che normalmente forniscono soltanto cristalli di emoglobina ridotta.

3° La possibilità dell'emoglobina di cristallizzare come carbossiemoglobina, per quei sangui che la posseggono normalmente, non cessò mai dopo l'essiccamento, e si mantenne immutata in tutte le nostre prove, anche in quelle eseguite su sangui essiccati da oltre otto mesi.

4° Pei sangui, che normalmente non forniscono mai cristalli, nè di ossiemoglobina nè di emoglobina ridotta, si mantiene la refrattarietà immutata pure dopo l'essiccamento e altresì dopo trattamento con ossido di carbonio.

È evidente e ovvio, che, in base ai nostri nuovi risultati, la regola da noi stabilita, sperimentando con sangui freschi, e sopra ricordata, rimane integrata ed estesa, da poter essere in modo più completo formulata come segue:

Un sangue che — se fresco, dopo emolisi con saponina, e, se essiccato pur da parecchi mesi, dopo averlo ripreso con opportuna quantità di acqua distillata — trattato con ossido di carbonio, si riveli capace di fornire cristalli di carbossiemoglobina, non è sangue umano.

Fisiologia. — *Contributo allo studio comparato dell'anafilassi.* Nota di A. GALAMINI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Anafilassi alimentare in rapporto con la sezione del vago.* Nota di A. GALAMINI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Fenomeni di ossido-riduzione e stati di attività funzionale del neurasse.* Nota di M. MITOLO, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia generale. — *Attività enzimatica e tensione superficiale.* — *Azione di alcune sostanze tensioattive sulla lipasi pancreatica* ⁽¹⁾. Nota di E. TRIA, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. S. VISCO.

I. — INTRODUZIONE.

Fin dal 1924, Visko ⁽³⁾ per spiegare il fatto, che l'esterasi contenuta nel lattice del «*ficus carica*» non scinde la trioleina, mentre ha azione notevole sulla tributirina, ammetteva che ciò potesse dipendere, per lo meno in parte, dalla notevole differenza della tensione superficiale tra i due sistemi, lattice-trideina e lattice-tributirina.

Numerose ricerche, e tra queste importantissime quelle di Willstätter e dei suoi collaboratori ⁽⁴⁻¹⁰⁾, hanno in seguito dimostrato che alcune sostanze tensioattive hanno notevole potere attivante sulla lipasi pancreatica, ma nessuno ha cercato di studiare sistematicamente le relazioni che passano tra attività enzimatica e tensione superficiale del mezzo.

Solo due autori, Glick e King ⁽¹¹⁾ dell'Università di Pittsburgh, allo scopo di spiegare il meccanismo di attivazione e di inibizione di numerose sostanze sulla lipasi del pancreas e sulla esterasi del fegato, hanno ammesso che vi fossero delle relazioni tra tensione superficiale ed attività enzimatica. Infatti essi hanno visto che col crescere del potere tensioattivo della sostanza usata,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia generale della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 1º marzo 1936.

(3) S. VISCO, *Sui fermenti esistenti nel lattice del «Ficus Carica»*. Nota I: Esterasi. («*Arch. Farmacol. Sperim.*», 1924).

(4) R. WILLSTÄTTER, WALDSCHMIDT-LEITZ u. F. MEMMEN, *Bestimmung der pankreatischen Fettsplattung. Erste Abhandlung über Pankreasenzyme*. («*Ztschr. f. phys. Chem.*», 125, 93), 1923.

(5) ID., ID., *Ueber Pankreaslipase. Zweite Abhandlung über Pankreasenzyme*. («*Ibidem*», 125, 132, 1923).

(6) ID., ID., u. F. MEMMEN, *Zur stalagmometrischen Bestimmung der lipatischen Tributyrinhydrolyse. Vierte Abhandlung über Pankreasenzyme*. («*Ibidem*», 129, 1, 1923).

(7) ID., ID., *Ueber die Wirkung der Pankreaslipase auf verschiedene Substrate. Sechste Abhandlung über Pankreasenzyme*. («*Ibidem*», 133, 229, 1924).

(8) ID., ID., *Vergleich von Magenlipase mit Pankreaslipase. Siebente Abhandlung über Pankreasenzyme*. («*Ibidem*», 133, 247, 1924).

(9) ID., ID., *Vergleich von Leberesterase mit Pankreaslipase; über die stereochemische Spezifität der Lipasen. Achte Abhandlung über Pankreasenzyme*. («*Ibidem*», 134, 216, 1924).

(10) ID., ID., *Neue Probleme der Enzymchemie*. («*Scientia*», 1935, p. 210).

(11) D. GLICK and C. G. KING, *Relationships between the activation of pancreatic lipase and the surface effects of the compounds involved. The mechanism of inhibition and activation*. («*J. Biol. Chem.*», 97, 675, 1932).

aumenta l'attivazione della lipasi e l'inibizione della esterasi. Per spiegare questo fatto gli autori ammettono che quando sostanze estranee sono aggiunte a una soluzione contenente enzima e substrato, si generano due meccanismi: l'uno che tende a produrre una inibizione enzimatica per una combinazione fisica o chimica del composto estraneo con l'enzima, con formazione di un complesso inattivo; l'altro che tende a produrre un abbassamento della tensione interfaciale e per conseguenza un'attivazione dell'enzima rendendo le molecole dell'enzima e del substrato più accessibili l'una a l'altra. Nel caso della esterasi del fegato prevale il primo effetto e quindi la inibizione, nel caso della lipasi pancreatica prevale il secondo cioè l'attivazione.

Gli autori riportano le curve di tensione superficiale dei vari attivatori adoperati in funzione della concentrazione; ma non ci dicono quale tensione superficiale si raggiunge quando queste sostanze sono aggiunte alla soluzione di lipasi e substrato; per conseguenza non è possibile seguire come vari l'attivazione enzimatica col variare della tensione superficiale.

Sembrandomi la questione di notevole interesse, ho ritenuto utile riprenderne lo studio.

II. — TECNICA SEGUITA.

Per la determinazione del potere lipolitico esistono vari metodi, che si possono distinguere in tre gruppi fondamentali:

1) Metodi titrimetrici, che consistono nella determinazione alcalimetrica degli acidi grassi messi in libertà;

2) Metodi tensiometrici con i quali si misura la variazione della tensione superficiale che si ha nel corso della scissione;

3) Metodi gassometrici che consistono nel determinare la quantità di CO_2 spostata da una soluzione di bicarbonato dagli acidi grassi che si formano nel corso della lipolisi.

Nelle mie ricerche mi sono servito di metodi appartenenti ai tre gruppi citati.

Come substrato ho per lo più adoperata una soluzione satura di tributirina preparata secondo le indicazioni di Michaelis (1). Solo in poche ricerche ho adoperato trioleina o monobutirina o olio di olivo.

Le prime determinazioni sono state eseguite con la lipasi del ricino preparata col metodo descritto da Euler (2), che consiste nel fare adsorbire la lipasi contenuta nei semi con farina fossile (Kieselgurlipase).

La lipasi pancreatica mi è stata gentilmente fornita allo stato di polvere dall'Istituto Serono, e di essa ho preparato soluzioni gliceriche, trattandola per 24 ore a temperatura ambiente con 15 volte il suo peso di glicerolo 85 % e filtrando alla pompa con debole aspirazione attraverso garza. In taluni casi, ho adoperato senz'altro la lipasi allo stato di polvere.

Nelle determinazioni acidimetriche ho operato nella maniera seguente: in beute della capacità di circa 50 cc. si introducono 10 cc. di soluzione satura di tributirina, 2 cc. di una soluzione tampone costituita da due parti di soluzione normale di NH_4Cl e una parte di soluzione normale di NH_3 (pH 8,9 a 30°). In una o più beute non si aggiungono atti-

(1) I. MICHAELIS, *Praktikum der phisicalischen Chemie*. (Berlin, S. 83, 1926).

(2) H. v. EULER, *Chemie der Enzyme*. (München, II Teil, 1 Abschn., S. 49, 1928).

(3) G. QUAGLIARIELLO e G. SCOZ, *Sulla esistenza di una lipasi nel tessuto adiposo*. (« Arch. Sc. Biol. », 17, 513, 1932).

vatori, alle altre se ne aggiungono quantità crescenti. A tutte le beute 0,2 cc. di soluzione glicerica di lipasi o 10 mg. di polvere. Si determina subito la tensione superficiale delle varie soluzioni così preparate. Poi esse vengono lasciate due ore in termostato a 37°. Alla fine di questo tempo si aggiungono 20 cc. di alcool al 95 % per arrestare l'azione dell'enzima e si titola in presenza di timolfaleina con soluzione alcoolica 0,1 N di KOH fino a netta colorazione azzurra. Dal volume di KOH adoperato in questa titolazione, si sottrae la somma dei volumi della stessa soluzione occorrenti per portare allo stesso pH separatamente la soluzione senza estratto e l'estratto glicerico di lipasi, tenuti pure in termostato per due ore.

Nelle determinazioni stalagmometriche ho seguito il metodo di Rona e Michaelis, adoperando uno stalagmometro di Traube che per l'acqua distillata dava alla temperatura di 20°C. 38 gocce e 37 centesimi, ed eseguendo la prima determinazione dopo 10 minuti dall'aggiunta della lipasi alla soluzione, l'ultima dopo 24 ore e numerose determinazioni intermedie.

Nelle ricerche manometriche ho proceduto nella maniera indicata da Quagliariello e Scoz (3). Nel barattolo di un apparecchio di Barcroft-Warburg si versano 0,5 cc. di estratto neutralizzato, 0,5 cc. di una soluzione 1,5 % di bicarbonato di sodio, 0,5 cc. delle soluzioni dei vari attivatori, 0,5 cc. di acqua distillata. Nel diverticolo laterale si introducono 0,5 cc. di soluzione di tributirina. All'atto della mescolanza non si ha contrazione di volume dovuta alla diluizione della glicerina, perchè col metodo adottato l'estratto glicerico è già notevolmente diluito. Si riempie l'apparecchio con una miscela di 95 volumi di azoto privo di ossigeno e 5 volumi di anidride carbonica. Si porta in termostato a 37° e si agita. Quando non si osservano più variazioni di volume dovute al cambiamento di temperatura, si mescolano i due liquidi e si registrano ad intervalli regolari le variazioni di volume.

Le misure di tensione superficiale statica sono state eseguite col metodo dell'anello mediante il tensiometro di Lecomte du Nouy, adoperando vetrini di orologio di 7 cm. di diametro, accuratamente puliti e sgrassati.

III. — ESPERIMENTI.

Nelle seguenti tabelle vengono riportati in forma riassuntiva i risultati ottenuti nelle numerose esperienze eseguite:

TABELLA I.

	mmg.	Tens. superf.	KOH o. l n. cc.	Attivazione %
Oleato di sodio .	—	44	0.8	—
	0.25	43	1.2	50
	2.5	38.5	1.6	100
	25	36	1.4	75
	50	28	1.2	50
	100	26.5	1.2	50
Glicocolato di sodio	—	44	0.9	—
	0.25	42	1.2	33
	0.5	38	1.6	77
	1	32	1.4	55
	1.5	30	1.2	33
	2	28	1.2	33
	5	27	1	11
	10	26	0.5	— 44
	20	26	0.5	— 44
Taurocolato di sodio	—	41	0.8	—
	0.25	39	1.5	87
	0.5	35	1.8	125
	1	30	1.8	125
	10	26	1.2	50
	50	25	0.6	— 25
	100	25	0.6	— 25
	200	24	0.3	— 50
Bile	—	39	0.6	—
	0.1	38	1.2	100
	0.5	39	1.2	100
	1	41	0.8	25
	10	41	0.8	25
	50	42	0.8	25
	100	42	0.8	25
Alcool ottilico .	—	49	0.8	—
	0.01 (circa)	49	1.1	37.05
	0.05	45	0.8	0
	0.1	39	0.5	— 37.05
	1	26	0	—
	5	26	0	—
Alcool isoamilico	—	50	0.9	—
	0.01	50	0.9	0
	0.05	48	1	11
	0.1	47	1	11
	1	40	1.8	100
	5	35	0.5	— 44
Ovalbumina . .	—	44	0.9	—
	5	44	0.8	— 10
	10	42	0.6	— 33
	20	42	0.6	— 33
	50	42	0.5	— 44

TABELLA II.

Azione combinata del taurocolato e dell'oleato di sodio.

Oleato mmg	Taurocolato mmg	Tens. superf. dine	KOH 0,1 N cc.	Attivazione %
—	—	39	0.9	—
—	0.5	35	1.8	100
—	1	30	1.8	100
2.5	0.5	35	1.7	88
5	5	30	3.2	255
10	5	29	2	122

TABELLA III.

Medie di tre esperienze eseguite col metodo stalagmometrico.

Soluzione satura di tributirina. Concentrazioni variabili di oleato di sodio.

Tempo	Beuta n. 1 T. S. 44.8	Beuta n. 2 T. S. 44	Beuta n. 3 T. S. 42.8	Beuta n. 4 T. S. 41	Beuta n. 5 T. S. 39	Beuta n. 6 T. S. 35
—	100	100	100	100	100	100
15'	85	78	64	63	79	81
30'	70	62	58	57	70	72
60'	69	60	54	56	64	65
2h	65	58	52	54	60	60
8h	60	56	51	51	52	56
14h	52	53	51	50	51	54
24h	50	51	49	50	50	52

TABELLA IV.

Valori medi di tre esperienze eseguite con i manometri di Warburg. Quantità di tributirrina presente: 0.027 millimol. La tensione superficiale viene abbassata aggiungendo quantità variabili di oleato di sodio.

	Tributirrina idrolizzata %				
	App. n. 1 T. S. 43	App. n. 2 T. S. 42	App. n. 3 T. S. 39	App. n. 4 T. S. 31	App. n. 5 T. S. 28
dopo 15' . . .	8.2	15.1	18.2	12	10
» 30' . . .	14	20	29	18.2	17
» 60' . . .	20.4	26.5	34.5	22.1	22.7
» 120' . . .	31	31.8	36	30.8	32
» 180' . . .	38.6	40	40.2	37	38

Tali valori sono stati ottenuti col seguente calcolo: Poichè la quantità totale di tributirrina presente nei vari apparecchi era 0.027 millimol. la quale, se scissa totalmente avrebbe dato 0.027×3 millimol di acido butirrico e quindi di acido carbonico, dal numero di mmc di CO_2 prodotto alle fine dei vari intervalli di tempo considerati, si può risalire alla quantità di estere scisso.

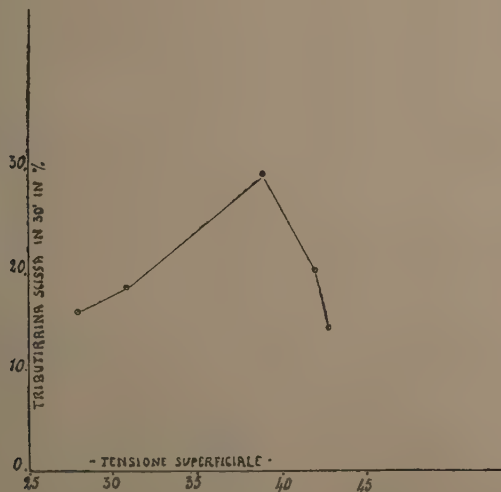


Fig. 1. — Quantità di tributirrina scissa in 30' a varie tensioni superficiali (Costruita coi dati della tabella IV).

IV. — DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

Dalle mie esperienze risulta che nel sistema tributirrina-lipasi esiste per le sostanze studiate un *optimum* di concentrazione, a cui corrisponde una tensione superficiale alla quale l'attivazione è massima. Tale tensione superficiale corrisponde abbastanza bene per l'oleato di sodio, il taurocolato, il glicocolato di sodio, la bile e l'alcool isoamilico; se ne discosta per l'alcool ottilico che ha azione attivante solo a concentrazione estremamente bassa, a cui corrisponde una tensione superficiale relativamente elevata.

Risulta altresì (dalle tabelle 3 e 4) che le maggiori differenze di attività enzimatica si hanno nei primi 60 minuti; evidentemente perchè col procedere ulteriore della scissione, le differenze iniziali di tensione superficiale vanno mano mano riducendosi fino a scomparire del tutto. Ed è perciò che nello studio che mi sono proposto ho tenuto conto soltanto della tensione superficiale iniziale.

Che l'oleato di sodio già in piccole concentrazioni avesse un'azione attivante sulla scissione pancreatica della tributirrina era stato già visto da Willstätter e Memmen. Tale fatto è stato in seguito confermato da numerosi autori e tra gli altri da Woodhouse ⁽¹⁾, il quale ha studiato l'effetto dell'aggiunta di numerosi sali di sodio di acidi organici (oleato, acetato, citrato ecc.) sulla lipolisi di olio di oliva, ed ha trovato che tali sali causano tutti, allo stesso modo dell'oleato di sodio, un aumento della lipolisi. L'autore pensa che tale fatto sia dovuto a una stabilizzazione della emulsione di olio. Egli non ci dice però a che pH sono state eseguite le sue determinazioni. Esperienze da me fatte per studiare la eventuale azione attivante dell'acetato, del citrato, del lattato di sodio sulla scissione della tributirrina a pH 8,9 hanno dato sempre risultato negativo.

Per quanto riguarda i sali biliari e la bile la loro azione attivante è già conosciuta da molti anni. Nencki ⁽²⁾, Pawlow ⁽³⁾, Magnus ⁽⁴⁾, v. Fürth e Schutz ⁽⁵⁾, ed in seguito Willstätter ⁽⁴⁾, Waldschmidt-Leitz ⁽⁴⁾, e tra noi Visco ⁽⁶⁾ e numerosi altri autori la hanno sempre riscontrata. Si era anche trovato che per la scissione dei trigliceridi a basso peso molecolare esiste un *optimum* di concentrazione dei sali biliari, che secondo Terroine ⁽⁷⁾ è

(1) D. L. WOODHOUSE, *Investigations in enzyme action directed towards the study of the biochemistry of cancer. The activation of pancreatic proliptase*. (« Bioch. J. », 26, 1512, 1932).

(2) NENCKI (citato da EULER, loc. cit., I Teil, p. 209).

(3) PAWLOW (citato da EULER, loc. cit., I Teil, p. 209).

(4) MAGNUS (« Ztschr. f. physiol. Chemie », 42, 149, 1902).

(5) FÜRTH v. und SCHÜTZ (citati da EULER, loc. cit., II Teil, I Abschn. S. 17).

(6) S. VISCO, *Sull'azione della lipasi pancreatica. Contributo alla biologia degli enzimi*. (« Rend. R. Acc. Lincei », Cl. Sc. Fis. Mat. e Nat., 20, ser. 5^a, I. 10, 1911).

(7) TERROINE (citato da EULER, loc. cit., II Teil, I Abschn., S. 18).

del 0,33 %. Ma se il fatto è certo, tutt'altro che assodato è il meccanismo di azione dei sali biliari. Prescindendo dalla ipotesi di Hewlett ⁽¹⁾ e Küttner ⁽²⁾, secondo i quali la azione attivante della bile sarebbe dovuta al suo contenuto in lecitina, ipotesi oramai definitivamente caduta dopo le ricerche di v. Fürth e Schutz, e dalla ipotesi di Bradley ⁽³⁾, che riteneva che i sali biliari agissero favorendo l'emulsione del substrato, il che è in contrasto col fatto sperimentalmente accertato, che i sali biliari agiscono anche su substrati completamente solubili; le teorie che attualmente si contendono il campo sono: 1° quella sostenuta da Magnus dell'attivazione di un zimogeno in enzima, e 2° quella ammessa da Willstätter, Waldschmidt-Leitz e Memmen i quali pensano che i sali biliari, come del resto molti altri attivatori, agiscano favorendo la formazione di prodotti di adsorbimento tra enzima e substrato.

Nelle mie esperienze si ha una attivazione la quale va aumentando col l'aumentare della concentrazione dei sali biliari per poi diminuire. Esiste quindi per i sali biliari una concentrazione alla quale corrisponde un *optimum* di attività enzimatica. Secondo la concezione di Alexander ⁽⁴⁾ l'azione degli enzimi dipende principalmente, ma non completamente dall'esposizione di grandi aree interfaciali aventi campi specifici elettronici di forza. Se il grado di aggregazione di un enzima è troppo grande, sono in presenza aree non sufficienti a produrre una notevole attività. D'altra parte se il grado di dispersione è molto notevole, si determina una attività cinetica esageratamente grande, per cui il numero di urti efficaci tra enzima e substrato viene ad essere notevolmente ridotto. L'attività enzimatica sarebbe quindi legata a due fatti fondamentali: 1° larga esposizione di aree specificamente attive; 2° grande, ma non esagerata attività cinetica.

Ora, quando si abbassa la tensione superficiale del mezzo nel quale si trovano enzima e substrato, si ha, per un noto principio di chimica-fisica, una diminuzione della tensione interfacciale tra le due fasi presenti; per conseguenza le molecole dell'enzima e del substrato diventano più accessibili l'una all'altra e la loro energia cinetica aumenta. Si avrebbe quindi, ammettendo l'ipotesi di Alexander, un'attivazione dell'enzima. Abbassandosi ulteriormente la tensione superficiale, i moti di agitazione molecolare diventano sempre più notevoli, ma disordinati, il numero degli urti efficaci viene ridotto e si avrebbe pertanto una diminuzione dell'attivazione.

Con questa semplice ipotesi si potrebbe quindi spiegare l'esistenza per la lipasi pancreatica di un *optimum* di tensione superficiale. Certo molte cose non sono chiare. Così non è facile dare una spiegazione di quello che

(1) HEWLETT (citato da EULER, loc. cit., II Teil, I Abschn., S. 17).

(2) KÜTTNER (« Ztschr. f. physiol. Chemie », 50, 472, 1907).

(3) BRADLEY (« J. Biol. Chem. », 133, 6, 1909).

(4) J. ALEXANDER, *Enzymes, vitamins and the zone of maximum colloidalità*. (« Science », 80, 79, 1934).

si verifica quando alla soluzione di lipasi e substrato si aggiungono simultaneamente due o più attivatori. Altri fattori devono intervenire, e primo fra questi, un'azione specifica dipendente dalla natura chimica dei singoli attivatori e dai processi chimici e chimico-fisici a cui essi possono dare origine. Così il fatto che per l'alcool ottilico l'*optimum* di tensione superficiale è più elevato che per l'oleato di sodio e i sali biliari, si potrebbe spiegare per l'azione tossica di questo alcool, per cui solo a piccolissima concentrazione, a cui corrisponde una tensione superficiale relativamente elevata prevale l'azione attivatrice, e viceversa a concentrazione solo di poco più alta, prevale l'azione tossica.

V. — CONCLUSIONI.

Si è trovato che per l'attività tributirrasica della lipasi pancreatica esiste un *optimum* di tensione superficiale statica, che per l'oleato, il glicocolato, il taurocolato di sodio, la bile e l'alcool isoamilico corrisponde a 38-40 dine.

PERSONALE ACCADEMICO

Il PRESIDENTE comunica l'avvenuta morte del Socio DE MARCHI e rievoca brevemente la figura dell'Insigne Scienziato.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta le opere inviate in omaggio all'Accademia segnalando il « Manuale di Meteorologia nautica » e « Maree e correnti di maree », pubblicati dall'Istituto idrografico della R. Marina.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio BOTTAZZI, anche a nome del Collega PIERANTONI, legge la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria del dott. M. Fedele: « I nervi del tronco arterioso nel quadro della innervazione cardiaca nei Rettili e il problema del “depressore” nei Vertebrati ».

L'Assemblea approva.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci ARMELLINI, BAGLIONI, LEVI-CIVITA, RAFFAELE, SCORZA, VISCO.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente sen. MILLOSEVICH apre la seduta inviando un caldo saluto alle nostre valorose truppe dell'Africa Orientale ed annuncia che, a cura del Presidente, saranno inviati a S. M. il Re, al Duce e al Maresciallo Badoglio dei messaggi che attestino la partecipazione viva che l'Accademia prende all'esultanza di tutta la Nazione per le splendide vittorie conseguite in Africa.

Il Socio CROCCO rileva la parte veramente notevole svolta dall'aviazione nelle recenti operazioni vittoriose e invita i Colleghi a inviare il loro caldo saluto ai nostri eroici aviatori, oltre che a tutte le forze armate nazionali e indigene che nei recenti combattimenti si sono coperte di gloria.

Vivissime approvazioni.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 1. marzo 1936

- ATUMI K. — La déviation de la verticale au Japon. (From « Japanese Journal of Astronomy and Geophysics ». Vol. X, pp. 305-312). S. l. 1933. 8°.
- BILIBINE V. — Les méthodes de calcul des réserves de pétrole souterraines. (Congrès Géologique International, XVIII session, URSS, 1937). Leningrad, 1936. 8°, pp. 1-27.
- CAMPBELL LEON. — Willard James Fisher 1867-1934. (Reprinted from « Popular Astronomy », Vol. XLIII). S. l. 1935. 8°, pp. 1-3.
- DOBELL CLIFFORD. — Research on the intestinal Protozoa of monkey's and man. VII. On the *Enteromonas* of Macaques and *Embadomonas intestinalis*. (From « Parasitology ». Vol. XXVI, pp. 564-592). Cambridge, 1935, 8°.
- FANTOLI GAUDENZIO. — R. Politecnico di Milano. L'inaugurazione dell'anno Accademico 1935-36, 19 novembre 1935-XIV. Relazione. Milano, 1935. 8°, pp. 1-12.
- GIORGIS GIORGIO. — Manuale di meteorologia nautica. Edizione II. (Istituto Idrografico della Regia Marina). Genova, 1935. 8°, pp. I-XV, 1-290.
- LONGO BIAGIO. — Relazione per l'anno 1934 sulla Stazione Sperimentale per le piante officinali annesse al R. Orto Botanico di Napoli. (Estr. dal « Bull. dell'Orto Botanico della R. Università di Napoli ». Tomo XIII, pp. 47-57). Napoli, s. d. 8°.
- SHAPLEY HARLOW. — A study of 7900' external Galaxies. (Reprinted from the « Proceedings of the National Academy of Sciences ». Vol. XXI, pp. 587-592). S. l. 1935. 8°.
- SHAPLEY HARLOW and SAYER ARTUR R. — The angular diameters of globular clusters. (Reprinted from the « Proceedings of the National Academy of Sciences ». Vol. XXI, pp. 593-597). Cambridge, 1935. 8°.
- TENANI M. — Maree e correnti di marea. Edizione II. (Istituto Idrografico della R. Marina). Genova, 1935. 8°, pp. I-VI, 1-215.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 15 marzo 1936 (anno XIV)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Geologia. — *Su di una Echinofauna pliocenica dei dintorni di Lentini (provincia di Siracusa)*⁽¹⁾. Nota⁽²⁾ del Corrisp. G. CHECCHIA-RISPOLI.

Il materiale che forma argomento della presente Nota mi è stato gentilmente inviato dal collega prof. O. De Fiore, direttore dell'Istituto geologico dell'Università di Catania; esso è stato raccolto dal dott. Francaviglia, durante il rilevamento geologico della tavoletta 270 III SW, nei tufi calcarei delle collinette, che vanno da Primosole a Valsavoia, nei dintorni di Lentini.

Per quanto il materiale si presenti nella maggior parte dei casi allo stato frammentario ed i grossi echinidi per lo più deformati, mi è stato tuttavia possibile distinguere un notevole numero di specie di sicura determinazione per la soddisfacente conservazione della superficie dei gusci. Tutte le specie vengono ora per la prima volta indicate per quel giacimento; trattandosi di forme ben note, mi limito a dare l'elenco di esse, accompagnandole con qualche breve annotazione:

Dorocidaris papillata Leske. — È rappresentato da molti radioli e da frammenti di guscio comprendenti notevoli porzioni di aree interambulacrali con annesse aree ambulacrali. Queste specie, vivente nel nostro Mediterraneo ed altrove, è da tempo conosciuta in parecchie località plioceniche e postplioceniche.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia e Paleontologia dell'Università di Roma.

(2) Presentata nella seduta del 15 marzo 1936.

Schizechinus serialis Pomel. — Oltre a frammenti isolati di guscio, possediamo un esemplare, di cui è conservata quasi tutta la faccia inferiore e più della metà di quella superiore. Sulla inferiore si osservano, ancora in posto, numerosi radioli, per lo più integri, i quali non erano ancora conosciuti per questa importante specie; essi sono corti, il più lungo misura appena 1 cm., gracili, vuoti, leggermente rastremati, a punta ottusa e a superficie finemente striata nel senso longitudinale. Si tratta di una forma pliocenica e per quanto riguarda l'Italia è stata finora ritrovata nel pliocene di Anzio (macco)⁽¹⁾ e recentemente in quello di Matera (tufo calcare)⁽²⁾. Non è conosciuta in terreni più recenti.

Sphaerechinus granularis Lamarck. — Grossi frammenti ben conservati e due gusci di grandi dimensioni deformati. È una specie vivente nel Mediterraneo e sulle coste atlantiche. Fossile è stata indicata nel quaternario di Reggio Calabria, di Monteleone Calabro, dei dintorni di Palermo ecc. La citazione del Meli nel macco di Anzio non è stata confermata dallo studio ulteriore di quella fauna echinitica; così pure è avvenuto per quella del tufo di Matera. Indubbiamente gli echinidi riferiti a *Sph. granularis* sono degli *Schizechinus serialis*.

Arbacia romana Mérian. — Numerosi esemplari ben conservati, di cui molti aventi ancora in posto l'apparecchio apicale, che facilmente si distacca durante il processo della fossilizzazione. È una specie estinta e frequentissima nei depositi pliocenici e postpliocenici.

Echinocyamus pusillus Müller. — Al pari dei precedenti, gli esemplari di questa specie sono abbondanti e ben conservati. Assai diffuso nel Mediterraneo e sulle coste atlantiche; è altresì comune nel pliocene e nel postpliocene.

Echinolampas Hoffmanni Desor. — È rappresentato da un grande numero d'esemplari. È una specie comune nel pliocene, ma che arriva sino al siciliano, dove, con essa, si estingue anche il genere *Echinolampas* nel Mediterraneo.

Spatangus purpureus Leske. — Frammenti di grossi gusci. È specie vivente ed indicata in giacimenti pliocenici e postpliocenici.

Brissopsis lyrifera Forbes. — Un solo esemplare, con la faccia abattinale ben conservata. Vivente e fossile nel pliocene e nel postpliocene.

(1) G. CHECCHIA-RISPOLI, *Gli Echinidi del Pliocene di Anzio*, 1923.

(2) G. SERRA, *Di alcuni Echinidi del Pliocene di Matera (Lucania)*, 1935.

Brissus Scillae Agassiz. — Un solo esemplare incompleto, ma di sicura determinazione. Specie fossile nel pliocene e nel postpliocene ed ancora vivente nel Mediterraneo.

Le prime notizie sul tufo conchigliare dei dintorni di Lentini si devono al Baldacci ⁽¹⁾; le ulteriori e più dettagliate al Gignoux ⁽²⁾.

Dalle osservazioni dei predetti autori e da quelle del De Fiore, risulta così la costituzione geologica della serie di collinette, che separa la piana di Catania dal pantano di Lentini.

Alla base affiora un calcare miocenico abraso in superficie ed in qualche punto addirittura terrazzato. Su di esso poggiano (ed evidentemente molto più tarde) numerose nappe laviche, prodotte da eruzioni eminentemente effusive. Su queste riposano i tufi calcarei con fauna ricca di individui, ma povera di specie di molluschi, brachiopodi, briozoi ed echinodermi, che sono quelli descritti in precedenza.

Al contatto fra i tufi calcarei sovrastanti e le nappe laviche sottostanti, queste sono trasformate in vere puddinghe, che in taluni punti sono anche fossilifere, le quali si sono evidentemente formate durante la sedimentazione dei calcari a spese delle superfici laviche.

Nel giacimento detto di Valsavoia-Primosole, il medesimo da cui provengono gli Echinidi qui studiati, il Gignoux raccolse le seguenti specie:

Ostrea cfr. *edulis* L., *O. cochlear* Poli, *Anomia ephippium* L., *Lima inflata* Chemn., *Chlamys opercularis* L., *C. multistriatus* Poli, *C. varius* L., *C. spinosovatus* Sacco, *C. pesfelis* L., *C. clavatus* Poli var. *inflexa* Poli e var. *Dumasi* Payr., *C. septemradiatus* Müll. var. *subclavata* Cantr. sp., *Nucula placentina* Lmk. (?), *Isocardia cor* L., *Crania lamellosa* Segu., *Mühlfeldtia truncata* L., *Terebratula minor* Phil., *T.* cfr. *ampulla* Br., in base alle quali egli riferisce quel tufo al Calabriano inferiore od anche al Pliocene inferiore, considerandolo sottostante alle note argille subetnee.

In quanto alla fauna echinologica di Valsavoia-Primosole, questa ha molti caratteri in comune con altre faune plioceniche, specialmente con quella di Anzio, da me descritta anni or sono, per quanto più povera. La maggior parte delle specie sono viventi, ma altre sono completamente estinte, come *Schizechinus serialis*, *Echinolampas Hoffmanni*, *Arbacina romana*. La presenza della prima, finora ritrovata solamente nel pliocene ed alcune specie indicate dal Gignoux, cioè una forma di pettine del gruppo della *Chlamys spinosovatus*, la *Crania lamellosa* e *Terebratule* del gruppo della *T. ampulla*, confermano il riferimento dei tufi conchigliari di Valsavoia-Primosole al Pliocene, come già scrisse per il primo il Baldacci. Per tutti i caratteri poi questi

(1) L. BALDACCÌ, *Descrizione geologica dell'Isola di Sicilia*, 1886.

(2) M. GIGNOUX, *Les formations marines pliocènes et quaternaires de l'Italie du Sud et de la Sicile*, 1913.

tufi sembrano equivalenti a quelli della regione pugliese; però non credo che, come questi, essi occupino un posto basso nella serie pliocenica. Lo studio intrapreso dal dott. Francaviglia sui molluschi, che egli va raccogliendo, potrà precisare la posizione di quei tufi nel Pliocene. Intanto mi è parso di un certo interesse segnalare il rinvenimento di una fauna di echinidi così ricca di specie e del tutto sconosciuta per quella parte della Sicilia orientale.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle funzioni determinanti.* Nota di U. BROGGI, presentata⁽¹⁾ dal Socio G. FUBINI.

$z = 1$ sia punto singolare della serie

$$\psi(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots$$

di raggio di convergenza 1.

Se $\lambda > 0$ è $\left| \frac{z - \lambda}{z} \right| = 1$ se $Rz = \frac{\lambda}{2}$, $\frac{z - \lambda}{z} = 1$ se $z = \infty$. La serie

$$\frac{1}{z} \left(\alpha_0 + \alpha_1 \frac{z - \lambda}{z} + \alpha_2 \left(\frac{z - \lambda}{z} \right)^2 + \dots \right)$$

converge nel semipiano $Rz > \frac{\lambda}{2}$ e vi definisce una funzione $F_\lambda(z)$ regolare in esso. Condizione necessaria perchè $F_\lambda(z)$ sia determinante ed esprimibile, se $Rz > \frac{\lambda}{2}$, a mezzo di un integrale di Laplace

$$F_\lambda(t) = \int_0^\infty e^{-tz} \Phi_\lambda(t) dt$$

è che

$$(A) \quad (1 - z) \psi(z) \rightarrow 0, \quad \text{se } z \rightarrow 1$$

senza uscire da $|z| < 1$: assumendo cioè valori rappresentati da punti compresi fra due corde di $|z| = 1$ passanti per $z = 1$.

(A) è soddisfatta se $\alpha_n \rightarrow 0$. Si ha infatti per un noto teorema di Hadamard che, se $\omega > 0$ e

$$\frac{a_n}{n^{\omega-1}} \rightarrow 0, \quad \text{se } n \rightarrow \infty,$$

(1) Nella seduta del 1° marzo 1936.

la serie $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots$ converge in $|z| < 1$ e

$$(1 - |z|)^{\omega} f(z) \rightarrow 0, \quad \text{se } |z| \rightarrow 1$$

uniformemente per tutto il circolo $|z| = 1$, se z tende ad un punto del circolo dall'interno di questo ⁽¹⁾.

Nei due casi particolari in cui

$$1^{\circ}. \alpha_0 + \alpha_1 + \dots \text{ converge,}$$

$$2^{\circ}. \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \dots \text{ converge,}$$

la determinazione della funzione generatrice $\Phi_{\lambda}(t)$ e pertanto la dimostrazione che $F_{\lambda}(z)$ è determinante è data dalla formola d'inversione di Riemann e rispettivamente dal teorema di Fischer-Riesz.

Se $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots$ converge, ed ha la somma A , è anche, per il teorema di continuità di Abel

$$\lim_{z \rightarrow 1} \psi(z) = A, \quad \text{se } z \rightarrow 1$$

assumendo valori di modulo minore di 1, e può scriversi

$$F_{\lambda}(z) = \frac{A}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad \text{se } z \rightarrow \infty.$$

Ove sia $\nu > \frac{\lambda}{2}$, si ha pertanto

$$(a) \quad \Phi_{\lambda}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\nu - i\infty}^{\nu + i\infty} \frac{e^{tu}}{u} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{u-\lambda}{u}\right)^n du;$$

$$(b) \quad |\Phi_{\lambda}(t)| < e^{\left(\frac{\lambda}{2} + \epsilon\right)t}$$

in corrispondenza di valori abbastanza grandi di $t > 0$;

$$(c) \quad \Phi_{\lambda}(t) = A + O(t), \quad \text{se } t \rightarrow 0^{(2)}.$$

Se $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \dots$ converge, il teorema di Fischer-Riesz permette di affermare l'esistenza di $\Phi_{\lambda}(t)$ e l'integrabilità L_2 di $e^{-\frac{\lambda}{2}t} \Phi_{\lambda}(t)$ ⁽³⁾, mentre

(1) J. HADAMARD, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*. (« J. Math. pures et appl. », 4^{ème} série, to. VIII (1892), pp. 154-186).

(2) G. POLYA *Ueber Lücken und Singularitäten von Potenzreihen*. « Math. Zeitschrift », 29 (1929), pp. 549-640.

(3) Cfr. per una trattazione del caso in cui $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \dots$ converge indipendentemente dal teorema di Fischer-Riesz, M. PICONE, *Sulla trasformata di Laplace*. « Rend. Lincei », XXI (1935); cfr. pure BROGGI, *Funzioni determinanti e polinomi di Laguerre*. « Rend. Lincei », XXIII (1936).

per la disuguaglianza di Schwarz l'ascissa α di convergenza dell'integrale di Laplace

$$\int_0^{\infty} e^{-t\lambda} \Phi_{\lambda}(t) dt$$

non è maggiore di $\frac{\lambda}{2}$.

Le due funzioni definite quasi sempre in $(0, \infty)$ dall'integrale di Riemann (a), rispettivamente dal teorema di Fischer-Riesz, coincidono quasi dappertutto se entrambe esistono. È questa sempre una conseguenza del teorema secondo il quale due generatrici di una funzione determinante solo possono differire in un insieme di misura nulla, e, se $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots$ converge assolutamente, del fatto che se una successione di funzioni converge a un limite fisso $f(x)$ quasi dappertutto in un intervallo assegnato e converge in media verso un limite $g(x)$, $f(x)$ e $g(x)$ coincidono quasi dappertutto (1).

Si ha infatti, se $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots$ converge assolutamente, che

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{\lambda - \lambda}{\lambda} \right)^n = \int_0^{\infty} e^{-t\lambda} \sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v L_v(\lambda t) dt$$

dove $L_n(t) = \frac{e^t}{n!} D^n (e^{-t} t^n)$ è il polinomio di Laguerre di ordine n .

Lo si vede ricordando che $L_n(0) = 1$ e, se $t > 0$

$$|L_n(t)| < e^{\frac{t}{2}}, \quad |L_n(t)| = O\left(n^{-\frac{1}{4}}\right)^{(2)}$$

la serie $\alpha_0 L_0(\lambda t) + \alpha_1 L_1(\lambda t) + \dots$ converge assolutamente in ogni punto del semiasse reale positivo uniformemente in ogni intervallo chiuso finito $a \leq t \leq b$ ($a \geq 0$) dello stesso, se $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots$ converge assolutamente. La convergenza della serie al primo membro giustifica s'integri termine a termine (3).

Poichè, se $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \dots$ converge, si ha invece

$$\Phi_{\lambda}(t) = L \cdot i. m_{n \rightarrow \infty} (\alpha_0 L_0(\lambda t) + \alpha_1 L_1(\lambda t) + \dots + \alpha_n L_n(\lambda t)),$$

ci troviamo nelle condizioni supposte dall'ultimo dei teoremi formulati.

(1) Cfr. N. WIENER, *The Fourier Integral* (1933), p. 33.

(2) Cfr. S. WIGERT, *Contributions à la théorie des polynômes d'Abel-Laguerre*. « Arkiv. för Mat. Astr. o ch. Fys. », vol. 15 (1921), 25; G. SZEGÖ, « Math. Zeitschr. », vol. I, 2, § 2.

(3) Cfr. BROMWICH, *An introd. to inf. Series* (1926), p. 500.

Se $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots$ converge, senza convergere assolutamente, la serie $\alpha_0 L_0(\lambda t) + \alpha_1 L_1(\lambda t) + \dots$ può divergere, ma è sempre sommabile Abel. Esiste cioè

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (\alpha_0 L_0(\lambda t) + \alpha_1 r L_1(\lambda t) + \alpha_2 r^2 L_2(\lambda t) + \dots)$$

e si ha quasi sempre

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{v-i\infty}^{v+i\infty} \frac{e^{tu}}{u} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{u-\lambda}{u} \right)^n du = \lim_{r \rightarrow 1-0} (\alpha_0 L_0(\lambda t) + \alpha_1 r L_1(\lambda t) + \dots).$$

L'integrale del primo membro, che può scriversi

$$\frac{e^{vt}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{tv}}{t+v} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{v+v-\lambda}{v+v} \right)^n dv$$

converge, poichè $|e^{tv}| = 1$, uniformemente in t se $t \geq 0$, uniformemente, e definisce una funzione continua di t generatrice di una funzione determinante di ascissa di convergenza minore di $+\infty$. Ad essa corrisponde uno sviluppo $\sum \beta_n L_n(\lambda t)$ che può divergere, ma è sempre sommabile Abel e la di cui somma Abel coincide col valore della funzione (1).

Poichè si ha qualunque sia r positivo minore di 1,

$$\frac{1}{\tilde{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n \left(\frac{\tilde{\lambda}-\lambda}{\tilde{\lambda}} \right)^n = \int_0^{\infty} e^{-t\tilde{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n L_n(\lambda t) dt$$

ed esiste il limite del primo membro se $r \rightarrow 1$, è anche $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 = \beta_1$, ...

$$\frac{1}{\tilde{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{\tilde{\lambda}-\lambda}{\tilde{\lambda}} \right)^n = \int_0^{\infty} e^{-t\tilde{\lambda}} \left(\lim_{r \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n L_n(\lambda t) \right) dt.$$

Si presenta naturale la domanda, dalla risposta alla quale dipende il carattere dei risultati ottenuti se, ove sia $\mu > \lambda$ e

$$F_{\lambda}(\tilde{\lambda}) = \frac{1}{\tilde{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{\tilde{\lambda}-\lambda}{\tilde{\lambda}} \right)^n = \frac{1}{\tilde{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left(\frac{\tilde{\lambda}-\mu}{\tilde{\lambda}} \right)^n,$$

dalla convergenza (rispettivamente: dalla convergenza assoluta) di $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots$ possa venire dedotta la convergenza (rispettivamente: la convergenza assoluta) di $\beta_0 + \beta_1 + \dots$, dalla convergenza di $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \dots$ quella di $\beta_0^2 + \beta_1^2 + \dots$, e con uguali somme.

(1) WIGERT, loc. cit.; BROGGI, loc. cit.

Se $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots$ converge l'integrale di Riemann (a) definisce una funzione $\Phi_\lambda(t)$ di t olomorfa se t è reale e maggiore di zero, che gode delle proprietà (b) e (c). Ad essa corrisponde una funzione determinante $F_\lambda(z)$, olomorfa in $Rz > \frac{\lambda}{2}$ e pertanto in $Rz > \frac{\mu}{z}$ se $\mu > \lambda$, sviluppabile in una serie di potenze di $\frac{z-\mu}{z}$

$$F_\lambda(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left(\frac{z-\mu}{z} \right)^n = \frac{A}{z} + O(z^{-2})^{(1)}, \quad \text{se } z \rightarrow \infty$$

tale che è uno il raggio di convergenza della serie $\beta_0 + \beta_1 z + \dots$.

Se $\beta_0 + \beta_1 + \dots$ divergesse, o convergesse con somma $B \neq A$, la funzione generatrice $\Phi_\lambda(t)$ di $F_\lambda(z)$ non potrebbe godere della proprietà (c), di cui essa gode.

La proposizione concernente la convergenza assoluta non è che un caso particolare di questa.

Che può venire formulata:

« $z = 1$ sia punto singolare della serie $f(z) = c_0 + c_1 z + \dots$, di raggio di convergenza 1, e $c_0 + c_1 + \dots$ converga, con somma S . Se è $f(z) = \gamma_0 + \gamma_1 (z-\alpha) + \gamma_2 (z-\alpha)^2 + \dots$, e $0 < \alpha < 1$, $\gamma_0 + \gamma_1 (1-\alpha) + \dots$ converge, con somma S ».

Si è infatti dimostrato che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^m \psi^{(m)} \left(\frac{\mu-\lambda}{\mu} \right)$$

converge ed ha la somma $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots = A$. Ove si ponga $\frac{\mu-\lambda}{\mu} = \alpha$ e si sostituisca alla serie $\psi(z)$ la $f(z)$, si ottiene senz'altro:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (1-\alpha)^m f^{(m)}(\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m (1-\alpha)^m$$

converge ed ha la somma $c_0 + c_1 + \dots = S$.

Che finalmente sia $\beta_0^2 + \beta_1^2 + \dots \leq \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \dots$ è un'immediata conseguenza del fatto che, se $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \dots$ converge, $e^{-\frac{\lambda}{2}t} \Phi_\lambda(t)$ è L_2 in $(0, \infty)$ e lo è pertanto $e^{-\frac{\mu}{2}t} \Phi_\lambda(t)$. Per la relazione di Parseval⁽²⁾ si ha

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \Phi_\lambda^2(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2 \geq \int_0^\infty e^{-\mu t} \Phi_\lambda^2(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^2.$$

(1) Cfr. G. POLYA, loc. cit.

(2) Cfr. S. WIGERT, loc. cit.; U. BROGGI, loc. cit.

Matematica. — *Sulle varietà di Veronese a due indici.*

Nota II⁽¹⁾ di B. SEGRE, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. G. SCORZA.

§ 3. — RELAZIONI MUTUE E COSTRUZIONE DELLE Π .

8. Dimostriamo che:

Fissato in Σ_n un qualunque punto P, non situato su $\Phi^{(1)}$, le varietà $\Pi^{(r)}$, $\Pi^{(s)}$ ch'esso — giusta il n. 1 — induce in due Φ , aventi indici r, s legati dalla $r + s = n + 1$, sono trasformate la prima nella seconda dall'omologia che ha per centro P, per asse l'iperpiano π polare di P rispetto a $\Phi^{(1)}$ e per invariante $-r/s$ ⁽³⁾.

A P e π risponde in S_n — come s'è detto nel n. 2^o — una medesima quadrica \mathcal{Q} non specializzata, pensata la prima volta come involuppo e la seconda volta come luogo. Un generico punto A di $\Pi^{(r)}$ proviene da uno spazio α di S_n , avente la dimensione $n - r = s - 1$, e (n. 1) rappresenta la quadrica-involuppo di S_n , r volte specializzata, che ha per nucleo la quadrica indotta da \mathcal{Q} in α ; e, similmente, un punto B di $\Pi^{(s)}$ proviene da uno spazio β di S_n , di dimensione $n - s = r - 1$. Vedremo che i punti A e B si corrispondono nella suddetta omologia, se gli spazi α e β sono sghembi e mutuamente polari rispetto a \mathcal{Q} ; siccome preso α genericamente in S_n resta determinato uno spazio β , sghembo con α , polare di α rispetto a \mathcal{Q} , così ne seguirà tosto l'asserto.

Si tratta di provare che, supposti α, β sghembi e l'un l'altro polari rispetto a \mathcal{Q} , le quadriche-involuppo \mathcal{A} e \mathcal{B} , rispettivamente specializzate r ed s volte, aventi come nuclei le quadriche indotte da \mathcal{Q} in α ed in β , determinano una schiera a cui appartiene la quadrica-involuppo aderente a \mathcal{Q} ; ed inoltre che, detta \mathcal{Q} la quadrica-involuppo di tale schiera apolare alla quadrica-luogo \mathcal{Q} , risulta

$$(\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{B}) = -r/s.$$

Assumiamo, a tal uopo, in S_n coordinate proiettive omogenee di punto $(x_1, x_2 \dots x_r, y_1, y_2 \dots y_s)$ e di iperpiano $(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_r, \eta_1, \eta_2 \dots \eta_s)$, di modo

(1) Continuazione della Nota I, pubblicata a p. 303 di questi «Rendiconti».

(2) Nella seduta del 1^o marzo 1936.

(3) In una prima redazione di questo lavoro io avevo solo stabilito che l'omologia suddetta trasforma $\Pi^{(r)}$ in una varietà giacente per intero su $\Phi^{(1)}$; il fatto che quest'ultima varietà coincide proprio colla $\Pi^{(s)}$ mi è stato gentilmente indicato dal prof. G. SCORZA, a cui porgo sentiti ringraziamenti.

che α e β si identifichino rispettivamente cogli spazi fondamentali opposti

$$(1) \quad x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0 \quad \text{e} \quad y_1 = y_2 = \dots = y_s = 0.$$

Allora la quadrica-luogo \mathcal{S} avrà un'equazione della forma

$$(2) \quad \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r b_{ij} x_i x_j + \sum_{h=1}^s \sum_{k=1}^s a_{hk} y_h y_k = 0 \quad (a_{hk} = a_{kh}, b_{ij} = b_{ji}),$$

colla condizione che i determinanti A e B rispettivamente delle a_{hk} e delle b_{ij} siano entrambi $\neq 0$; denotando, al solito, con A_{hk} e B_{ij} i complementi algebrici di questi elementi in quei determinanti, la quadrica-inviluppo aderente a \mathcal{S} si rappresenterà coll'equazione:

$$(3) \quad A \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r B_{ij} \xi_i \xi_j + B \sum_{h=1}^s \sum_{k=1}^s A_{hk} \eta_h \eta_k = 0.$$

In virtù delle (1), (2) si hanno subito le quadriche-luogo indotte da \mathcal{S} in α e β , da cui si deducono per \mathcal{A} e \mathcal{B} rispettivamente le equazioni

$$\sum_{h=1}^s \sum_{k=1}^s A_{hk} \eta_h \eta_k = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r B_{ij} \xi_i \xi_j = 0.$$

La quadrica-inviluppo \mathcal{S} appartiene effettivamente alla schiera di queste due, in quanto la (3) è della forma

$$(4) \quad \lambda \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r B_{ij} \xi_i \xi_j + \mu \sum_{h=1}^s \sum_{k=1}^s A_{hk} \eta_h \eta_k = 0;$$

di più, poichè la condizione di apolarità fra la (2) e la (4) è

$$\lambda \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r b_{ij} B_{ij} + \mu \sum_{h=1}^s \sum_{k=1}^s a_{hk} A_{hk} = 0,$$

ossia

$$(5) \quad \lambda r B + \mu s A = 0,$$

così la quadrica-inviluppo \mathcal{Q} è data dalla (4) ove il rapporto λ/μ si determini colla (5). In definitiva, risulta precisamente

$$(\mathcal{S} \mathcal{Q} \mathcal{A} \mathcal{B}) = (A/B, -sA/rB, 0, \infty) = -r/s.$$

9. In base ai nn. 1, 4 è facile constatare che, sempre supponendo $r + s = n + 1$, un qualunque spazio Σ_R generatore di $\Phi^{(r)}$ sta per intero su $\Phi^{(s)}$, se è $r \geq s$; mentre, invece, per $r < s$ (ossia $2r < n + 1$) esso incontra $\Phi^{(s)}$ secondo una varietà di VERONESE di indici $(n - 2r + 1, n - r)$. Dimosteremo che, in ogni caso,

Uno spazio Σ_R generatore di $\Phi^{(r)}$ è congiunto al punto P mediante uno spazio Σ_{R+1} , il quale incontra $\Phi^{(s)}$ — fuori di Σ_R — in uno ed un sol punto, appartenente alla varietà $\Pi^{(s)}$ indotta da P in $\Phi^{(s)}$.

Σ_R rappresenta la totalità delle quadriche di S_n , almeno r volte specializzate, la cui quadrica-nucleo sta in un dato S_{n-r} di S_n (n. 4); denotiamo con α questo spazio, consideriamo lo spazio β polare di α rispetto alla quadrica \mathcal{B} di S_n omologa di P, e facciamo uso delle altre notazioni introdotte nel numero precedente. Ai singoli punti di Σ_R rispondono allora, in S_n , quadriche-inviluppo rappresentate da un'equazione quadratica nelle sole η ; dunque, avuto riguardo all'equazione (3) di \mathcal{B} , si ha che i punti di Σ_{R+1} che non stanno su Σ_R sono le immagini delle quadriche rappresentate dalla

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r B_{ij} \xi_i \xi_j + \sum_{h=1}^s \sum_{k=1}^s \Gamma_{hk} \eta_h \eta_k = 0,$$

al variare dei parametri (finiti) Γ_{hk} . Fra queste quadriche, la sola \mathcal{B} (proveniente dalla scelta di valori tutti nulli per le Γ_{hk}) risulta s volte specializzata⁽¹⁾; e ciò si traduce appunto in Σ_v col fatto asserito.

10. Preso un generico punto A di $\Phi^{(r)}$ che sia congiunto a P da una retta appoggiata a $\Phi^{(s)}$ in un punto B distinto da A, è chiaro che B non sta sullo spazio Σ_R generatore di $\Phi^{(r)}$ passante per A, e risulta comune a $\Phi^{(s)}$ ed allo spazio Σ_{R+1} congiungente Σ_R con P; pertanto (n. 9) il punto B appartiene a $\Pi^{(s)}$ e, similmente (od anche in virtù del n. 8), il punto A giace su $\Pi^{(r)}$. Si conclude che:

La varietà $\Pi^{(r)}$, definita nel n. 1, è precisamente il luogo dei punti di $\Phi^{(r)}$ congiunti a P da rette che si appoggiano a $\Phi^{(s)} = \Phi^{(n-r+1)}$ in un punto ulteriore⁽²⁾.

Si può perciò costruire in Σ_v la varietà $\Pi^{(r)}$ indotta in $\Phi^{(r)}$ dal generico punto P, nel modo che tosto indichiamo distinguendo tre casi a seconda che è $r \equiv s$.

a). — Se è $r < s$ (ossia $2r < n + 1$), la varietà $\Phi^{(r)}$ passa per la $\Phi^{(s)}$ colla molteplicità $\kappa_{r,s-1}$ (n. 6). Si ottiene $\Pi^{(r)}$ come intersezione di $\Phi^{(r)}$ col cono proiettante da P la $\Phi^{(s)}$, fuori di quest'ultima varietà.

b). — Se è $r = s$ (ossia $2r = n + 1$), il che esige che n sia dispari, $\Pi^{(r)}$ è il luogo delle coppie di punti d'appoggio su $\Phi^{(r)}$ delle corde di

(1) Si ottengono infatti le $\Gamma_{hk} = 0$ annullando i diversi minori, d'ordine $n - s + 2 = r + 1$, estratti dalla matrice dei coefficienti della forma quadratica che compare nel primo membro dell'ultima equazione e contenenti il determinante d'ordine r (non nullo) $|B_{ij}|$.

(2) Ciò è d'accordo col fatto, d'immediata verifica, che la dimensione rs di $\Pi^{(r)}$ si esprime mediante la dimensione v dello spazio ambiente e le dimensioni $\delta_{r,n}, \delta_{s,n}$ di $\Phi^{(r)}, \Phi^{(s)}$ colla

$$rs = \delta_{r,n} + \delta_{s,n} - v + 1.$$

questa varietà che escono da P. Dal teorema del n. 8 segue in particolare che:

Se n è dispari, la varietà $\Pi^{(r)}$ di indice $r = \frac{1}{2}(n+1)$ è mutata in sé dall'omologia armonica di centro P ed asse π .

c). — Se è $r > s$ (ossia $2r > n+1$), si potrà dapprima costruire $\Pi^{(s)}$ applicando ciò che si è detto in a); dopo di ciò, in base al n. 8, si ha subito $\Pi^{(r)}$ come trasformata di $\Pi^{(s)}$ nell'omologia di centro P, asse π e caratteristica $-s/r$.

§ 4. — INTORNO ALL'ORDINE DELLA VARIETÀ $\Pi^{(r)}$.

11. In base al n. 10, a), la varietà $\Pi^{(1)}$ si può costruire (qualunque sia $n > 1$) come intersezione residua — fuori di $\Phi^{(n)}$ — dell'ipersuperficie $\Phi^{(1)}$ col cono proiettante $\Phi^{(n)}$ da P. Poichè (nn. 2, 6) $\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(n)}$ sono rispettivamente di ordine $n+1$, 2^n e la prima passa n volte per la seconda, l'ordine di $\Pi^{(1)}$ vale

$$(n+1) \cdot 2^n - n \cdot 2^n = 2^n.$$

Allo stesso risultato si sarebbe anche potuto senz'altro giungere ricordando (n. 1) che $\Pi^{(n)}$ coincide in ogni caso colla varietà $\Phi^{(n)}$ (di ordine 2^n), ed osservando che, in virtù del teorema stabilito nel n. 8, le varietà $\Pi^{(r)}$, $\Pi^{(n-r+1)}$ hanno sempre il medesimo ordine.

12. Vogliamo ora studiare la questione generale di determinare l'ordine t di $\Pi^{(r)}$; tenuto conto del numero precedente, basta solo riferirsi ai casi in cui è

$$4 \leq 2r \leq n+1,$$

talchè la varietà $\Pi^{(r)}$ può venir costruita nel modo indicato in a) od in b) al n. 10. Attualmente però, posto ancora per comodità $s = n - r + 1$, la dimensione rs di $\Pi^{(r)}$ risulta inferiore alla dimensione $\delta_{r,n}$ di $\Phi^{(s)}$, ciò che fa sì che il problema risulti di gran lunga meno semplice di quello trattato nel primo capoverso del n. 11. Per risolverlo, applicheremo alle varietà $\Phi^{(r)}$, $\Phi^{(s)}$ il risultato contenuto nel n. 5 [form. (8)] del lavoro dell'autore citato nella Nota I; posto per abbreviare

$$\omega = v - \delta_{r,n} - 2 = \frac{1}{2}r(r+1) - 2,$$

l'ordine t di $\Pi^{(r)}$ risulta così espresso dall'uguaglianza

$$(6) \quad t = x_{r,n} x_{s,n} - x_{r,s-1} x_{r,n} - \sum_{i=0}^{\omega} u_i,$$

nella quale le u_i hanno i significati più oltre definiti e le x si calcolano colle formule date al principio del n. 2.

Per ottenere u_i , si consideri la varietà Ω sezione di $\Phi^{(s)}$ con un generico spazio $\Sigma_{v-r, -i}$ di Σ_v , ed il luogo dei coni o (per $r = s$) degli spazi lineari — a $\delta_{r, n}$ dimensioni — tangenti a $\Phi^{(r)}$ nei singoli punti di Ω ; tale luogo ha la dimensione

$$\delta_{r, n} + (\delta_{s, n} - rs - i) = v - i - 1,$$

ed il suo ordine è precisamente u_i .

Come spazio $\Sigma_{v-r, -i}$ si può intanto prendere quello che ha per immagine, in S_n , la totalità delle quadriche-inviluppo tangenti ad $rs + i$ iperpiani generici di S_n ; Ω si rappresenta allora, in S_n , colle quadriche di detta totalità che sono (almeno) s volte specializzate. Una generica di queste quadriche ha la relativa quadrica-nucleo (tangente a quegli $rs + i$ iperpiani e) appartenente ad uno spazio S_{r-1} di dimensione $n - s = r - 1$; ebbene (n. 7), il cono o lo spazio tangente a $\Phi^{(r)}$ nel punto di Ω che corrisponde alla quadrica considerata, rappresenta l'insieme delle quadriche-inviluppo di S_n aderenti alle quadriche-luogo che contengono quell' S_{r-1} . Ne segue che:

Assegnati genericamente in S_n $rs + i$ iperpiani ed un sistema lineare ∞^{i+1} di quadriche-inviluppo, u_i è il numero degli S_{r-1} di S_n che, contemporaneamente, soddisfano alle due condizioni di stare su di una quadrica-luogo aderente ad una delle suddette ∞^{i+1} quadriche-inviluppo e di contenere una V_2^{r-2} tangente agli $rs + i$ iperpiani fissati.

13. Gli S_{r-1} di S_n sono ∞^{rs} : quelli, fra essi, che separatamente soddisfano alla prima od alla seconda delle condizioni enunciate alla fine del numero precedente, costituiscono ordinatamente due sistemi algebrici, \mathfrak{S} e \mathfrak{R} , di dimensioni complementari

$$h = rs - \omega + i - 1 \quad \text{e} \quad k = \omega - i + 1.$$

Il numero u_i degli S_{r-1} comuni ad \mathfrak{S} e \mathfrak{R} si esprime notoriamente colla formula di SCHUBERT

$$(7) \quad u_i = \sum \{c_0 c_1 \cdots c_{r-1}\} \cdot \{n - c_{r-1}, n - c_{r-2}, \dots, n - c_0\},$$

come la somma dei prodotti di tutte le possibili coppie di gradi coniugati dei sistemi \mathfrak{S} , \mathfrak{R} ⁽¹⁾. In questa formula, il simbolo $\{c_0 c_1 \cdots c_{r-1}\}$ rappresenta il numero degli S_{r-1} di \mathfrak{S} che soddisfano alla condizione di SCHUBERT $(c_0 c_1 \cdots c_{r-1})$, onde gli interi c sono solo soggetti alle note limitazioni $0 \leq c_0 < c_1 < \cdots < c_{r-1} \leq n$ ed alla

$$\sum_{j=0}^{r-1} c_j = r^2 - i - 1$$

(1) Cfr. H. SCHUBERT, « Mittheil. der Hamb. Math. Ges. », to. I (1886), p. 134; oppure C. SEGRE, « Encykl. der Math. Wiss. », to. III, 2, p. 819.

esprimente che la condizione $(c_0 c_1 \dots c_{r-1})$ ha molteplicità b ; analogo significato ha il simbolo $\{n - c_{r-1}, n - c_{r-2}, \dots, n - c_0\}'$ in relazione a \mathfrak{R} . In base alle (6), (7), per avere i non restano che da calcolare i valori numerici dei simboli testè introdotti.

Rammentiamo, a questo scopo, che lo SCHUBERT (nella Memoria citata al n. 1 della Nota I) ha profondamente trattato il problema di determinare il numero

$$(8) \quad (a_0 a_1 \dots a_p) \mu_1^{m_1} \mu_2^{m_2} \dots \mu_p^{m_p} \quad (p \leq n)$$

che, supposto $p + \sum_{j=0}^p a_j = \sum_{j=0}^p m_j$, rappresenta quante sono le V_{p-1}^2 di S_n che risultano tangenti ad $m_1 S_{n-1}, m_2 S_{n-2}, \dots, m_p S_{n-p}$ (assegnati in S_n in modo generico) e tali inoltre che il relativo S_p di appartenenza soddisfi alla condizione $(a_0 a_1 \dots a_p)$. Nella suddetta Memoria trovasi un procedimento generale per il calcolo dei caratteri (8); ma la formula finale riesce assai complicata, anche nei casi — che soli son trattati fino in fondo — in cui si suppone $m_4 = m_5 = \dots = m_p = 0$.

Orbene, i simboli che figurano nel secondo membro della (7) possono venir espressi in funzione dei caratteri (8). Dalla definizione del sistema \mathfrak{R} si ha infatti senz'altro

$$\begin{aligned} & \{n - c_{r-1}, n - c_{r-2}, \dots, n - c_0\}' = \\ & (n - c_{r-1}, n - c_{r-2}, \dots, n - c_0) \mu_1^{r_1+i}; \end{aligned}$$

e si intuisce che la cosa debba anche valere per i simboli

$$(9) \quad \{c_0 c_1 \dots c_{r-1}\}.$$

Così, p. es., per $i = 0$ \mathfrak{S} si riduce al sistema degli S_{r-1} di S_n che stanno sulle quadriche di una schiera, ed è subito visto che i soli simboli (9) non nulli sono quelli che provengono da valori delle c della forma

$$\begin{aligned} c_0 = 1, c_1 = 3, \dots, c_{j-1} = 2j - 1, c_j = 2j, c_{j+1} = 2j + 3, \\ \dots, c_{r-1} = 2r - 1, \end{aligned}$$

i quali risultano precisamente uguali a

$$2^{r-1} \cdot (01 \dots n) \mu_1^{v-1} \mu_{n-2j}.$$

\mathfrak{S} è invece un complesso ∞^{r_1-1} di S_{r-1} , dell' S_n , per $i = \omega$. In questo caso vi è un solo carattere (9), espresso dalla

$$(10) \quad \{0, 1, \dots, r-2, r\} = (01 \dots n) \mu_1^{v-\omega-1} \lambda_r,$$

nella quale — con notazione simbolica di chiaro significato — λ_r rappresenta la condizione, per una quadrica di S_n , di contenere un S_{r-1} (non assegnato) appartenente ad un dato fascio. Per $r = 1, 2$ si ha manifestamente

$$(11) \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \mu_{n-2} \mu_n;$$

e, in ogni caso, il secondo membro della (10) si esprime mediante caratteri del tipo (8), usufruendo delle (11) e della formula ricorrente

$$\lambda_r = \lambda_{r-1} \cdot \mu_{n-2} \mu_n^{r-1} - 2 \lambda_{r-2} \cdot \mu_n^{2r-1} - \mu_n^{\omega+r},$$

di non difficile dimostrazione.

14. Termineremo con un esempio, facendo vedere come si possa determinare l'ordine t di $\Pi^{(r)}$ per $r = 2$ seguendo il metodo suesposto, ciò che pure costituirà una verifica opportuna.

Per $r = 2$, $s = n - 1$ la (6) si riduce a

$$t = \kappa_{2,n} \kappa_{n-1,n} - \kappa_{2,n-2} \kappa_{n-1,n} - u_0 - u_1,$$

e, in base al n. 2, risulta:

$$\kappa_{2,n} = (n+2)_3, \quad \kappa_{n-1,n} = (2n-1)_n, \quad \kappa_{2,n-2} = n_3.$$

La formula (7), tenuto conto del numero precedente, ora fornisce

$$u_0 = \{1, 2\} \cdot \{n-2, n-1\}' + \{0, 3\} \cdot \{n-3, n\}', \\ u_1 = \{0, 2\} \cdot \{n-2, n\}';$$

avendo anche riguardo alla Memoria di SCHUBERT, citata nella Nota I, si ha inoltre

$$\begin{aligned} \{1, 2\} &= 2 \cdot (01 \dots n) \mu_1^{v-1} \mu_{n-2} = 2(n-2) \\ \{0, 3\} &= 2 \cdot (01 \dots n) \mu_1^{v-1} \mu_n = 2n \\ \{0, 2\} &= (01 \dots n) \mu_1^{v-2} \lambda_2 = (01 \dots n) \mu_1^{v-2} \mu_{n-2} \mu_n = n(n-2) \\ \{n-2, n-1\}' &= (n-2, n-1) \mu_1^{2n-2} = (2n-3)_{n-1} \\ \{n-3, n\}' &= (n-3, n) \mu_1^{2n-2} = (2n-3)_{n-2} + (2n-3)_{n-1} + (2n-3)_n \\ \{n-2, n\}' &= (n-2, n) \mu_1^{2n-1} = (2n-2)_{n-1} + (2n-2)_n, \end{aligned}$$

onde, in definitiva, si ottiene

$$u_0 = 4(n-1)(2n-2)_{n-1}, \quad u_1 = (n-2)(2n-1)(2n-2)_{n-1}$$

e perciò:

$$t = 2(2n-2)_{n-1}.$$

Questo risultato, in base alla fine del n. 11, concorda con quello del n. 3 concernente $\Pi^{(n-1)}$.

Per ogni curva ordinaria porremo

$$(6) \quad I_C = \int_C G[x(s), y(s), x'(s), y'(s), u_1(s), \dots, u_m(s)] ds.$$

Se K è una classe di curve ordinarie e se C è una curva di K , diciamo che un punto P di C è un punto di indifferenza rispetto al campo A e alla classe K , se è possibile determinare un numero positivo ρ tale che, indicato con (P, ρ) il cerchio di centro P e raggio ρ , ogni curva ordinaria ottenuta da C sostituendo un arco di essa appartenente a (P, ρ) con un arco avente gli stessi punti terminali e pure appartenente a (P, ρ) , sia ancora una curva della classe K .

Infine, notiamo che se a_α, b_α sono due quantità dipendenti da un indice rappresentato da una lettera greca, nel seguito porremo, per brevità

$$a_\alpha b_\alpha = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m.$$

2. DUE LEMMI. — Allo scopo di procedere più speditamente nella deduzione delle equazioni delle estremanti, premettiamo due semplici proposizioni.

Lemma I. — Se $[z_1(s), \dots, z_m(s)]$ è una soluzione di un sistema differenziale lineare

$$(7) \quad z'_r(s) = a_r(s) + b_{r\alpha}(s) z_\alpha(s), \quad (r = 1, \dots, m),$$

con le funzioni $z_r(s)$ assolutamente continue e le $a_r(s), b_{r\alpha}(s)$ quasi continue limitate nell'intervallo $(0, L)$, indicato con M un limite superiore per i moduli delle funzioni $a_r(s), b_{r\alpha}(s)$, si ha

$$(8) \quad \sum_{r=1}^m |z_r(s)| \leq \sum_{r=1}^m |z_r(\bar{s})| e^{mM|s-\bar{s}|} + (e^{mM|s-\bar{s}|} - 1),$$

essendo \bar{s} un punto qualunque dell'intervallo $(0, L)$.

Nelle ipotesi del lemma si ha

$$\sum_{r=1}^m |\dot{z}_r| \leq mM \sum_{r=1}^m |z_r| + mM$$

e quindi se le funzioni $a_r(s), b_{r\alpha}(s)$ sono continue l'asserto deriva da una disuguaglianza di Peano⁽¹⁾. Se le funzioni $a_r(s), b_{r\alpha}(s)$ sono soltanto quasi continue consideriamo delle successioni di funzioni continue $a_r^{(n)}(s), b_{r\alpha}^{(n)}(s)$, con $|a_r^{(n)}(s)| \leq M, |b_{r\alpha}^{(n)}(s)| \leq M$, e, in quasi tutto $(0, L)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_r^{(n)}(s) = a_r(s)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{r\alpha}^{(n)}(s) = b_{r\alpha}(s).$$

(1) Ved., per es., KAMKE, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, p. 151.

Indicata con $[\tilde{\gamma}_1^{(n)}(s), \dots, \tilde{\gamma}_m^{(n)}(s)]$ la soluzione del sistema

$$\tilde{\gamma}'_r = a_r^{(n)} + b_{r\alpha}^{(n)} \tilde{\gamma}_\alpha$$

con $\tilde{\gamma}_r^{(n)}(s) = \tilde{\gamma}_r(s)$, per questa vale la (8). Non resta allora che passare al limite per n tendente all'infinito per ottenere l'asserto.

Lemma II. — Se, nelle ipotesi del lemma precedente per le funzioni $b_{r\alpha}$,

$$\lambda_{11}(s, \sigma), \dots, \lambda_{lm}(s, \sigma), \quad (l = 1, \dots, m),$$

è la soluzione del sistema differenziale lineare

$$\lambda'_r(\sigma) = b_{r\alpha}(\sigma) \lambda_\alpha(\sigma)$$

determinata dalle condizioni

$$\lambda_{lj}(s, s) = \delta_{lj}(s),$$

la soluzione $[\tilde{\gamma}_1(s, \sigma), \dots, \tilde{\gamma}_m(s, \sigma)]$ determinata dalle condizioni

$$\tilde{\gamma}_r(s, s) = c_r$$

è data da

$$\tilde{\gamma}_r(s, \sigma) = c_\alpha \lambda_{\alpha r}(s, \sigma).$$

3. LA CONDIZIONE GENERALIZZATA DI EULERO PER LE CURVE ESTREMANTI. — Se

$$C_0 : x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad (0 \leq s \leq L_0),$$

è una curva minimante (o massimante) per l'integrale I_C in una classe K di curve ordinarie;

se la soluzione $[u_1(s), \dots, u_m(s)]$ del sistema (5) corrispondente a C_0 è tale che il punto $[u_1(s), \dots, u_m(s)]$ sia sempre interno al campo Δ ;

allora ogni arco α_0 di C_0 i cui punti, i punti terminali al più esclusi, sieno tutti interni al campo A e di indifferenza rispetto al campo A e alla classe K , soddisfa alle equazioni

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^s \left[\frac{\partial G}{\partial x} + \lambda_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial x} + \left(\frac{\partial G}{\partial u_\alpha} + \lambda_\beta \frac{\partial F_\beta}{\partial u_\alpha} + \lambda'_\alpha \right) \frac{\partial F_\alpha}{\partial x'} \right] ds - \\ & - \frac{d}{ds} \int_0^s \left(\frac{\partial G}{\partial x'} + \lambda_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial x'} \right) ds = c_1 (\text{cost}) \\ & \int_0^s \left[\frac{\partial G}{\partial y} + \lambda_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial y} + \left(\frac{\partial G}{\partial u_\alpha} + \lambda_\beta \frac{\partial F_\beta}{\partial u_\alpha} + \lambda'_\alpha \right) \frac{\partial F_\alpha}{\partial y'} \right] ds - \\ & - \frac{d}{ds} \int_0^s \left(\frac{\partial G}{\partial y'} + \lambda_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial y'} \right) ds = c_2 (\text{cost}), \end{aligned} \right.$$

(1) Il simbolo δ_{ij} indica il valore 1 per $i=j$ e il valore 0 per $i \neq j$.

con

$$(10) \quad \lambda_r(s) = \int_s^{L_0} G_{u_\alpha} [x_0(\sigma), y_0(\sigma), \dots, u_m(\sigma)] \lambda_{r\alpha}(s, \sigma) d\sigma,$$

ed essendo

$$[\lambda_{r1}(s, \sigma), \dots, \lambda_{rm}(s, \sigma)]$$

la soluzione del sistema differenziale lineare

$$\lambda'_\alpha(\sigma) = \frac{\partial F_r [x_0(\sigma), y_0(\sigma), \dots, u_m(\sigma)]}{\partial u_\alpha} \lambda_\alpha(\sigma)$$

determinata dalle condizioni

$$\lambda_{rj}(s, s) = \delta_{rj}.$$

Ragionando come nelle mie Memorie citate, possiamo supporre che l'arco α_0 sia tutto, i punti terminali inclusi, di punti interni al campo A e di indifferenza rispetto al campo A e alla classe K. Indichiamo poi con (s', s'') l'intervallo parziale di $(0, L_0)$ che corrisponde all'arco α_0 e dividiamolo in n parti uguali mediante i punti

$$s_0 = s', s_1, \dots, s_n = s''.$$

Fissato un intero positivo $i < n$, definiamo sull'intervallo $(0, L_0)$ una funzione $\varphi'_i(s)$, ponendo

$$\begin{aligned} \varphi'_i(s) &= 1 & \text{per } s_{i-1} \leq s \leq s_i \\ \varphi'_i(s) &= -1 & \text{per } s_i < s \leq s_{i+1} \\ \varphi'_i(s) &= 0 & \text{per tutti gli altri valori di } s, \end{aligned}$$

e sia

$$\varphi_i(s) = \int_0^s \varphi'_i(s) ds, \quad (0 \leq s \leq L_0).$$

Allora si possono determinare due numeri positivi \bar{n} e δ , tali che, se è $n > \bar{n}$ e $|\varepsilon| \leq \delta$, la curva

$$C_\varepsilon : x = x_0(s) + \varepsilon \varphi_i(s), \quad y = y_0(s), \quad (0 \leq s \leq L_0),$$

sia una curva ordinaria della classe K.

Indicata con $[u_1(s, \varepsilon), \dots, u_m(s, \varepsilon)]$ la soluzione del sistema (5) ad essa corrispondente, e posto

$$(11) \quad I(\varepsilon) = \int_{C_\varepsilon} G(x_0 + \varepsilon \varphi_i, y_0, x'_0 + \varepsilon \varphi'_i, y'_0, u_1(s, \varepsilon), \dots, u_m(s, \varepsilon)) ds$$

si deve avere

$$(12) \quad \left(\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = 0$$

essendo C_0 una curva estremante per I_C nella classe K .

È ora

$$(13) \quad \frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{s_i-1}^{s_i+1} G(x_0 + \varepsilon\varphi_i, y_0, x'_0 + \varepsilon\varphi'_i, y'_0, u_1(s, \varepsilon), \dots, u_m(s, \varepsilon)) ds + \\ + \frac{d}{d\varepsilon} \int_{s_i+1}^{L_0} G(x_0, y_0, x'_0, y'_0, u_1(s, \varepsilon), \dots, u_m(s, \varepsilon)) ds,$$

e

$$(14) \quad \left[\frac{d}{d\varepsilon} \int_{s_i-1}^{s_i+1} G(x_0 + \varepsilon\varphi_i, y_0, x'_0 + \varepsilon\varphi'_i, y'_0, u_1(s, \varepsilon), \dots, u_m(s, \varepsilon)) ds \right]_{\varepsilon=0} = \\ = \int_{s_i-1}^{s_i+1} \left\{ G_{x_i} \varphi_i + G_{x'_i} \varphi'_i + G_{u_\alpha} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \right\} ds,$$

$$(15) \quad \left[\frac{d}{d\varepsilon} \int_{s_i+1}^{L_0} G(x_0, y_0, x'_0, y'_0, u_1(s, \varepsilon), \dots, u_m(s, \varepsilon)) ds \right]_{\varepsilon=0} = \\ = \int_{s_i+1}^{L_0} G_{u_\alpha} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} ds.$$

Nei secondi membri di queste due ultime equazioni le derivate parziali di G si intendono calcolate sopra la curva C_0 , e nella prima di esse le derivate $\left(\frac{\partial u_r}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}$ sono le soluzioni del sistema

$$(16) \quad \left(\frac{\partial u_r}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \int_{s_i-1}^s \left[\frac{\partial F_r}{\partial x} \varphi_i + \frac{\partial F_r}{\partial x'} \varphi'_i + \frac{\partial F_r}{\partial u_\alpha} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \right] ds, \\ (s_i-1 \leq s \leq s_i+1),$$

mentre nella seconda le derivate $\left(\frac{\partial u_r}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}$ sono le soluzioni del sistema

$$(17) \quad \left(\frac{\partial u_r}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \left(\frac{\partial u_r(s_i+1, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} + \int_{s_i+1}^s \frac{\partial F_r}{\partial u_\alpha} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} ds, \\ (s_i+1 \leq s \leq L_0).$$

A questo punto applichiamo i due lemmi del numero precedente.

Dal primo lemma segue che esiste un numero Λ indipendente da n, i, s , tale che per le funzioni $\left(\frac{\partial u_r}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$ definite dal sistema (16) si abbia sempre

$$\sum_{r=1}^m \left| \left(\frac{\partial u_r}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \right| < \Lambda,$$

e quindi, per le stesse (16), esiste anche un numero Λ^* indipendente da n, i, s , tale che

$$(18) \quad \sum_{r=1}^m \left| \left(\frac{\partial u_r}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \right| < \frac{\Lambda^*}{n},$$

$$(19) \quad \left(\frac{\partial u_r}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \int_{s_i-1}^s \left(\frac{\partial F_r}{\partial x} \varphi_i + \frac{\partial F_r}{\partial x'} \varphi'_i \right) ds + \frac{\vartheta_i \Lambda^*}{n^2},$$

$$(20) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} &= \int_{s_i-1}^s \left\{ \frac{\partial F_r}{\partial x} \varphi_i + \frac{\partial F_r}{\partial x'} \varphi'_i + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial F_r}{\partial u_\alpha} \int_{s_i-1}^s \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x} \varphi_i + \frac{\partial F_\alpha}{\partial x'} \varphi'_i \right) ds \right\} ds + \frac{\vartheta_i \Lambda^*}{n^3}, \end{aligned}$$

con $|\vartheta_i| < 1, |\vartheta'_i| < 1$.

Dal secondo lemma segue che, detta $[\lambda_{i1}(s, \sigma), \dots, \lambda_{im}(s, \sigma)]$ la soluzione del sistema differenziale lineare

$$\chi'_r(\sigma) = \frac{\partial F_r}{\partial u_\alpha} \chi_\alpha(\sigma)$$

determinata dalle condizioni

$$\lambda_{ii}(s, s) = \delta_{ii},$$

le funzioni $\left(\frac{\partial u_r}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$ definite dal sistema (17) sono date dalle formule

$$(21) \quad \left(\frac{\partial u_r(\sigma, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \left(\frac{\partial u_\alpha(s_i+1, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \lambda_{\alpha r}(s_i+1, \sigma).$$

Dalla (14) e dalle (19) segue

$$(22) \quad \begin{aligned} &\left[\frac{d}{d\varepsilon} \int_{s_i-1}^{s_i+1} G(x_0 + \varepsilon \varphi_i, y_0 + \varepsilon \varphi'_i, x'_0 + \varepsilon \varphi'_i, y'_0, u_1(s, \varepsilon), \dots, u_m(s, \varepsilon)) ds \right]_{\varepsilon=0} = \\ &= \int_{s_i-1}^{s_i+1} \left\{ G_x \varphi_i + G_{x'} \varphi'_i + G_{u_\alpha} \int_{s_i-1}^s \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x} \varphi_i + \frac{\partial F_\alpha}{\partial x'} \varphi'_i \right) ds \right\} ds + \frac{\theta_i H_i}{n^3} \end{aligned}$$

essendo H_1 una costante indipendente da n, i, s e $|\theta_i| < 1$. Dalle (15), e (21) e dalle (20) in cui si faccia $s = s_{i+1}$ segue

$$(23) \quad \left[\frac{d}{d\varepsilon} \int_{s_{i+1}}^{L_0} G(x_0, y_0, x'_0, y'_0, u_1(s, \varepsilon), \dots, u_m(s, \varepsilon)) ds \right]_{\varepsilon=0} =$$

$$= \left(\frac{\partial u_\alpha(s_{i+1}, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \int_{s_{i+1}}^{L_0} G_{u\beta} \lambda_{\alpha\beta}(s_{i+1}, \sigma) d\sigma =$$

$$= \int_{s_{i+1}}^{L_0} G_{u\beta} \lambda_{\alpha\beta}(s_{i+1}, \sigma) d\sigma \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \left\{ \frac{\partial F_\alpha}{\partial x} \varphi_i + \frac{\partial F_\alpha}{\partial x'} \varphi'_i + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial F_\alpha}{\partial u_\gamma} \int_{s_{i-1}}^s \left(\frac{\partial F_\gamma}{\partial x'} \varphi_i + \frac{\partial F_\gamma}{\partial x''} \varphi'_i \right) ds \right\} ds + \frac{\theta_i'' H_2}{n^3},$$

essendo H_2 una costante indipendente da n, i, s e $|\theta_i''| < 1$.

Posto

$$(24) \quad \lambda_\alpha(s) = \int_s^{L_0} G_{u\beta}(x_0(\sigma), \dots, u_m(\sigma)) \lambda_{\alpha\beta}(s, \sigma) d\sigma,$$

e tenuto conto delle (12), (13), (14), (15), (22), (23), si ottiene

$$(25) \quad \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \left\{ G_x \varphi_i + G_{x'} \varphi'_i + G_{u_\alpha} \int_{s_{i-1}}^s \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x} \varphi_i + \frac{\partial F_\alpha}{\partial x'} \varphi'_i \right) ds \right\} ds +$$

$$+ \lambda_\alpha(s_{i+1}) \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \left\{ \frac{\partial F_\alpha}{\partial x} \varphi_i + \frac{\partial F_\alpha}{\partial x'} \varphi'_i + \frac{\partial F_\alpha}{\partial u_\beta} \int_{s_{i-1}}^s \left(\frac{\partial F_\beta}{\partial x} \varphi_i + \frac{\partial F_\beta}{\partial x'} \varphi'_i \right) ds \right\} ds +$$

$$+ \frac{\theta_i H}{n^3} = 0,$$

con H indipendente da n, i, s , e $|\theta_i| < 1$.

La (25) ora stabilita è completamente analoga all'equazione (15) della mia Memoria sulle *Proprietà delle estremanti nei problemi di Lagrange*, e non resta che da ripetere i ragionamenti ivi fatti per ottenere il teorema enunciato al principio di questo numero.

4. OSSERVAZIONE. — Dalle equazioni (9) si possono dedurre dei criteri affinchè l'arco α_0 sia di classe 1, e quindi le equazioni stesse possano scriversi in forma differenziale. Così pure si può estendere al caso qui considerato il criterio di Hilbert e dare delle condizioni sufficienti affinchè l'arco α_0 sia di classe 2. Ma tutto ciò non presenta notevoli difficoltà e anche qui valgono considerazioni analoghe a quelle delle mie Memorie citate.

Meccanica. — *Deduzione unitaria delle equazioni dinamiche del Maggi e dell'Appell.* Nota di E. GUGINO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ I. — OGGETTO DELLA RICERCA.

Consideriamo dapprima un sistema olonomo S di N punti P_i ($i = 1, 2, \dots, N$) di masse m_i ad n gradi di libertà, a vincoli privi di attrito, riferito ad un' n -pla di coordinate Lagrangiane q_h ($h = 1, 2, \dots, n$); le posizioni dei singoli punti sono quindi rappresentabili con equazioni geometriche del tipo

$$(1) \quad P_i = P_i(q_1, q_2, \dots, q_n/t) \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Il moto del sistema, sotto la sollecitazione attiva F_i pel punto generico P_i , è notoriamente definito dalle equazioni del Lagrange della seconda forma:

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

con manifesto significato dei simboli.

Denotiamo con $B_{qh}(\rho, h = 1, 2, \dots, n)$ un sistema di n^2 funzioni arbitrarie delle q e di t , soggette alla sola limitazione che sia diverso da zero il determinante $B = \|B_{qh}\|$. Il moto del sistema S può manifestamente essere definito dalle:

$$(1) \quad \sum_{h=1}^n B_{qh} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} \right) = \sum_{h=1}^n B_{qh} Q_h \quad (\rho = 1, 2, \dots, n),$$

equivalenti alle (2). Introduciamo un opportuno sistema di n nuove funzioni ω_λ ($\lambda = 1, 2, \dots, n$) lineari nelle \dot{q} , i cui coefficienti, che indicheremo con $\beta_{\lambda q}$, siano i reciproci degli elementi $B_{\lambda q}$ nel determinante B; poniamo cioè:

$$(3) \quad \omega_\lambda = \sum_{q=1}^n \beta_{\lambda q} \dot{q}_q + \beta_{\lambda, n+1} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n)$$

con $\beta_{\lambda, n+1}$ ($\lambda = 1, 2, \dots, n$) funzioni pure arbitrarie delle q e di t ; alle ω_λ così introdotte può darsi, ovviamente, la denominazione di caratteristiche

(1) Nella seduta del 1° marzo 1936.

cinetiche del sistema olonomo che si considera, a partire dalla generica configurazione all'istante t . Risolvendo le (3) rispetto alle \dot{q} si ottiene:

$$(3') \quad \dot{q}_h = \sum_q^n B_{qh} \omega_q + B_{n+1,h} \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{con } B_{n+1,h} = - \sum_{\lambda}^n \beta_{\lambda, n+1} B_{\lambda h}.$$

Ove si pensi di porre nelle (I) in luogo delle \dot{q} e delle \ddot{q} rispettivamente i secondi membri delle (3') e le loro derivate rapporto al tempo, si potrà sostituire, con vantaggio, al sistema differenziale normale del secondo ordine, nelle n funzioni incognite q , definito dalle (2), il sistema equivalente del primo ordine, nelle $2n$ funzioni incognite q ed ω , o, come suol dirsi, di rango $2n$, definito dalle (I) e dalle (3').

Ciò premesso, denotiamo con J l'energia di accelerazione del sistema:

$$(4) \quad J = \frac{1}{2} \sum_i^N m_i a_i^2$$

calcolata, a partire dalle (1), con duplice derivazione rapporto al tempo; se si esprime la (4) pel tramite delle (3') e delle loro derivate, in termini delle q , delle ω e delle $\dot{\omega}$, faremo vedere, che le (I), per qualsivoglia scelta delle funzioni B_{qh} , possono mettersi sotto la forma particolarmente semplice:

$$(I') \quad \frac{\partial J}{\partial \dot{\omega}_q} = \sum_h^n B_{qh} Q_h \quad (p = 1, 2, \dots, n).$$

Le (I), sebbene di struttura formalmente più complessa delle (2), offrono però il vantaggio di una maggiore agilità specialmente di fronte all'introduzione di nuovi vincoli. Esse possono allora essere scisse in due gruppi, uno dei quali è sempre atto a definire il moto quando si impongano al sistema materiale k ($k < n$) ulteriori vincoli, in generale anolonomi.

Mostrerò qui come questo criterio consenta di ritrovare nel modo più spedito, con opportuna scelta delle funzioni B_{qh} , le note equazioni del Maggi e dell'Appell per i sistemi ad n coordinate lagrangiane e ad $n - k$ caratteristiche cinetiche. In una Nota successiva farò vedere come lo stesso criterio possa anche applicarsi alla deduzione delle equazioni, cui G. Hamel ha dato il nome di equazioni di Eulero-Lagrange per i sistemi anolonomi⁽¹⁾; tali equazioni si identificano ordinatamente, come mostreremo, con quelle del Maggi, presentando tuttavia una loro prerogativa essenziale. Ed è che in esse intervengono in modo esplicito unicamente la forza viva T^* , espressa in

(1) G. HAMEL, *Über nichtholonome Systeme*. «Mathematische Annalen», vol. 92, fasc. 1-2, 1924.

termini delle coordinate lagrangiane e delle caratteristiche indipendenti, ed i coefficienti γ delle equazioni della transitività ⁽¹⁾.

§ 2. — DEDUZIONE DELLE EQUAZIONI (I) DALL'EQUAZIONE SIMBOLICA DELLA DINAMICA.

Supponiamo dapprima S olonomo; a norma delle (3), sostituiamo le \dot{q}_e ($e = 1, 2, \dots, n$) con le caratteristiche cinetiche ω_λ . Un esempio particolarmente notevole di un sistema olonomo il cui atto di moto all'istante generico t suole essere caratterizzato con l'introduzione di opportune nuove variabili definite da relazioni del tipo (3), è offerto da un corpo rigido mobile intorno ad un punto fisso; in tale caso, alle derivate temporali degli angoli di Eulero (coordinate lagrangiane del sistema) si sogliono, come è noto, sostituire le componenti, secondo gli assi mobili, del vettore velocità angolare dell'atto di moto rigido.

Ponendo $d\chi_\lambda = \omega_\lambda dt$ le (3) possono scriversi:

$$(5) \quad d\chi_\lambda = \sum_e^n \beta_{\lambda e} dq_e + \beta_{\lambda, n+1} dt.$$

Analogamente le (3') forniscono:

$$(5') \quad dq_h = \sum_e^n B_{eh} d\chi_e + B_{n+1, h} dt.$$

Essendo le β funzioni arbitrarie delle q e di t , le (5) non sono in generale illimitatamente integrabili, sicchè le χ_λ non sono in generale esprimibili in termini finiti per mezzo delle q e di t . Tali χ_λ non costituiscono, nel loro insieme, un sistema di vere e proprie coordinate; esse sogliono infatti chiamarsi quasi-coordinate ⁽²⁾.

Uno spostamento virtuale δP_i del sistema, a partire da una generica configurazione all'istante t , si ottiene, come è ben noto, differenziando le (1), ponendo $dt = 0$ ed attribuendo valori arbitrari alle variazioni δq delle coordinate lagrangiane. Uno spostamento virtuale, in quasi-coordinate, è allora definito dalle:

$$(6) \quad \delta\chi_\lambda = \sum_e^n \beta_{\lambda e} \delta q_e.$$

(1) Nel recente interessante articolo di G. PRANGE, *Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik*. «Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften», vol. IV, fasc. IV (1935), p. 534, si muove alle equazioni del Maggi l'appunto di avere forma complicata. In verità la forma è quella che proviene dalle premesse nel modo più diretto e spontaneo, pur dovendosi riconoscere, che in linea concettuale, le equazioni dell'Hamel presentano il vantaggio testè rilevato.

(2) Cfr. G. PRANGE, loc. cit., p. 521.

Ne segue che

$$(6') \quad \delta q_b = \sum_i^n B_{qb} \delta \chi_q$$

ove le $\delta \chi_q$ sono quantità infinitesime arbitrarie.

Ciò premesso, si parta dall'equazione simbolica della dinamica, che, in quanto la si consideri valida per tutti gli spostamenti virtuali del sistema, ne caratterizza il moto:

$$(7) \quad \sum_i^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \times \delta \mathbf{P}_i = 0.$$

Essendo inoltre: $\delta \mathbf{P}_i = \sum_b^n \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial \dot{q}_b} \delta q_b$, in base alle formule di definizione delle componenti della sollecitazione attiva secondo le coordinate lagrangiane:

$$(8) \quad Q_b = \sum_i^N \mathbf{F}_i \times \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial \dot{q}_b}$$

ove si tenga conto delle note identità:

$$(8') \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_b} - \frac{\partial T}{\partial q_b} = \sum_i^N m_i \mathbf{a}_i \times \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial \dot{q}_b}$$

valide anche quando le coordinate q non siano indipendenti, ma comunque soggette a vincoli di mobilità⁽¹⁾, l'equazione simbolica della dinamica (7) può mettersi sotto la forma:

$$(7') \quad \sum_b^n \left\{ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_b} - \frac{\partial T}{\partial q_b} \right) - Q_b \right\} \delta q_b = 0.$$

A norma delle (6') può anche scriversi:

$$(7'') \quad \sum_i^n \sum_b^n \left\{ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_b} - \frac{\partial T}{\partial q_b} \right) - Q_b \right\} B_{qb} \delta \chi_q = 0.$$

Tale relazione deve essere soddisfatta comunque si scelgano le $\delta \chi_q$; si riconosce in tal modo, che insieme con la (7'') debbono sussistere le (I) e viceversa.

§. 3. — DEDUZIONE DELLE EQUAZIONI (I').

Derivando le (I) rispetto al tempo, si deducono per le velocità \mathbf{v}_i dei singoli punti \mathbf{P}_i le espressioni:

$$\mathbf{v}_i = \sum_b^n \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial \dot{q}_b} \dot{q}_b + \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial t} \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, vol. II, par. I, p. 360.

L'ulteriore derivazione rapporto a t , ove si omettano i termini indipendenti dalle \ddot{q} , fornisce:

$$a_i = \sum_1^n \frac{\partial P_i}{\partial q_b} \ddot{q}_b + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

di guisa che:

$$(9) \quad \frac{\partial a_i}{\partial \ddot{q}_b} = \frac{\partial P_i}{\partial q_b}.$$

Derivando inoltre le (3'), ove si omettano altresì i termini indipendenti dalle $\dot{\omega}$, si ottiene:

$$\ddot{q}_b = \sum_1^n B_{qb} \dot{\omega}_q + \dots$$

da cui:

$$(9') \quad \frac{\partial \ddot{q}_b}{\partial \dot{\omega}_q} = B_{qb}.$$

In virtù delle (9) e (9') risulta:

$$(10) \quad \frac{\partial a_i}{\partial \dot{\omega}_q} = \sum_1^n B_{qb} \frac{\partial P_i}{\partial q_b}.$$

D'altra parte le (I), a norma delle (8'), possono scriversi:

$$\sum_1^N m_i a_i \times \sum_1^n B_{qb} \frac{\partial P_i}{\partial q_b} = \sum_1^n B_{qb} Q_b \quad (\rho = 1, 2, \dots, n).$$

Tenendo conto delle (10) e della (4), la precedente relazione può mettersi sotto la forma definitiva:

$$(I') \quad \frac{\partial J}{\partial \dot{\omega}_q} = \sum_1^n B_{qb} Q_b \quad (\rho = 1, 2, \dots, n).$$

§ 4. DEDUZIONE DELLE EQUAZIONI DEL MAGGI E DELL'APPEL PEI SISTEMI ANOLONOMI.

Se il sistema materiale S che si considera è ulteriormente soggetto a vincoli anOLONOMI, con riguardo al caso che maggiormente interessa le applicazioni meccaniche, tali vincoli impongono alle coordinate lagrangiane (scelte in modo da tenere conto di tutti i vincoli olonomi esistenti) un certo numero k di equazioni pfaffiane non illimitatamente integrabili, linearmente indipendenti, del tipo:

$$(II) \quad \sum_1^n b_{rq} dq_q + b_{r, n+1} dt = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, k)$$

ovvero, sotto forma finita:

$$(11') \quad \sum_{i=1}^n b_{ri} \dot{q}_i + b_{r,n+1} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, k)$$

ove le b sono, in generale, funzioni delle q e di t . Abbiamo già visto che, nel caso in cui le coordinate q siano indipendenti (sistema olonomo riferito a coordinate lagrangiane essenziali) le relazioni (3), che definiscono le caratteristiche cinetiche ω , si possono scegliere coi coefficienti β , funzioni delle q e di t , del tutto ad arbitrio; appare allora opportuno, nel caso in cui intervengano vincoli anolonomi del tipo (11'), di identificare, in particolare, i secondi membri delle ultime k relazioni (3) coi primi membri delle (11'). Si definiscano, in conformità, le n caratteristiche cinetiche ω_λ per mezzo delle:

$$(12) \quad \begin{cases} \omega_l = \sum_{i=1}^n \beta_{li} \dot{q}_i + \beta_{l,n+1} & (l = 1, 2, \dots, n-k) \\ \omega_{n-k+r} = \sum_{i=1}^n b_{ri} \dot{q}_i + b_{r,n+1} & (r = 1, 2, \dots, k) \end{cases}$$

ove i coefficienti β , che intervengono nella definizione delle prime $n-k$ variabili ω_l , sono ancora funzioni arbitrarie delle q e di t . Ponendo:

$$(12') \quad \omega_{n-k+r} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, k)$$

e scegliendo le ω_l ($l = 1, 2, \dots, n-k$) del tutto ad arbitrio (caratteristiche cinetiche indipendenti) a partire dalla generica configurazione all'istante t , si ottiene un atto di moto del sistema S compatibile coi vincoli (11'). Viceversa, ad ogni atto di moto compatibile coi vincoli anolonomi, a partire dalla medesima configurazione all'istante t , corrisponde un particolare sistema di valori delle ω_l ($l = 1, 2, \dots, n-k$), mentre le ω_{n-k+r} risultano identicamente nulle.

Uno spostamento virtuale di S , sempre a partire dalla generica configurazione all'istante t , si ottiene, come è noto, assegnando le δ_j non più ad arbitrio, ma in modo tale da soddisfare alle k equazioni (11) in cui si ponga $dt = 0$; le relazioni:

$$(11'') \quad \sum_{i=1}^n b_{ri} \delta q_i = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, k)$$

definiscono quindi gli spostamenti virtuali del sistema in coordinate lagrangiane.

Ponendo inoltre $d\chi_\lambda = \omega_\lambda dt$ le (12) possono scriversi:

$$(13) \quad \begin{cases} d\chi_l = \sum_{i=1}^n \beta_{li} dq_i + \beta_{l,n+1} dt & (l = 1, 2, \dots, n-k) \\ d\chi_{n-k+r} = \sum_{i=1}^n b_{ri} dq_i + b_{r,n+1} dt & (r = 1, 2, \dots, k) \end{cases}$$

ed uno spostamento virtuale del sistema, a partire dalla generica configurazione all'istante t , definito in quasi-coordinate, si otterrà dalle (13) ponendo $dt = 0$ e scegliendo le δq_e in maniera da verificare le (11''); risulta:

$$(14) \quad \begin{cases} \delta \chi_l = \sum_e^n \beta_{le} \delta q_e & (l = 1, 2, \dots, n-k) \\ \delta \chi_{n-k+r} = \sum_e^n b_{re} \delta q_e & (r = 1, 2, \dots, k) \end{cases}$$

e per conseguenza:

$$\delta \chi_{n-k+r} = 0.$$

Viceversa, a partire dalla generica configurazione all'istante t , scegliendo ad arbitrio le $\delta \chi_l$, purchè siano $\delta \chi_{n-k+r} = 0$, rimane definito, in base alle (14), un sistema di valori delle δq_e che caratterizza uno spostamento virtuale.

Risolviendo le (14) rispetto alle δq_b ; tenendo conto dell'annullarsi delle $\delta \chi_{n-k+r}$ può scriversi:

$$(14') \quad \delta q_b = \sum_l^{n-k} B_{lh}^* \delta \chi_l \quad (b = 1, 2, \dots, n)$$

ove le B_{lh}^* sono i reciproci degli elementi (funzioni arbitrarie β_{lh}) delle prime $n-k$ righe del determinante d'ordine n formato coi coefficienti delle δq nel sistema di equazioni (14). Dalle (12), inoltre, tenendo conto delle (12') analogamente si ottiene:

$$(15) \quad \dot{q}_b = \sum_l^{n-k} B_{lh}^* \omega_l + B_{n+b}^* \quad (b = 1, 2, \dots, n).$$

La relazione simbolica (7'), in virtù delle (14'), diviene:

$$\sum_l^{n-k} \sum_b^n \left\{ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_b} - \frac{\partial T}{\partial q_b} \right) - Q_b \right\} B_{lh}^* \delta \chi_l = 0$$

e per l'arbitrarietà delle $\delta \chi_l$, la precedente equivale al sistema di $n-k$ equazioni:

$$(II) \quad \sum_b^n B_{lh}^* \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_b} - \frac{\partial T}{\partial q_b} \right) = \sum_b^n B_{lh}^* Q_b \quad (l = 1, 2, \dots, n-k)$$

che costituiscono le note equazioni del Maggi pei sistemi anolonomi⁽¹⁾.

Si conclude quindi che per tali sistemi, se si pongono in particolare le (12), che rientrano nel quadro delle (3), e, tenendo conto delle (12'),

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, loc. cit., pp. 399-401.

si deducono le (15), le prime $n - k$ equazioni (I) si riducono alle note equazioni del Maggi, che unitamente alle (15) stesse forniscono, dal punto di vista analitico, la completa impostazione differenziale del problema del moto pel sistema S. *Il problema dinamico per i sistemi anolonomi può essere così trattato come caso particolare dell'analogo problema per i sistemi olonomi.*

Se si esprime, pel tramite della (15) e delle loro derivate rapporto al tempo, l'energia di accelerazione J del sistema, definita dalla (4), in termini delle q_ρ ($\rho = 1, 2, \dots, n$) delle ω_l e delle $\dot{\omega}_l$ ($l = 1, 2, \dots, n - k$), risulta J funzione di 2° grado delle prime $n - k$ derivate temporali $\dot{\omega}_l$; le (I'), valide in ogni caso, forniscono, in conformità, le $n - k$ equazioni:

$$\frac{\partial J}{\partial \dot{\omega}_l} = \sum_b^n B_{lb} Q_b \quad (l = 1, 2, \dots, n - k)$$

che si identificano con le equazioni dell'Appell pei sistemi anolonomi ⁽¹⁾.

Meccanica. — *Sulle equazioni dinamiche di Eulero-Lagrange secondo G. Hamel.* Nota di E. GUGINO, presentata ⁽²⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

I. — RICHIAMI ED OGGETTO DELLA RICERCA.

In una recente Nota apparsa su questi « Rendiconti » ⁽³⁾ abbiamo messo in rilievo il carattere generale delle equazioni del moto di un sistema olonomo, ad n gradi di libertà, sotto la forma:

$$(1) \quad \sum_b^n B_{qb} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_b} - \frac{\partial T}{\partial q_b} \right) = \sum_b^n B_{qb} Q_b \quad (q = 1, 2, \dots, n)$$

essendo B_{qb} funzioni arbitrarie delle variabili q (coordinate lagrangiane essenziali del sistema) e del tempo, soggette solo alla limitazione che il determinante $B = \| B_{qb} \|$ sia diverso da zero, e con manifesto significato dei simboli restanti.

Ove si ponga:

$$(2) \quad \omega_q = \sum_\lambda^n \beta_{q\lambda} \dot{q}_\lambda + \beta_{q, n+1} \quad (q = 1, 2, \dots, n)$$

(1) Cfr. P. APPELL, *Traité de Mécanique Rationnelle*, to. II, p. 384; oppure: *Memorial des Sciences Mathématiques*, fasc. I, 1935.

(2) Nella seduta del 1° marzo 1936.

(3) E. GUGINO, *Deduzione unitaria delle equazioni dinamiche del Maggi e dell'Appell.*

con $\beta_{0\lambda}$ reciproco dell'elemento $B_{0\lambda}$ nel determinante B , con $\beta_{0,n+1}$ funzioni arbitrarie delle q e di t , e si pensi inoltre di sostituire nelle (1) in luogo delle \dot{q} e \ddot{q} rispettivamente le:

$$(2') \quad \dot{q}_h = \sum_{\lambda} B_{\lambda h} \omega_{\lambda} + B_{n+1, h} \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

ottenute per risoluzione delle (2), e le loro derivate rapporto al tempo, le equazioni (1) e (2'), globalmente considerate, costituiscono un sistema differenziale del primo ordine di rango $2n$, nelle $2n$ funzioni incognite q ed ω . Nel caso in cui intervengano k ($k < n$) ulteriori vincoli anolonomi o di pura mobilità, le prime $n - k$ equazioni (1), come si è visto già, possono agevolmente essere ricondotte alle equazioni del Maggi e dell'Appell pei sistemi anolonomi.

Proposito nostro ora è quello di mostrare che le equazioni (1) pei sistemi olonomi, unitamente alle (2), si identificano ordinatamente con le equazioni più generali cui G. Hamel⁽¹⁾ ha dato il nome di « equazioni di Eulero-Lagrange della Meccanica ». Il vantaggio che tali equazioni presentano, come si è rilevato, consiste nella circostanza che in esse intervengono in modo esplicito unicamente la forza viva T^* (espressa in funzione delle coordinate Lagrangiane e delle caratteristiche cinetiche ω) ed i coefficienti γ delle equazioni della transitività. Ne segue, in particolare, che nel caso in cui il sistema materiale sia ulteriormente soggetto a vincoli di pura mobilità, le equazioni del Maggi ordinatamente si identificano con le equazioni di Eulero-Lagrange pei sistemi anolonomi⁽²⁾.

2. - EQUAZIONI DELLA TRANSITIVITÀ.

Consideriamo un generico moto naturale M di un sistema S olonomo o, più generalmente, anolonomo; tale moto sia definito dalle equazioni orarie:

$$(3) \quad q_h = q_h(t) \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Sia M^* un moto variato sincrono espresso dalle:

$$(3') \quad q_h^* = q_h(t) + \delta q_h \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

tale, cioè, che ad ogni istante, le posizioni dei singoli punti del sistema provengano dalle posizioni relative al moto M , nel medesimo istante, pel tramite di un generico spostamento virtuale caratterizzato, a partire dalla generica configurazione del sistema all'istante considerato, dalle varia-

(1) G. HAMEL, *Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik*. « Zeitschr. Math. Phys. », 50, p. 1, p. 15.

(2) G. HAMEL, *Ueber nichtholonome Systeme*. « Mathematische Annalen », vol. 92, fasc. 1-2, 1924.

zioni δq_h , considerate come funzioni regolari infinitesime di t . Tali variazioni possono quindi scegliersi ad arbitrio se il sistema è olonomo, debbono invece essere scelte compatibilmente coi vincoli anolonomi, se il sistema è ulteriormente soggetto a vincoli di pura mobilità.

In generale, però, in base a considerazioni dirette sulle variazioni delle componenti delle velocità lagrangiane del sistema nel passaggio dal moto M al moto M^* , oppure, formalmente, in base alla definizione stessa di spostamento virtuale, l'operazione δ e la derivazione rapporto al tempo sono operazioni tra loro permutabili quando vengano, in particolare, applicati alle coordinate lagrangiane q ; hanno pertanto luogo le relazioni:

$$(4) \quad \delta \dot{q}_h = \frac{d \delta q_h}{dt} \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

che possono mettersi sotto la forma:

$$(4') \quad \delta dq_h = d \delta q_h \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Ciò premesso, riferiamoci dapprima ad un sistema olonomo S ; ponendo: $d\chi_\rho = \omega_\rho dt$, le (2) e (2') possono scriversi:

$$(5) \quad d\chi_\rho = \sum_{\lambda}^n \beta_{\rho\lambda} dq_\lambda + \beta_{\rho, n+1} dt \quad (\rho = 1, 2, \dots, n)$$

$$(5') \quad dq_h = \sum_{\lambda}^n B_{h\lambda} d\chi_\lambda + B_{n+1, h} dt \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

La permutabilità degli operatori d e δ , valida nel caso in cui tali operatori si applichino successivamente alle coordinate lagrangiane q , non è più in generale valida allorchè essi vengano applicati alle χ_ρ , che non costituiscono vere coordinate ma quasi-coordinate. Essendo, infatti, come abbiamo messo in luce nella precedente Nota:

$$(6) \quad \delta \chi_\rho = \sum_{\lambda}^n \beta_{\rho\lambda} \delta q_\lambda \quad (\rho = 1, 2, \dots, n)$$

si ha in conformità:

$$d \delta \chi_\rho = \sum_{\lambda}^n \left(\sum_{\sigma}^n \frac{\partial \beta_{\rho\lambda}}{\partial q_\sigma} dq_\sigma + \frac{\partial \beta_{\rho\lambda}}{\partial t} dt \right) \delta q_\lambda + \sum_{\lambda}^n \beta_{\rho\lambda} d \delta q_\lambda \quad (\rho = 1, 2, \dots, n).$$

Analogamente, dalle (5) si deduce:

$$\delta d\chi_\rho = \sum_{\lambda}^n \sum_{\sigma}^n \frac{\partial \beta_{\rho\lambda}}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma dq_\lambda + \sum_{\lambda}^n \frac{\partial \beta_{\rho, n+1}}{\partial q_\lambda} \delta q_\lambda dt + \sum_{\lambda}^n \beta_{\rho\lambda} \delta dq_\lambda \quad (\rho = 1, 2, \dots, n).$$

In base alle (4') si ottiene:

$$d\delta\chi_\rho - \delta d\chi_\rho = \sum_{\lambda}^n \left(\frac{\partial\beta_{\rho\lambda}}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial\beta_{\rho\sigma}}{\partial q_\lambda} \right) dq_\sigma \delta q_\lambda + dt \sum_{\lambda}^n \left(\frac{\partial\beta_{\rho\lambda}}{\partial t} - \frac{\partial\beta_{\rho, n+1}}{\partial q_\lambda} \right) \delta q_\lambda$$

$$(\rho = 1, 2, \dots, n).$$

I secondi membri si annullano identicamente sempre e solo quando le (5) provengano per differenziazione totale da altrettante relazioni in termini finiti delle q e di t .

In generale, però, ove si tenga conto delle (5), le precedenti relazioni possono mettersi sotto la forma:

$$(7) \quad d\delta\chi_\rho - \delta d\chi_\rho = \sum_{\lambda\sigma}^n \gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} d\chi_\lambda \delta\chi_\sigma + dt \sum_{\lambda}^n \gamma_{n+1, \lambda}^{\rho} \delta\chi_\lambda$$

con le $\gamma_{\lambda\sigma}^{\rho}$ e $\gamma_{n+1, \lambda}^{\rho}$ funzioni delle q e di t , definite per mezzo delle derivate delle β e per mezzo delle B stesse; risulta inoltre, come agevolmente si verifica: $\gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} = -\gamma_{\sigma\lambda}^{\rho}$. Le (7) costituiscono le equazioni della transività secondo K. Heun⁽¹⁾.

§ 3. — IDENTIFICAZIONE DELLE EQUAZIONI (I)

CON LE EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE. — CASO DEI SISTEMI OLONOMI.

Supponiamo dapprima S olonomo; dalle (2'), per derivazione rapporto ad ω_ρ , si ottiene:

$$(8) \quad \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial \omega_\rho} = B_{\rho b} \quad (\rho, b = 1, 2, \dots, n).$$

Ponendo:

$$(8') \quad K_\rho = \sum_b^n B_{\rho b} Q_b \quad (\rho = 1, 2, \dots, n)$$

le equazioni del moto (I) in conformità possono scriversi:

$$(9) \quad \sum_b^n \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial \omega_\rho} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_b} - \frac{\partial T}{\partial q_b} \right) = K_\rho \quad (\rho = 1, 2, \dots, n).$$

La forza viva T del sistema materiale, nel caso più generale di vincoli reonomi (dipendenti esplicitamente dal tempo), è notoriamente definita da una relazione del tipo:

(1) K. HEUN, *Die Bedeutung des d'Alembertschen Prinzips* ecc. « Arch. Math. Phys » (3), 2, 1901.

$$(10) \quad T = \frac{1}{2} g_{00} + \sum_{\lambda}^n g_{0\lambda} \dot{q}_{\lambda} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu}^n g_{\lambda\mu} \dot{q}_{\lambda} \dot{q}_{\mu}$$

dove $g_{00}, g_{0\lambda}, g_{\lambda\mu}$ sono funzioni delle q e di t .

Denotando con T^* la forza viva T espressa, pel tramite della (2'), in termini delle q , delle ω ed eventualmente del tempo, si ha:

$$(10') \quad T^* = \frac{1}{2} c_{00} + \sum_{\lambda}^n c_{0\lambda} \omega_{\lambda} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu}^n c_{\lambda\mu} \omega_{\lambda} \omega_{\mu}$$

con $c_{00}, c_{0\lambda}, c_{\lambda\mu}$ funzioni solo delle q e di t .

Risulta quindi:

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_h} = \frac{\partial T}{\partial q_h} + \sum_{\sigma}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\sigma}} \frac{\partial \dot{q}_{\sigma}}{\partial q_h} \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

da cui si trae:

$$(11) \quad \sum_{\sigma}^n \frac{\partial \dot{q}_{\sigma}}{\partial \omega_{\rho}} \frac{\partial T}{\partial q_h} = \left(\frac{\partial T^*}{\partial \omega_{\rho}} \right) - \sum_{\sigma}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\sigma}} \frac{\partial \dot{q}_{\sigma}}{\partial q_h} \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial \omega_{\rho}} \quad (\rho = 1, 2, \dots, n)$$

ove, con riguardo alla (8), si è posto simbolicamente:

$$(11') \quad \left(\frac{\partial T^*}{\partial \omega_{\rho}} \right) = \sum_{\sigma}^n \frac{\partial T^*}{\partial q_h} B_{\rho h}.$$

Analogamente, si ottiene:

$$(12) \quad \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{\rho}} = \sum_{\sigma}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial \omega_{\rho}} \quad (\rho = 1, 2, \dots, n).$$

Per derivazione rapporto al tempo, risulta:

$$(13) \quad \sum_{\sigma}^n \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial \omega_{\rho}} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{\rho}} - \sum_{\sigma}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial \omega_{\rho}} \quad (\rho = 1, 2, \dots, n).$$

Da qui, sottraendo membro a membro le (11) dalle (13), si perviene alle:

$$(14) \quad \sum_{\sigma}^n \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial \omega_{\rho}} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{\rho}} - \left(\frac{\partial T^*}{\partial \omega_{\rho}} \right) + A_{\rho} \quad (\rho = 1, 2, \dots, n)$$

dove si è posto:

$$(15) \quad A_{\rho} = \sum_{\sigma}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \left(\sum_{\sigma}^n \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial q_{\sigma}} \frac{\partial \dot{q}_{\sigma}}{\partial \omega_{\rho}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial \omega_{\rho}} \right) \quad (\rho = 1, 2, \dots, n).$$

Moltiplichiamo ambo i membri delle (15) per $\delta\chi_e$ e sommiamo rispetto all'indice p ; otteniamo così l'identità:

$$(16) \quad \sum_e^n A_e \delta\chi_e = \sum_b^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_b} \left\{ \sum_\sigma^n \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial q_\sigma} \sum_e^n \frac{\partial \dot{q}_\sigma}{\partial \omega_e} \delta\chi_e - \frac{d}{dt} \left(\sum_e^n \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial \omega_e} \delta\chi_e \right) + \sum_e^n \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial \omega_e} \frac{d \delta\chi_e}{dt} \right\}.$$

D'altra parte le (6) forniscono:

$$(6'') \quad \delta q_\sigma = \sum_e^n B_{e\sigma} \delta\chi_e \quad (\sigma = 1, 2, \dots, n)$$

e con riguardo alle (8):

$$(6''') \quad \delta q_\sigma = \sum_e^n \frac{\partial \dot{q}_\sigma}{\partial \omega_e} \delta\chi_e \quad (\sigma = 1, 2, \dots, n).$$

Differenziando le (2') con la caratteristica δ si ottiene:

$$(17) \quad \delta \dot{q}_h = \sum_\lambda^n \frac{\partial B_{\lambda h}}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma \omega_\lambda + \sum_\lambda^n B_{\lambda h} \delta \omega_\lambda + \sum_\sigma^n \frac{\partial B_{n+1, h}}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Inoltre dalle (2') stesse, derivando rapporto a q_σ , moltiplicando per δq_σ e sommando rispetto all'indice σ , si traggono le espressioni:

$$(17') \quad \sum_\sigma^n \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma = \sum_\lambda^n \frac{\partial B_{\lambda h}}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma \omega_\lambda + \sum_\sigma^n \frac{\partial B_{n+1, h}}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

In base alle (6'''), con riguardo alle (17'), tenendo conto delle (17) e (8), si può stabilire l'eguaglianza:

$$\sum_\sigma^n \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial q_\sigma} \sum_e^n \frac{\partial \dot{q}_\sigma}{\partial \omega_e} \delta\chi_e = \delta \dot{q}_h - \sum_e^n \frac{\partial \dot{q}_h}{\partial \omega_e} \delta \omega_e \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Con riferimento alle relazioni di permutabilità (4), essendo $d\chi_e = \omega_e dt$, la (16) può assumere l'aspetto:

$$\sum_e^n A_e \delta\chi_e = \sum_b^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_b} \sum_e^n \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial \omega_e} \left(\frac{d \delta\chi_e}{dt} - \frac{\delta d\chi_e}{dt} \right)$$

che, in virtù delle (12), può anche scriversi:

$$(18) \quad \sum_e^n A_e \delta\chi_e = \sum_e^n \frac{\partial T^*}{\partial \omega_e} \frac{d \delta\chi_e}{dt} - \delta d\chi_e.$$

In base alle equazioni (7) della transitività, risulta:

$$\sum_e^n \frac{\partial T^*}{\partial \omega_e} \frac{d\delta\chi_e}{dt} - \delta d\chi_e = \sum_{\lambda\sigma}^n \gamma_{\lambda\sigma}^e \omega_\lambda \frac{\partial T^*}{\partial \omega_e} \delta\chi_\sigma + \sum_{\lambda}^n \gamma_{n+1,\lambda}^e \frac{\partial T^*}{\partial \omega_e} \delta\chi_\lambda.$$

Permutando opportunamente gli indici delle sommatorie al secondo membro, la (18) può quindi assumere la forma:

$$(18') \quad \sum_e^n A_e \delta\chi_e = \sum_i^n \left(\sum_{\lambda\sigma}^n \gamma_{\lambda\sigma}^i \omega_\sigma \frac{\partial T^*}{\partial \omega_\lambda} + \sum_\lambda^n \gamma_{n+1,\lambda}^i \frac{\partial T^*}{\partial \omega_\lambda} \right) \delta\chi_e.$$

Avendo supposto il sistema olonomo, in base alla (6), l'arbitrarietà delle δq implica l'arbitrarietà delle $\delta\chi$; si riconosce in tal modo, che, insieme con la (18'), debbono sussistere le relazioni:

$$A_e = \sum_{\lambda\sigma}^n \gamma_{\lambda\sigma}^e \omega_\sigma \frac{\partial T^*}{\partial \omega_\lambda} + \sum_\lambda^n \gamma_{n+1,\lambda}^e \frac{\partial T^*}{\partial \omega_\lambda}$$

e viceversa. Le equazioni dinamiche (9) pei sistemi olonomi, tenendo conto delle (14) e delle relazioni precedenti, possono ordinatamente assumere l'aspetto definitivo:

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_e} - \left(\frac{\partial T^*}{\partial \chi_e} \right) + \sum_{\lambda\sigma}^n \gamma_{\lambda\sigma}^e \omega_\sigma \frac{\partial T^*}{\partial \omega_\lambda} + \sum_\lambda^n \gamma_{n+1,\lambda}^e \frac{\partial T^*}{\partial \omega_\lambda} = K_e$$

($\rho = 1, 2, \dots, n$)

che coincidono con le equazioni cui G. Hamel ha dato il nome di « equazioni di Eulero-Lagrange della Meccanica ».

Nel caso particolare che il sistema olonomo che si considera sia scleronomo (a vincoli indipendenti dal tempo), i coefficienti arbitrari che intervengono nelle relazioni (2) si possono fare dipendere esclusivamente dalle q , e le $\beta_{e,n+1}$ possono scegliersi identicamente nulle; in base alle equazioni (7) della transitività risultano: $\gamma_{n+1,e}^{\lambda} \equiv 0$.

Le equazioni (1) in tal caso divengono:

$$(1') \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_e} - \left(\frac{\partial T^*}{\partial \chi_e} \right) + \sum_{\lambda\sigma}^n \gamma_{\lambda\sigma}^e \omega_\sigma \frac{\partial T^*}{\partial \omega_\lambda} = K_e \quad (\rho = 1, 2, \dots, n).$$

Moltiplicando le (1') per $d\chi_e$ e sommando rispetto all'indice ρ risulta manifestamente, in base alle (8'):

$$\sum_e^n K_e d\chi_e = dL$$

con dL lavoro elementare eseguito dalle forze attive nel tempuscolo dt ;

tenendo inoltre conto della emisimmetria delle $\gamma_{\sigma\epsilon}^{\lambda}$ rispetto agli indici inferiori, il primo membro delle (I'), in base alle (I'), fornisce:

$$\sum_1^n \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{\epsilon}} - \left(\frac{\partial T^*}{\partial \chi_{\epsilon}} \right) \right\} d\chi_{\epsilon} = \sum_1^n \omega_{\epsilon} dt \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{\epsilon}} - \sum_1^n \frac{\partial T^*}{\partial q_{\epsilon}} dq_{\epsilon}$$

ed il secondo membro si identifica con l'incremento dT^* subito dalla forza viva nello stesso tempuscolo dt ; si deduce così il teorema generale delle forze vive: $dT^* = dL$.

§ 4. - CASO DEI SISTEMI ANOLONOMI.

Nel caso in cui il sistema materiale considerato sia ulteriormente soggetto a vincoli anOLONOMI, esprimibili per mezzo di equazioni linearmente indipendenti del tipo:

$$\sum_1^n b_{r\epsilon} dq_{\epsilon} + b_{r,n+1} dt = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, k)$$

si ponga:

$$(19) \quad \begin{cases} \omega_l = \sum_1^n \beta_{l\epsilon} \dot{q}_{\epsilon} + \beta_{l,n+1} & (l = 1, 2, \dots, n-k) \\ \omega_{n-k+r} = \sum_1^n b_{r\epsilon} \dot{q}_{\epsilon} + b_{r,n+1} & (r = 1, 2, \dots, k). \end{cases}$$

A partire da una qualsivoglia configurazione del sistema all'istante t , il generico atto di moto compatibile coi vincoli, espresso nelle caratteristiche cinetiche ω , è caratterizzato dalle condizioni: $\omega_{n-k+r} = 0$ ($r = 1, 2, \dots, k$).

Lo spostamento virtuale generico in quasi-coordinate, come si è visto nella precedente Nota, si ottiene ponendo: $\delta\chi_{\epsilon} = 0$ ($\epsilon = 1, 2, \dots, n-k$) e scegliendo le variazioni $\delta\chi_{\epsilon}$ ($\epsilon = 1, 2, \dots, n-k$) del tutto ad arbitrio.

Poste le (19), le prime $n-k$ equazioni (I) si riducono allora alle equazioni del Maggi pei sistemi anOLONOMI:

$$(20) \quad \sum_l B_{lh}^* \left\{ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} \right) - Q_h \right\} = \sum_l B_{lh}^* Q_h \quad (l = 1, 2, \dots, n-k)$$

con le B_{lh}^* reciproci degli elementi β_{lh} nel determinante d'ordine n formato coi coefficienti delle \dot{q} nelle (19); avuto riguardo alla circostanza, già rilevata, che le (20) possono considerarsi come caso particolare delle (I) pei sistemi oLONOMI, le prime $n-k$ equazioni (I) forniscono:

$$(II) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{\epsilon}} - \left(\frac{\partial T^*}{\partial \chi_{\epsilon}} \right) + \sum_1^n \sum_1^{n-k} \gamma_{\sigma\epsilon}^{\lambda} \omega_{\sigma} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{\lambda}} + \sum_1^n \gamma_{\lambda,n+1}^{\lambda} \frac{\partial T^*}{\partial \omega_{\lambda}} = K_{\epsilon}$$

($\epsilon = 1, 2, \dots, n-k$)

che potevano anche direttamente ottenersi dalle (20) con procedimento analogo a quello già sviluppato; le (II) costituiscono le equazioni di Eulero-Lagrange pei sistemi anolonomi. Tali equazioni in conseguenza si identificano ordinatamente con le equazioni del Maggi, sebbene il Prange ⁽¹⁾ attribuisca a queste ultime forma più complicata.

Meccanica. — *Una formula di maggiorazione per un moto vibratorio forzato da azioni armoniche.* Nota di C. JODI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. P. BURGATTI.

L'analisi quantitativa rigorosa dei moti vibratorî urta sovente contro difficoltà di calcolo rilevanti, anche quando — in linea teorica — la soluzione del problema sia del tutto conseguita. Da ciò la convenienza, specie in questo campo, di buone formule di maggiorazione semplici e rigorose.

Risultati a questo riguardo, perseguiti con l'intento specifico di liberarsi da ogni elemento di origine dinamica, che non sia dovuto ai dati del problema, sono stati ottenuti da G. Krall ⁽³⁾ e ciò sia con riflesso allo spostamento, che agli indici più notevoli del cemento a cui viene sottoposto il materiale. Nella presente Nota si prosegue in quell'intento, dando una limitazione superiore per lo spostamento nel caso in oggetto. Essa non è priva d'interesse, perchè non contiene che elementi desumibili con la statica ordinaria.

Riferiamoci ad un sistema elastico rettilineo nel quale gli spostamenti avvengano in direzione trasversale e tale sia pure la direzione delle forze; in via approssimata i risultati seguiranno a valere per sistemi quasi rettilinei, nei quali una delle componenti di spostamenti e forze sia trascurabile rispetto alla componente in direzione ortogonale.

Conservando i simboli adoperati nelle Note richiamate, sia $w(x, t)$ lo spostamento, funzione del posto x (variabile da 0 a l) e del tempo t , $\mu(x)$ la massa per unità di lunghezza, $c(x, \xi)$ la così detta *funzione d'influenza*, esprimente lo spostamento in x per una forza $P = 1$ in ξ . Sia poi nel caso nostro

$$p(\xi, t) = p(\xi) \sin(\omega t + \theta)$$

(1) G. PRANGE, *Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik*. «Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften», vol. IV, fasc. 4 (1935).

(2) Nella seduta del 15 marzo 1936.

(3) G. KRALL, *Limiti superiori del cemento dinamico*. Questi «Rendiconti», vol. VII, ser. 6^a, 1° sem., fasc. 3, 1928; *Limiti del cemento dinamico nei sistemi dissipativi*. Questi «Rendiconti», vol. VII, ser. 6^a, 1° sem., fasc. 7, 1928; *Limitazioni superiori per lo spostamento dinamico nei sistemi elastici*. Questi «Rendiconti», vol. IX, ser. 6^a, 1° sem., fasc. 2, 1929; *Limitazioni locali del cemento dinamico*. Questi «Rendiconti», vol. IX, ser. 6^a, 1° sem., fasc. 5, 1929; *Carico costante e carico armonico e solitario in moto su di un ponte*. «Ricerche di Ingegneria», anno 1933, n. 3.

la forza perturbante per unità di lunghezza, avente frequenza ω ; la formula che vogliamo dimostrare è

$$(1) \quad w(x, t) \leq \frac{c(x, x)}{1 - \omega^2 \int_0^l \mu(x) c(x, x) dx} \sqrt{\frac{2W}{c(x, x)}}$$

nella quale W è il lavoro di deformazione per la distribuzione del carico statico $p(x)$.

Per legittimarla cominciamo con qualche richiamo.

Siano u_q le *autofunzioni*, σ_q gli *autovalori* del sistema elastico, più precisamente dell'equazione integrale omogenea di Fredholm che ne sintetizza il moto libero,

$$u_q(x) = \sigma_q^2 \int_0^l \mu(\xi) c(x, \xi) u_q(\xi) d\xi.$$

Per le proprietà specifiche del nucleo $\mu(\xi) c(x, \xi)$, le u_q costituiscono un sistema ortonormale chiuso, soddisfano cioè alle condizioni

$$\int_0^l \mu(\xi) u_q(\xi) u_\tau(\xi) d\xi = \begin{cases} 1 & \text{per } \rho = \tau \\ 0 & \text{» } \rho \neq \tau \end{cases}$$

e consentono lo sviluppo bilineare

$$(2) \quad c(x, \xi) = \sum_1^\infty \frac{u_q(x) u_q(\xi)}{\sigma_q^2}.$$

Da questo si ricava formalmente la relazione, qui valida in tutto rigore,

$$(3) \quad \int_0^l \mu(\xi) c(\xi, \xi) d\xi = \sum_1^\infty \frac{1}{\sigma_q^2}.$$

Sia $Q(x, t)$ la distribuzione di forze; allora, se si pone

$$(4) \quad Q_q(t) = \int_0^l Q(\xi, t) u_q(\xi) d\xi,$$

lo spostamento è dato dallo sviluppo

$$(5) \quad w(x, t) = \sum_1^\infty u_q(x) \varphi_q(t),$$

dove i coefficienti φ_q sono caratterizzati dall'equazione

$$(6) \quad \ddot{\varphi}_q + \sigma_q^2 \varphi_q = Q_q(t).$$

Veniamo al caso nostro di forze armoniche secondo l'espressione scritta da principio e poniamo

$$(7) \quad p_e = \int_0^1 p(\xi) u_e(\xi) d\xi;$$

la (4) dà allora

$$Q_e(t) = \sin(\omega t + \theta) p_e.$$

Sostituiamo in (6) e integriamo, tenendo conto della sola oscillazione forzata, potendosi ritenere, a regime raggiunto, estinta quella libera; si ha

$$(8) \quad w(x, t) = \sin(\omega t + \theta) \sum_1^{\infty} \frac{u_e(x) p_e}{\sigma_e^2 - \omega^2}.$$

Dobbiamo pertanto trovare una limitazione per questo sviluppo, ossia, con qualche trasformazione nella scrittura, per

$$w(x, t) = \sin(\omega t + \theta) \sum_1^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\sigma_e^2}} \frac{u_e(x)}{\sigma_e} \frac{p_e}{\sigma_e}.$$

Poste le σ_e in ordine crescente, tale cioè da aversi

$$\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \leq \dots \sigma_e^2 \leq \dots,$$

ritenendo che sia

$$\omega < \sigma_1,$$

com'è desiderabile, onde evitare risonanze all'avviamento, si avrà

$$\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\sigma_e^2}} < \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\sigma_1^2}}.$$

Applichiamo poi la disuguaglianza di Schwarz, per la quale è sempre

$$\sum \alpha_i \beta_i \leq \sqrt{\sum \alpha_i^2 \sum \beta_i^2};$$

si ottiene

$$w(x, t) \leq \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\sigma_1^2}} \sqrt{\sum_1^{\infty} \frac{u_e^2(x)}{\sigma_e^2} \sum_1^{\infty} \frac{p_e^2}{\sigma_e^2}}.$$

Ma la (3) fornisce

$$\int_0^l \mu(\xi) c(\xi, \xi) d\xi = \sum_1^{\infty} \frac{1}{\sigma_q^2} > \frac{1}{\sigma} ,$$

da cui

$$\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\sigma_1^2}} < \frac{1}{1 - \omega^2 \int_0^l \mu(\xi) c(\xi, \xi) d\xi} ;$$

la (2) dà invece

$$\sum_1^{\infty} \frac{u_q^2(x)}{\sigma_q^2} = c(x, x) ;$$

dalla (7) si ricava infine, con tacite convenzioni,

$$\sum_1^{\infty} \frac{p_q^2}{\sigma_q^2} = \sum_1^{\infty} \int_0^l \int_0^l \frac{p(x) u_q(x) p(\xi) u_q(\xi) dx d\xi}{\sigma_q^2} = \int_0^l \int_0^l c(x, \xi) p(x) p(\xi) dx d\xi ;$$

dopo di che, ove si rilevi che l'integrale scritto non è altro che il doppio lavoro $2W$, si perviene senz'altro alla (1), c. v. d.

OSSERVAZIONE. — La (1) è valida, come si è detto, per $\omega < \sigma_1$, o, se non è nota la σ_1 , come vogliamo supporre, per

$$(9) \quad \frac{1}{\omega^2} > \int_0^l \mu(\xi) c(\xi, \xi) d\xi .$$

Si può dare però un'espressione, se non altrettanto generale, ugualmente utile in più circostanze anche in caso diverso. Sia

$$\sigma_k^2 < \omega^2 < \sigma_{k+1}^2$$

ovvero

$$\frac{\omega^2}{\sigma_k^2} > 1 > \frac{\omega^2}{\sigma_{k+1}^2} .$$

Allora

$$\left| \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\sigma_q^2}} \right| < \left| \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\sigma_k^2}} \right| = a_k \quad \text{per } p \leq k$$

$$\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\sigma_q^2}} < \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\sigma_{k+1}^2}} = a_{k+1} \quad \text{per } p \geq k+1 .$$

Detto a il maggiore fra i due valori a_k e a_{k+1} , è allora

$$w(x, t) < a \sqrt{c(x, x) \cdot 2W};$$

naturalmente si deve determinare il coefficiente a , e per questo è necessario conoscere σ_k e σ_{k+1} o valersi, come potremo far vedere in seguito, di alcune limitazioni fornite dai Teoremi del Rayleigh.

ESEMPIO. — Nel caso dell'asta appoggiata, di massa μ_0 e momento di inerzia I costanti, si ha

$$\sigma_0^2 = \frac{EI}{\mu_0} \left(\frac{\rho\pi}{l_0} \right)^4, \quad u_0(x) = \sqrt{\frac{2}{l\mu_0}} \sin \frac{\rho\pi x}{l}.$$

Determiniamo l'errore che si commette arrestandosi alla prima autofunzione. La (8) dà in tal caso per la massima elongazione dell'abbassamento

$$w \approx w_a = \frac{2}{l\mu_0} \sin \frac{\pi x}{l} \frac{I}{EI \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 - \omega^2} \int_0^l p(\xi) \sin \frac{\pi \xi}{l} d\xi.$$

Con la nostra (1), essendo

$$c(x, x) = \frac{x^2(l-x)^2}{3EI} \quad , \quad \int_0^l c(x, x) dx = \frac{l^4}{90EI},$$

si ottiene invece

$$w \leq w_b = \frac{30}{l\mu_0} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \frac{I}{90EI - \omega^2} \sqrt{\frac{6EI}{l^3}} W$$

dove W è, come già avvertito, il lavoro di deformazione per il carico $p(x)$.

Lasciamo i fattori contenenti ω^2 , che, per essere $\pi^4 = 97.3$ circa, sono molto prossimi fra loro, o comunque paragonabili. Per carico uniforme $p(x) = p$, è, a meno di detti fattori

$$w_a = \frac{4p}{\pi\mu_0} \sin \frac{\pi x}{l} \quad , \quad w_b = \frac{3}{2} \sqrt{10} \frac{p}{\mu_0} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right).$$

Per carico concentrato P in ξ si ha invece, sempre a meno dei detti fattori,

$$w_a = \frac{2P}{l\mu_0} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi \xi}{l}$$

$$w_b = \frac{30P}{l\mu_0} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \frac{\xi}{l} \left(1 - \frac{\xi}{l} \right).$$

Valutando il rapporto $\frac{w_a}{w_b}$, esso risulta

$$\frac{w_a}{w_b} = 0.85 \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{\frac{\pi x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)} \quad \text{per carico uniforme,}$$

$$\frac{w_a}{w_b} = 0.66 \frac{\sin \frac{\pi x}{l}}{\frac{\pi x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)} \frac{\sin \frac{\pi \xi}{l}}{\frac{\pi \xi}{l} \left(1 - \frac{\xi}{l}\right)} \quad \text{per carico concentrato applicato in } \xi.$$

Nel 1° caso $\frac{w_a}{w_b}$ resta compreso fra 0.85 (valore minimo per $x=0$ e $x=l$) e 1.08 (valore massimo per $x=\frac{l}{2}$). Nel 2° caso $\frac{w_a}{w_b}$ resta compreso fra il valore minimo 0.66 (per $x=\xi=0$ e per $x=\xi=l$) e il valore massimo $\frac{16}{15} \approx 1.07$. Questi valori assai prossimi ad 1 e in ispecial modo quelli superiori fanno supporre che la nostra formula (1) dà una limitazione praticamente utile e rendono conto che, effettivamente, il considerare la prima vibrazione fondamentale solamente *non* è illegittimo nelle pratiche applicazioni.

Meccanica (Idrodinamica). — *Un'applicazione del metodo delle immagini ai moti vorticosi*. Nota di G. LAMPARIELLO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. È ben noto come si determini il campo delle velocità delle particelle di un liquido perfetto, che riempie tutto lo spazio S , quando sia noto il campo vorticoso.

Se P, P' è una qualunque coppia di punti di S , ammettendo il cosiddetto comportamento regolare all'infinito, si considera il potenziale vettore

$$\mathbf{A}(P) = \int_S \frac{\omega(P')}{\Delta} dS,$$

essendo $\omega(P')$ il vortice in P' e $\Delta = PP'$.

La velocità della particella fluida in P è allora data dalla classica formula

$$(1) \quad \mathbf{v}(P) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{rot}_P \mathbf{A} = \frac{1}{2\pi} \int_S \omega(P') \wedge (P - P') \frac{dS}{\Delta^3},$$

(1) Nella seduta del 15 marzo 1936.

la quale esprime che il contributo alla velocità di P di una particella fluida, di volume dS , concentrata in P' , è la velocità che avrebbe P qualora il fluido rotasse intorno alla linea di azione di $\omega(P')$, come se fosse un solido, moltiplicata per $\frac{dS}{2\pi\Delta^3}$.

Supponiamo ora che il liquido occupi lo spazio esterno S' ad una superficie sferica fissa σ di centro O e raggio R e sia S'' lo spazio interno a σ .

Su σ , le velocità indotte dalla distribuzione vorticoso assegnata debbono avere componente normale nulla ed è ovvio che questa condizione non sarà in generale verificata. La questione di assegnare un termine correttivo atto a soddisfarla, nell'ambito dell'idrodinamica piana, tenendo conto della presenza di uno o più ostacoli, è stata oggetto di numerosi lavori⁽¹⁾, nei quali si è applicato con successo il metodo delle immagini, ideato, come è noto, da Lord Kelvin.

In questa Nota ci proponiamo di mostrare come lo stesso metodo sia applicabile con frutto al moto di un liquido perfetto intorno a σ .

In modo preciso, mostreremo che è possibile associare al campo vorticoso $\omega'(P')$ assegnato, un campo vorticoso $\omega''(P'')$ fittizio, interno a σ , tale che P'' sia l'immagine di P' nell'inversione per raggi vettori reciproci rispetto a σ e tale inoltre che la velocità risultante

$$(2) \quad v(P) = v'(P) + v''(P)$$

abbia ovunque nulla su σ la componente normale

$$(3) \quad v \times n = 0,$$

dove n denota il versore normale a σ .

A tale scopo, cominceremo coll'osservare che l'inversione rispetto a σ è espressa da

$$(4) \quad P'' - O = \frac{R^2}{r'^2} (P' - O),$$

dove

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + \zeta'^2$$

ed x', y', ζ' sono le coordinate cartesiane di P' rispetto ad una terna di origine O.

In virtù di (1), la (2) è

$$(2') \quad 2\pi v(P) = \int_{S'} \omega'(P') \wedge (P - P') \frac{dS'}{\Delta'^3} + \int_{S''} \omega''(P'') \wedge (P - P'') \frac{dS''}{\Delta''^3},$$

essendo Δ', Δ'' le distanze di P dai punti P', P'' reciproci rispetto a σ .

(1) Cfr. U. CISOTTI, *Idromeccanica piana*. Milano, 1921-22; H. VILLAT, *Mécanique des fluides*. Paris, Gauthier Villars, 1930; *Théorie des tourbillons*. Ibid., 1930.

Il secondo membro di (2') si può esprimere con un unico integrale esteso ad S' , poichè, essendo

$$J = - \frac{R^6}{r'^6}$$

il jacobiano della inversione, si ha, per una nota regola di calcolo integrale,

$$\int_{S'} \omega''(P'') \wedge (P - P'') \frac{dS''}{\Delta'^3} = \int_{S'} \omega'' \wedge (P - P'') \frac{R^6}{r'^6} \frac{dS'}{\Delta'^3}.$$

Ma è noto, dalla geometria elementare, che, quando P è su σ , si ha

$$\frac{1}{\Delta''} = \frac{r'}{R} \frac{1}{\Delta'},$$

dunque

$$2\pi v(P) = \int_{S'} \left\{ \omega' \wedge (P - P') + \frac{R^3}{r'^3} \omega'' \wedge (P - P'') \right\} \frac{dS'}{\Delta'^3}.$$

Se si vuole che la (3) sussista per tutti i punti P di σ , comunque sia piccola la regione dello spazio S' , occupata da vortici, dovrà essere:

$$\omega' \wedge (P - P') \times n + \frac{R^3}{r'^3} \omega'' \wedge (P - P'') \times n = 0,$$

ovvero, notando che n ha la direzione di $P - O$,

$$\omega' \wedge (P' - O) \times n + \frac{R^3}{r'^3} \omega'' \wedge (P'' - O) \times n = 0.$$

In virtù di (4), si ha dunque

$$\left(\omega' + \frac{R^3}{r'^3} \omega'' \right) \wedge (P' - O) \times n = 0.$$

Poichè questa condizione deve valere qualunque sia P' e in ogni punto P di σ , dovrà essere necessariamente

$$(5) \quad \omega'' = - \frac{r'^5}{R^5} \omega'.$$

La (5) definisce il campo vorticoso, interno a σ , tale che sia soddisfatta la condizione (3)⁽¹⁾.

(1) Nel redigere la presente Nota, sono venuto a conoscenza della Memoria *Sopra*

Concludiamo che il campo delle velocità indotte dalla distribuzione vorticoso ω , in presenza della superficie sferica σ , è espressa dalla formola

$$v(P) = \frac{1}{2\pi} \int_S \omega(P, P') dS,$$

essendo

$$\omega = \frac{\omega(P') \wedge (P - P')}{\Delta'^3} - \frac{R}{r'} \frac{\omega(P') \wedge (P - P'')}{\Delta''^3}$$

L'integrazione va estesa al campo S in cui ω non è nullo.

2. Applichiamola in particolare al caso in cui esista nel liquido un unico anello vorticoso Γ' infinitamente sottile di intensità I' .

Ammettiamo che il moto fluido sia simmetrico intorno all'asse z , talchè l'anello ha necessariamente la forma circolare col centro su Oz .

Sia $d\sigma'$ la sezione meridiana infinitesima di Γ' ; il vortice ω' ha la direzione tangenziale all'anello e la sua lunghezza ω' è legata ad I' dalla relazione

$$I' = 2 \omega' d\sigma'.$$

Si può allora domandare, come dianzi, se si possa associare a Γ' un anello vorticoso Γ'' , interno a σ , immagine di Γ' , tale che la risultante delle velocità indotte da Γ' e Γ'' in ogni punto P di σ soddisfi la (3).

Se I'' è la incognita intensità e $d\sigma''$ è la sezione meridiana di Γ'' , si ha

$$d\sigma'' = \frac{R^4}{r'^4} d\sigma'$$

e quindi, in virtù di (5), si trova che

$$(5') \quad I'' = -\frac{r'}{R} I'.$$

Dalla (5) si rileva che il verso di rotazione delle particelle che, in ogni istante, costituiscono l'anello Γ'' è opposto a quello corrispondente alle particelle di Γ' . Si tratta dunque di due vortici filiformi alternati.

alcuni problemi di idrodinamica del prof. VITO VOLTERRA inserita nel «Nuovo Cimento» per l'anno 1882.

In essa l'illustre Autore ha applicato nello spazio il metodo delle immagini all'idrodinamica sfruttando la ben nota analogia con i fenomeni elettromagnetici.

Egli mostra come si possa determinare il potenziale della velocità indotta da linee vorticosi chiuse, in tal modo che la sua derivata normale su σ sia ovunque nulla.

Ma, poichè in una distribuzione vorticoso qualunque, le linee vorticosi possono estendersi anche all'infinito, nel qual caso nuove considerazioni sarebbero necessarie per giustificare la validità dell'analogia elettromagnetica, così riteniamo che il nostro procedimento diretto, indicato nel testo, non sia del tutto privo di interesse.

3. Vogliamo qui osservare che, in questo caso particolare, la (5') si potrebbe dedurre traverso la considerazione delle funzioni ψ' , ψ'' delle correnti indotte dagli anelli Γ' , Γ'' .

È noto⁽¹⁾ che, essendo ρ , ρ' le distanze di P , P' dall'asse ζ ed $\varepsilon = \widehat{POP'}$, si ha

$$\psi' = \frac{I' \rho \rho'}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \varepsilon d\varepsilon}{\Delta'}$$

(una formola analoga vale per ψ'').

D'altra parte la (3) assume l'aspetto

$$\psi' + \psi'' = 0 \quad \text{su } \sigma$$

e di qua segue senz'altro la (5').

Si ha così che la funzione di corrente indotta dall'anello circolare Γ di intensità I , in presenza della superficie sferica σ , è espressa dalla formola

$$\psi = \frac{I \rho \rho'}{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1}{\Delta'} - \frac{R}{r'} \frac{1}{\Delta''} \right) \cos \varepsilon d\varepsilon.$$

4. Aggiungiamo un'osservazione concernente il comportamento della funzione di corrente ψ , quando P tende comunque all'infinito; da esso si dedurrà l'analogo comportamento del potenziale di velocità Φ che, come si sa, sussiste all'esterno dell'anello vorticoso Γ' (e di Γ'').

Le funzioni ψ e Φ sono legate dalle classiche equazioni

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta},$$

dalle quali si rileva che, trattando $\frac{1}{r}$ come infinitesimo principale ($r = OP$), l'ordine di Φ supera di un'unità l'ordine di ψ . Poichè, si ha

$$\frac{1}{\Delta'} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r' \cos \varepsilon}{r} + \dots \right)$$

e

$$\frac{1}{\Delta''} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r'' \cos \varepsilon}{r} + \dots \right),$$

(1) Cfr. H. VILLAT, *Théorie des tourbillons*, p. 209.

si trova che

$$\psi = \frac{1}{4} \frac{I r' \rho' \sin \theta}{r} \left(1 - \frac{R^3}{r'^3} \right) + \dots,$$

trascurando i termini di ordine superiore al primo.

La ψ è dunque semiregolare di prim'ordine all'infinito nel senso da noi introdotto in una recente Nota⁽¹⁾ e quindi il potenziale Φ che regna all'esterno dell'anello Γ' (e di Γ'') è, in ogni istante, semiregolare di secondo ordine all'infinito.

Ne segue che, se si immagina che la sfera σ sia investita da una corrente liquida, in seno alla quale migra l'anello vorticoso Γ' , questo, insieme con la sua immagine interna a σ , induce una distribuzione irrotazionale di velocità (all'esterno di Γ' (e Γ'')) di potenziale Φ (la cui derivata normale a σ è nulla su σ).

Questo, aggiunto alla classica soluzione di Dirichlet

$$\Phi_0 = v_0 \zeta + 1/2 v_0 \zeta \frac{R^3}{r^3},$$

(il cui secondo addendo è anch'esso semiregolare di secondo ordine all'infinito) lascerebbe sussistere il paradosso di d'Alembert, se si trattasse di moto stazionario. In realtà, l'anello vorticoso è animato da moto traslatorio (in direzione assiale), cosicchè il moto fluido *non* è stazionario.

Appare quindi desiderabile una più approfondita indagine di questo tipo di movimenti dal punto di vista dinamico ed energetico.

(1) Cfr. G. LAMPARIELLO, *Comportamento all'infinito di usuali funzioni del posto*. « Rend. Lincei », ser. 6^a, vol. XXII, 1935, p. 557.

Meccanica. — *Un'osservazione sulla Cinetostatica dei sistemi elastici.* Nota di C. TAGLIACOZZO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. In questa Nota si vuole osservare (e l'osservazione, pressochè immediata, può presentare notevole interesse per le applicazioni concrete) che il principio del D'ALEMBERT ed una ipotesi, concernente il modo di variare della sollecitazione attiva, permettono di estendere anche a certe questioni di Cinetostatica il procedimento del MENABREA, tanto in favore presso i tecnici per risolvere problemi di Statica dei sistemi elastici a vincoli sovrabbondanti.

Rammentiamo che, detto L il lavoro di deformazione di un sistema elastico (in quiete), il teorema del MENABREA si compendia nelle due relazioni, sempre verificate per una configurazione possibile del sistema,

$$\delta_{\sigma} L = 0 \quad , \quad \delta_{\sigma}^2 L > 0$$

(con l'indice σ vogliamo brevemente indicare che la variazione si è operata nelle componenti della tensione), ed afferma che *fra tutte le configurazioni equilibrate, l'unica possibile per il sistema è quella che rende minima la funzione L .*

2. Consideriamo un solido elastico in movimento, e riferiamolo ad una terna ortogonale (fissa) di assi cartesiani ($Ox y \chi$). Nell'istante generico t occupi il solido con densità ρ lo spazio connesso V , limitato dalla superficie S .

Come è ben noto, in ogni istante sono verificate le tre equazioni indefinite

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{x\chi}}{\partial \chi} + \rho F_x = \rho f_x , \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{y\chi}}{\partial \chi} + \rho F_y = \rho f_y , \\ \frac{\partial \tau_{x\chi}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{y\chi}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{\chi}}{\partial \chi} + \rho F_{\chi} = \rho f_{\chi} , \end{array} \right.$$

(1) Nella seduta del 15 marzo 1936.

e le tre equazioni ai limiti

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{xz} \cos(n, z) + P_x + \\ \quad + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x} + \nu \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \\ \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{yz} \cos(n, z) + P_y + \\ \quad + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \mu \frac{\partial g}{\partial y} + \nu \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \\ \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z) + P_z + \\ \quad + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} + \mu \frac{\partial g}{\partial z} + \nu \frac{\partial h}{\partial z} = 0^{(1)}. \end{array} \right.$$

Facciamo l'ipotesi che la sollecitazione attiva vari gradualmente (a partire dallo zero): allo stesso modo varieranno allora le forze d'inerzia. Al lavoro di deformazione, relativo all'istante generico t , potremo pertanto dare l'espressione ⁽²⁾

$$(3) \quad L = \frac{I}{2} \left\{ \iiint_V \rho (F_x u + F_y v + F_z w) dV + \iint_S (P_x u + P_y v + P_z w) dS - \right. \\ \left. - \iiint_V \rho (f_x u + f_y v + f_z w) dV \right\} = \iiint_V \varphi \cdot dV.$$

Ciò posto, la constatazione della validità del teorema del MENABREA per il caso (dinamico) qui considerato è senz'altro immediata.

Si riconosce infatti subito che la presenza delle componenti della forza d'inerzia nelle (1) e del lavoro da essa compiuto nella (3) non modifica la dimostrazione ⁽³⁾ che di questo teorema si suol dare nel caso statico.

(1) Nelle (1) e nelle (2) abbiamo indicato, per l'istante generico t , con

$\rho F_x, \rho F_y, \rho F_z$ le componenti della forza di massa riferita all'unità di volume;

P_x, P_y, P_z le componenti della forza superficiale riferita all'unità di superficie;

$-\rho f_x dV, -\rho f_y dV, -\rho f_z dV$ le componenti della forza d'inerzia relativa alla massa contenuta nell'elemento di volume dV ;

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ le componenti speciali di tensione;

λ, μ, ν tre funzioni delle coordinate (moltiplicatori del LAGRANGE);

$f(x, y, z) = 0, g(x, y, z) = 0, h(x, y, z) = 0$ le equazioni dei vincoli (f, g, h sono tre funzioni, regolari delle coordinate, definite per ogni punto di S);

n la direzione della normale alla superficie S , rivolta verso l'interno di V .

(2) Denotiamo con u, v, w le componenti dello spostamento elastico, e con φ il lavoro di deformazione unitario (variazione dell'energia potenziale elastica unitaria a partire da quella — vincolata — propria dello stato naturale), ben nota forma quadratica, essenzialmente positiva, delle componenti speciali di tensione o delle componenti della deformazione ($\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$).

(3) Per la dimostrazione del teorema del MENABREA, cfr., ad es., COLONNETTI, *La Statica delle costruzioni*. U. T. E. T. Torino, 1928, vol. I, p. 242.

Si rammenti che in quel caso si ricercava un'altra (ipotetica) configurazione equilibrata incrementando le reazioni di vincolo e le componenti speciali di tensione, in modo tale che rimanessero verificate le equazioni indefinite (differenti dalle (1) soltanto per avere i secondi membri nulli) e quelle ai limiti (identiche alle (2)); e non alterando affatto le forze di massa. Si riconosceva poi che la corrispondente variazione del lavoro di deformazione risultava costituita da un termine del secondo ordine, sempre positivo, e da un termine del primo ordine, nullo, se la configurazione (oltre ad essere equilibrata) era anche possibile. Donde la proposizione del MENABREA.

La presenza delle forze d'inerzia non può quindi infirmare la validità del ragionamento; che, tuttavia, ripetiamo per maggiore chiarezza.

Si incrementino, dunque, di

$$\delta\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \delta\mu \frac{\partial g}{\partial x} + \delta\nu \frac{\partial h}{\partial x},$$

$$\delta\lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \delta\mu \frac{\partial g}{\partial y} + \delta\nu \frac{\partial h}{\partial y},$$

$$\delta\lambda \frac{\partial f}{\partial z} + \delta\mu \frac{\partial g}{\partial z} + \delta\nu \frac{\partial h}{\partial z}$$

le componenti delle reazioni di vincolo (relative all'istante t), e di

$$\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \delta\sigma_z, \delta\tau_{xy}, \delta\tau_{yz}, \delta\tau_{zx}$$

le componenti speciali di tensione (sempre relative a quell'istante), in modo tale che risultino ancora soddisfatte le (1) e le (2). Dovranno pertanto essere verificate in tutto lo spazio V (occupato dal solido nell'istante considerato) le tre condizioni

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\delta\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\tau_{xz})}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\sigma_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial(\delta\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\sigma_z)}{\partial z} = 0; \end{array} \right.$$

e su tutta la superficie S le tre altre

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta\sigma_x \cos(n, x) + \delta\tau_{xy} \cos(n, y) + \delta\tau_{xz} \cos(n, z) + \\ \quad + \delta\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \delta\mu \frac{\partial g}{\partial x} + \delta\nu \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \\ \delta\tau_{xy} \cos(n, x) + \delta\sigma_y \cos(n, y) + \delta\tau_{yz} \cos(n, z) + \\ \quad + \delta\lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \delta\mu \frac{\partial g}{\partial y} + \delta\nu \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \\ \delta\tau_{xz} \cos(n, x) + \delta\tau_{yz} \cos(n, y) + \delta\sigma_z \cos(n, z) + \\ \quad + \delta\lambda \frac{\partial f}{\partial z} + \delta\mu \frac{\partial g}{\partial z} + \delta\nu \frac{\partial h}{\partial z} = 0. \end{array} \right.$$

Si calcoli la corrispondente variazione della funzione L:

$$\delta_\sigma L + \delta_\sigma^2 L = \iiint_V \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_x} \delta\sigma_x + \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_y} \delta\sigma_y + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{xz}} \delta\tau_{xz} \right) dV + \\ + \iiint_V \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \sigma_x^2} \delta\sigma_x^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \sigma_x \partial \sigma_y} \delta\sigma_x \delta\sigma_y + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_{xz}^2} \delta\tau_{xz}^2 \right) dV.$$

Si riconosce immediatamente che il termine del secondo ordine è positivo⁽¹⁾. Quanto al termine del primo ordine, si ha⁽²⁾:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_x} \delta\sigma_x + \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_y} \delta\sigma_y + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{xz}} \delta\tau_{xz} \right) dV = - \iiint_V \left\{ \left(\frac{\partial (\delta\sigma_x)}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial (\delta\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial (\delta\tau_{xz})}{\partial z} \right) u + \left(\frac{\partial (\delta\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (\delta\sigma_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\delta\tau_{yz})}{\partial z} \right) v + \right.$$

(1) L'espressione entro parentesi nell'ultimo integrale è proprio la funzione φ calcolata pei valori $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \dots, \delta\tau_{xz}$.

(2) Si tengano presenti le sei, ben note, relazioni

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_x}, \varepsilon_y = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_y}, \dots, \gamma_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{xz}},$$

e le altre sei, pure notissime,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \dots, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x};$$

e si applichi la formula di trasformazione di un integrale esteso ad uno spazio dato in un integrale esteso alla superficie che lo limita.

$$+ \left(\frac{\partial (\delta \tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial (\delta \tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial (\delta \sigma_z)}{\partial z} \right) w \left\{ dV - \iint_S [\delta \sigma_x \cos(n, x) + \right. \\ + \delta \tau_{xy} \cos(n, y) + \delta \tau_{xz} \cos(n, z)] u + [\delta \tau_{xy} \cos(n, x) + \delta \sigma_y \cos(n, y) + \\ + \delta \tau_{yz} \cos(n, z)] v + [\delta \tau_{xz} \cos(n, x) + \delta \tau_{yz} \cos(n, y) + \delta \sigma_z \cos(n, z)] w \left. \right\} dS.$$

Si osservi ora che, per le (4), il primo integrale del secondo membro è nullo, mentre, per le (5), il secondo integrale si può trascrivere così

$$\iint_S - \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w \right) \delta \lambda + \left(\frac{\partial g}{\partial x} u + \frac{\partial g}{\partial y} v + \frac{\partial g}{\partial z} w \right) \delta \mu + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial h}{\partial x} u + \frac{\partial h}{\partial y} v + \frac{\partial h}{\partial z} w \right) \delta v \right\} dS.$$

Se lo spostamento è possibile ⁽¹⁾, quest'ultimo integrale è pure nullo.

Per una configurazione che, nell'istante considerato, sia (oltre che equilibrata) anche possibile, risulta dunque

$$\delta_\sigma L = 0 \quad , \quad \delta_\sigma^2 L > 0:$$

possiamo allora enunciare che

per un sistema elastico in moto sotto l'azione di vincoli privi di attrito e di una sollecitazione qualsiasi (purchè variabile gradualmente a partire dallo zero), l'unica configurazione istantanea possibile è caratterizzata, tra tutte le configurazioni equilibrate relative al medesimo istante, come quella che rende minima la funzione L. Il valore minimo di questa funzione è uguale al lavoro di deformazione del sistema nell'istante considerato.

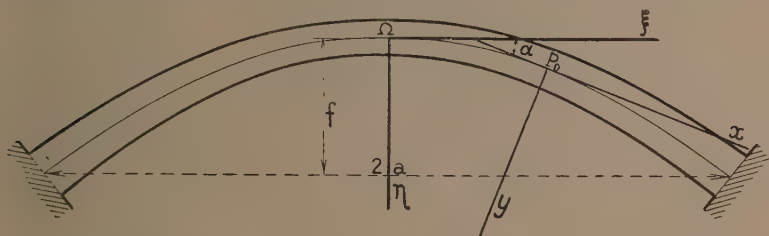
(1) Se lo spostamento è possibile, le sue componenti u, v, w debbono soddisfare alle condizioni di compatibilità

$$\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w = 0 \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial x} u + \frac{\partial g}{\partial y} v + \frac{\partial g}{\partial z} w = 0 \quad , \quad \frac{\partial h}{\partial x} u + \frac{\partial h}{\partial y} v + \frac{\partial h}{\partial z} w = 0.$$

Meccanica. — *Sugli archi elastici piani.* — I. *Le equazioni differenziali delle deformazioni.* Nota di E. VOLTERRA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In Note già pubblicate in questi « Rendiconti » ⁽²⁾ mi sono occupato del problema dello studio delle deformazioni dei solidi elastici allungati (travi prismatiche e ad arco) nell'ipotesi di elasticità vincolata.

Per lo studio di solidi a curva direttrice piana, ci gioverà, onde semplificare i calcoli, passare da tre a due dimensioni supponendo che vi sia identità di comportamento nelle singole sezioni del solido parallele al suo piano di simmetria. Potremo in conformità limitarci a tale piano che contiene la curva direttrice; indicheremo con x l'ascissa curvilinea della fibra media baricentrica (direttrice), con y l'asse normale nel punto di ascissa curvilinea x , indicheremo con $\Omega\xi\eta$ il sistema cartesiano⁽³⁾ ortogonale di riferimento: ξ tangente alla fibra media nel punto $x = 0$, η diretta positivamente verso l'intradosso [concavità]. Denotiamo con α l'angolo che forma la tangente alla direttrice (nel verso positivo della x) con l'asse ξ . Sia d'altra parte P un punto del sistema elastico situato sulla normale alla direttrice in P_0 e avente per coordinate $0, y$ rispetto agli assi P_0XY (diretti secondo



la tangente e la normale in P_0) (ved. figura). Le coordinate ξ, η di P rispetto agli assi fissi $\Omega\xi\eta$ saranno date dalle formule:

$$\begin{cases} \xi = \xi_0(x) - y \sin \alpha, \\ \eta = \eta_0(x) + y \cos \alpha, \end{cases} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \cos \alpha (1 - y c), \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} = \sin \alpha (1 - y c), \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\sin \alpha, \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} = \cos \alpha. \end{cases}$$

Per un generico vettore v , avente proiezioni v_x e v_y sugli assi delle x e delle y sarà

(1) Nella seduta del 15 marzo 1936.

(2) Ved. « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », 2° sem. 1932, 2° sem. 1934, 1° sem. 1935, 1° sem. 1936.

$$(1) \quad \begin{cases} v_{\xi} = v_x \cos \alpha - v_y \sin \alpha, \\ v_{\eta} = v_x \sin \alpha + v_y \cos \alpha; \end{cases}$$

mentre, indicando con c la curvatura (con segno) della fibra media in P , si ha:

$$\frac{d\alpha}{dx} = c.$$

Supponiamo ora che la deformazione sia vincolata, e precisamente che il vettore spostamento elastico del piano $\Omega\xi\eta$ sia del tipo:

$$(2) \quad u = \lambda y + v,$$

essendo λ e v due vettori infinitesimi, funzioni *a priori* incognite della sola x . Dalla (2) si rileva subito il carattere della deformazione: essa si compone di una traslazione, di una pura deformazione e di una rotazione rigida, attorno all'origine, di ampiezza $-\frac{1}{2}\lambda^1$ (contata positivamente nel verso da x a y).

In base alle (1) le componenti dello spostamento elastico avranno le espressioni:

$$(3) \quad \begin{cases} u_{\xi} = (\lambda_x y + v_x) \cos \alpha - (\lambda_y y + v_y) \sin \alpha, \\ u_{\eta} = (\lambda_x y + v_x) \sin \alpha + (\lambda_y y + v_y) \cos \alpha, \end{cases}$$

essendo $\lambda_x, \lambda_y, v_x, v_y$ le proiezioni sugli assi x ed y dei vettori λ e v . È facile verificare che le componenti delle deformazioni sono definite da:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \xi} = (1 + yc) \left(y \frac{d\lambda_x}{dx} + \frac{dv_x}{dx} \right) \cos^2 \alpha - \\ &\quad - (1 + yc) \left(y \frac{d\lambda_y}{dx} + \frac{dv_y}{dx} \right) \sin \alpha \cos \alpha - c(y\lambda_x + v_x) \sin \alpha \cos \alpha - \\ &\quad - c \cos^2 \alpha (y\lambda_y + v_y) - \lambda_x \cos \alpha \sin \alpha + \lambda_y \sin^2 \alpha, \\ \gamma_{22} &= \frac{\partial u_{\eta}}{\partial \eta} = (1 + yc) \left(y \frac{d\lambda_x}{dx} + \frac{dv_x}{dx} \right) \sin^2 \alpha + \\ &\quad + (1 + yc) \left(y \frac{d\lambda_y}{dx} + \frac{dv_y}{dx} \right) \sin \alpha \cos \alpha + c(y\lambda_x + v_x) \cos \alpha \sin \alpha - \\ &\quad - c(y\lambda_y + v_y) \sin^2 \alpha + \lambda_x \sin \alpha \cos \alpha + \lambda_y \cos^2 \alpha, \\ \gamma_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\xi}}{\partial \eta} + \frac{\partial u_{\eta}}{\partial \xi} \right) = (1 + yc) \cos \alpha \sin \alpha \left(y \frac{d\lambda_x}{dx} + \frac{dv_x}{dx} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (1 + yc) (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \left(y \frac{d\lambda_y}{dx} + \frac{dv_y}{dx} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} c (\lambda_x y + v_x) (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + c \sin \alpha \cos \alpha (\lambda_y y + v_y) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda_x (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \lambda_y \sin \alpha \cos \alpha; \end{aligned} \right.$$

e la divergenza nel vettore spostamento elastico da:

$$(5) \quad \Theta = \gamma_{11} + \gamma_{22} = \left(y \frac{d\lambda_x}{dx} + \frac{dv_x}{dx} \right) (1 + \gamma c) + \lambda_y - c(\gamma \lambda_y + v_y).$$

Nel punto $x = 0$ è $\alpha = 0$ e le componenti di deformazione diventano rispettivamente:

$$(4') \quad \begin{cases} \gamma_{11} = (1 + \gamma c) \left(y \frac{d\lambda_x}{dx} + \frac{dv_x}{dx} \right) - c(\lambda_y y + v_y); \\ \gamma_{22} = \lambda_y; \\ \gamma_{12} = \frac{1}{2} \left[(1 + \gamma c) \left(y \frac{d\lambda_y}{dx} + \frac{dv_y}{dx} \right) + c(\lambda_x y + v_x) + \lambda_x \right]; \end{cases}$$

Ne risultano, col ben noto significato delle costanti elastiche L e K , le componenti degli sforzi locali:

$$(6) \quad \begin{cases} \sigma_x = L\Theta + 2k\gamma_{11} = L\lambda_y + (L + 2k) \left[\left(y \frac{d\lambda_x}{dx} + \frac{dv_x}{dx} \right) (1 + \gamma c) - c(\lambda_y y + v_y) \right]; \\ t_{xy} = 2k\gamma_{12} = k \left[(1 + \gamma c) \left(y \frac{d\lambda_y}{dx} + \frac{dv_y}{dx} \right) + c(\lambda_x y + v_x) + \lambda_x \right]; \end{cases}$$

e gli sforzi globali N (sforzo normale), T (sforzo di taglio), M (momento flettente) nella sezione $x = 0$ (incognite iperstatiche nel caso in un arco incastrato all'estremità), forniti dalle espressioni:

$$(7) \quad \begin{cases} N = \int_A \sigma_x dA = A \left[L\lambda_y + (L + 2k) \left(\frac{dv_x}{dx} + \rho^2 c \frac{d\lambda_x}{dx} - c v_y \right) \right], \\ T = \int_A t_{xy} dA = kA \left(\lambda_x + v_x c + \frac{dv_y}{dx} + \rho^2 c \frac{d\lambda_y}{dx} \right), \\ M = \int_A \sigma_x y dA = A(L + 2k) \left[\rho^2 \frac{d\lambda_x}{dx} + \rho^2 c \frac{dv_x}{dx} - c \rho^2 \lambda_y \right] \end{cases}$$

restano anch'essi completamente determinati una volta note le quattro funzioni incognite.

Basta ora applicare, come già abbiamo mostrato nel caso generale di tre dimensioni, il principio di minimo del lavoro di deformazione per ottenere le quattro seguenti equazioni atte a determinare le quattro funzioni incognite:

$$\begin{aligned}
 & k\lambda_x - 2(L + 2k)\rho \frac{d\rho}{dx} \frac{d\lambda_x}{dx} - (L + 2k)\rho^2 \frac{d^2\lambda_x}{dx^2} + \rho^2 c(L + 3k) \frac{d\lambda_y}{dx} + \\
 & + ckv_x - (L + 2k)\rho^2 c \frac{d^2v_x}{dx^2} + k \frac{dv_y}{dx} = 0, \\
 & \rho^2 c(L + 3k) \frac{d\lambda_x}{dx} + (L + 2k)\lambda_y - 2\rho k \frac{d\rho}{dx} \frac{d\lambda_y}{dx} - k\rho^2 \frac{d^2\lambda_y}{dx^2} + \\
 (8) \quad & + L \frac{dv_x}{dx} - L v_y c - k\rho^2 c \frac{d^2v_y}{dx^2} = 0, \\
 & kc\lambda_x - (L + 2k)\rho^2 c \frac{d^2\lambda_x}{dx^2} - L \frac{d\lambda_y}{dx} - (L + 2k) \frac{dv_x}{dx^2} + \\
 & + (L + k)c \frac{dv_y}{dx} = 0, \\
 & k \frac{d\lambda_x}{dx} + Lc\lambda_y + \rho^2 ck \frac{d^2\lambda_y}{dx^2} + (L + 3k)c \frac{dv_x}{dx} + k \frac{d^2v_y}{dx^2} = 0.
 \end{aligned}$$

In queste equazioni figurano accanto alle quattro incognite $\lambda_x, \lambda_y, v_x, v_y$ la curvatura c della fibra media e il raggio d'inerzia ρ di una generica sezione normale (che in questo caso non è altro che lo spessore dell'arco diviso per $\sqrt{12}$), le quali sono ovviamente dati della questione e che noi supponiamo con tutta generalità funzioni della x . In linea qualitativa riterremo che ρc si possa trattare con una quantità del primo ordine e che ρ varii abbastanza gradualmente perchè risulti del primo ordine anche $\frac{d\rho}{dx}$.

Chimica. — *Studio del carbonio ottenuto per disidratazione di idrati di carbonio* ⁽¹⁾. Nota di G. R. LEVI ed A. BARONI presentata ⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

In una breve Nota alla « Zeitschrift für Krystallographie » ⁽³⁾ noi abbiamo comunicato l'ottobre u. s. la possibilità di distinguere i carboni ottenuti per disidratazione degli zuccheri ciclici (inosite e quebracite) da quelli preparati con gli zuccheri ordinari a catena aperta di atomi di carbonio (glucosio). Nostri precedenti tentativi utilizzando i raggi X non avevano permesso di riconoscere nettamente una differenza fra questi due tipi di prodotti. Era indispensabile per questa ricerca decomporre gli zuccheri in condizioni tali che non fosse possibile pensare ad una grafitazione o comunque ad un ingrossamento dei granuli per effetti successivi. Noi abbiamo preparato questi carboni decomponendo i corrispondenti idrati di carbonio a 200° con cloruro di zinco (10 parti) in presenza di acido cloridrico concentrato (una parte) aggiunto alla massa già calda per rendere più rapido il processo di carbonizzazione. L'esame coi raggi elettronici ha rilevato una netta differenza di struttura cristallina che appare evidente di tipo grafitico nei carboni derivati dall'inosite e quebracite, mentre il carbonio derivato dal glucosio non ha mostrato nette interferenze cristalline. Nel lavoro sopra citato sono riportati i fotogrammi comparativi ottenuti per questi tre prodotti. Questo risultato è, a nostro avviso, la prima dimostrazione sperimentale diretta della preesistenza di legami tipo grafitico, cioè di anelli esagonali, in questi composti, poichè non è logico pensare che in queste condizioni di preparazione il carbonio abbia subito uno spontaneo ingrossamento dei granuli cristallini, ipotesi che del resto, qualora fosse ammessa, dovrebbe applicarsi anche al glucosio date le condizioni sperimentali identiche di preparazione dei vari carboni.

Nel fascicolo di dicembre del « Journal Chem. Society », Balour e Riley ⁽⁴⁾ hanno iniziato uno studio sistematico sulla grafite che si richiama alle precedenti interessanti ricerche di Hoffmann e Frenzel ⁽⁵⁾ che coi raggi X hanno studiato il rigonfiamento (Quellung) della grafite durante la sua trasforma-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale e Chimica fisica della R. Università di Milano.

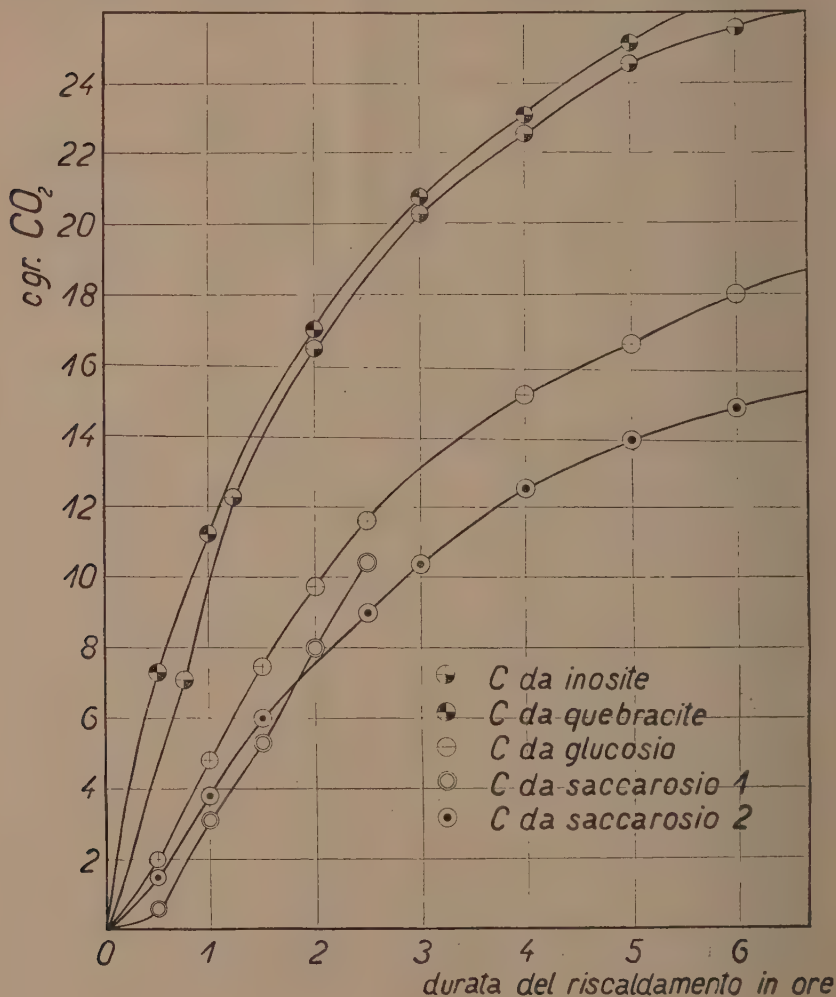
(2) Nella seduta del 15 marzo 1936.

(3) « Zeitschr. f. Kryst. », 93, 156, 1936.

(4) « Journ. Chem. Soc. », 1723, 1935.

(5) « Berichte », 63, 1248, 1930.

zione in acido grafítico più o meno idrato, rigonfiamento che avviene con l'accrescimento della distanza di determinati piani reticolari corrispondenti alla faccia (002). Noi avevamo già cercato di applicare il metodo di Hoffmann e Frenzel ai nostri carboni ottenuti dagli zuccheri, ma la facilità di ossidazione nelle condizioni necessarie per ottenere l'acido grafítico, anche abbassando



la temperatura di reazione fino a -30°C , non ci aveva permesso di ottenere nessun utile risultato. Balfour e Riley studiano l'ossidazione delle diverse forme di carbonio in condizioni più blande e cioè con una soluzione fosforica di acido cromatico, arrivando così alla conclusione che i carboni grafitici si

ossidano più facilmente di quelli pseudoamorfi in quanto che in questo processo prevale il fenomeno di rigonfiamento grafítico sull'azione di superficie; ciò può apparire a prima vista strano, ma le nostre ricerche hanno confermato i risultati di Balfour e Riley dimostrando quindi che il metodo di trasformazione in acido grafítico, quello dei raggi X e la misura delle altre proprietà fisiche, come ad es. la misura della conduttività elettrica, non presentano la stessa delicatezza di indagine dello studio della ossidabilità dei prodotti che viene invece a collimare coi risultati da noi ottenuti per mezzo dell'esame coi raggi elettronici.

Nel diagramma sopra riportato, in modo analogo agli Autori citati, noi abbiamo riportato i valori delle esperienze eseguite a 100° trattando 1 gr. circa delle varie qualità di carboni, con una soluzione di 20 gr. di bicromato di potassio in acido fosforico sciropposo di densità 1,70 e pesando la quantità di anidride carbonica ottenuta, in funzione del tempo, con una durata di ossidazione più lunga di quella dei precedenti Autori. Sono stati esaminati carboni ottenuti da glucosio, saccarosio, inosite, quebracite per carbonizzazione in presenza di cloruro di zinco col metodo sopra accennato e carbone ottenuto dal saccarosio per decomposizione termica.

L'ossidazione di carbonio ottenuto dal saccarosio per decomposizione termica è stata fatta per verificare l'ordine di grandezza dei nostri valori in accordo con quelli di Balfour e Riley e la curva corrispondente è contrassegnata col numero 1; quella corrispondente al carbonio da saccarosio ottenuto col metodo da noi usato per gli altri carboni e cioè con cloruro di zinco a 200°, ha mostrato un andamento analogo a quello del glucosio, ed è contrassegnata col numero 2.

Un andamento praticamente coincidente fra il oro, ma con una ossidabilità molto maggiore in relazione alla loro struttura grafítica, hanno mostrato i carboni ottenuti dalla inosite e dalla quebracite.

Sebbene appaia evidente, sia coi raggi elettronici che col metodo sopra indicato, la presenza di carbonio grafítico nei due campioni di carbonio ottenuti dagli zuccheri ciclici, non si può tuttavia affermare che il carbonio presente sia tutto sotto forma grafítica, anzi è verosimile pensare che nel processo pirogenico di formazione del carbonio parte dell'edificio molecolare si rompa con conseguente contemporanea formazione di carbonio pseudoamorfo. Questo modo di vedere è suffragato da un lato dalla presenza contemporanea nei fotogrammi elettronici di interferenze accompagnate dal caratteristico alone delle sostanze amorfe e dall'altro dal fatto che nella carbonizzazione con cloruro di zinco si svolge sempre una certa quantità di idrocarburi.

Chimica. — *Esame della cellulosa coi raggi di elettroni*⁽¹⁾.

Nota di G. NATTA e M. BACCAREDDA presentata⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

Già numerosi sperimentatori tentarono di esaminare la struttura di alcuni derivati della cellulosa coi raggi di elettroni approfittando della proprietà che essi manifestano di dare con grande facilità films di spessore estremamente piccolo, quale richiedono i metodi elettronici per trasparenza.

In una precedente Nota⁽³⁾ abbiamo dimostrato però che le interferenze che danno le films dei derivati della cellulosa per invecchiamento, ove non si usino particolari cautele, sono dovute a impurezze imponderabili di sostanze di natura grassa, che inquinano in strati di spessore mono- o bimolecolare la superficie del preparato. A tali impurezze si devono i fotogrammi a punti pubblicati da diversi noti sperimentatori⁽⁴⁾.

Solo impiegando speciali cautele siamo riusciti ad ottenere dei fotogrammi da lamine di derivati della cellulosa che non sono dovuti ad impurezze e che, a differenza dei fotogrammi ottenuti dai precedenti sperimentatori, non contrastano coi risultati röntgenografici.

Abbiamo esteso ora le nostre ricerche alla cellulosa non eterificata, per cercare di ottenere dei fotogrammi coi raggi E possibilmente più nitidi di quelli coi raggi X, allo scopo di completare gli incerti e contraddittori dati röntgenografici.

Tutti i tentativi fatti per ottenere fotogrammi da lamine sottili di cellulosa nativa, sia esaminando delle membrane epiteliali monocellulari, sia sezionando con microtomo dei preparati cellulosici, come ad es. midollo di sambuco, non raggiunsero lo scopo a causa dello spessore, ancora eccessivo, delle lamine esaminate. È necessario, infatti, per l'impiego dei metodi elettronici per trasparenza, ottenere delle films di spessore non superiore a qualche centomillesimo di centimetro.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Pavia.
(2) Nella seduta del 15 marzo 1936.

(3) G. NATTA, M. BACCAREDDA, R. RIGAMONTI, «Gazz. Chim. Ital.», 65, 182 (1935).

(4) G. P. THOMSON, «Proc. Roy. Soc. Lond.», 117, 607 (1928); E. TAYLOR JONES, «Philos. Mag.», 12, 641 (1931); F. KIRCHNER, «Naturwiss.», 19, 463 (1931); A. DAUVILLIER, «Compt. Rend.», 191, 708, 1441 (1931); J. J. TRILLAT, «Trans. Faraday Soc.», 29, 995 (1933); «Compt. Rend.», 198, 1025 (1934). Il dubbio che tali fotogrammi potessero esser dovuti a sostanze diverse da quelle in esame fu solo espresso da H. MARK e J. J. TRILLAT «Erg. d. techn. Röntgenkunde», 4 (1934), 70.

Per dissoluzione della cellulosa in solventi adatti e riprecipitazione è possibile ottenere delle lamine dello spessore desiderato, oppure anche denitrando delle lamine di collodio.

Nella maggior parte dei casi le lamine, anche se di spessore adatto, non diedero linee di interferenza ma solo bande molto sfumate. Solo per azione dell'acido cloridrico gassoso su lamine liquide di soluzione cupriammoniacale di cellulosa sopportate da reticelle di nichel fittissime (10.000 maglie per cmq.) e martellate si ottennero dei preparati di cellulosa che, purificati per lavaggio molto accurato prima con acido cloridrico diluito e poi con acqua, diedero alcune linee di interferenza.

I preparati così ottenuti, a causa della conduttività elettrica del supporto, si elettrizzano più difficilmente delle lamine di cellulosa di maggiori dimensioni e si prestano meglio all'esame coi raggi E. Difatti a fenomeni di elettrizzazione è dovuto, secondo noi, il fotogramma pubblicato da Trogus e collaboratori ⁽¹⁾.

Non tutti i tipi di cellulosa dopo dissoluzione nel liquido di Schweizer e riprecipitazione forniscono dei preparati capaci di dare buoni fotogrammi.

I migliori risultati si sono ottenuti per dissoluzione di cellulosa proveniente da fibre di canapa (*cannabis sativa*) elementarizzate con soluzione di soda caustica all'1 % alla pressione di 8 atmosfere, secondo il brevetto Natta-Gianoli ⁽²⁾.

È da notare che anche coi raggi X la canapa tesa, analogamente al ramie, fornisce dei fotogrammi migliori di quelli degli altri tipi di cellulosa, dovuti forse alla particolare disposizione rettilinea delle fibre.

Nella tabella I vengono esposti i risultati del calcolo di un fotogramma elettronico di cellulosa proveniente da canapa.

Le poche linee abbastanza forti ma allargate indicano che i germi cristallini sono molto piccoli o deformati e denotano l'orientamento bidimensionale delle cristalliti.

Le poche linee presenti si ordinano tutte per una struttura tetragonale con un indice eguale a zero (nella tabella sono indicati con p, q, r gli indici delle facce relative a questo ordinamento). Delle costanti reticolari che si ricavano, solo quella secondo l'asse b coinciderebbe con quella nota dall'esame röntgenografico per la cellulosa, mentre l'altra ($6,15 \text{ \AA}$) differisce notevolmente.

Soltanto eseguendo uno spostamento degli assi cristallografici in modo che la faccia (1 0 0) secondo il precedente ordinamento diventi la (1 0 1) rispetto ai nuovi assi, e fissando in modo adatto uno dei quattro parametri fondamentali (a, b, c, β) ed il volume della cella monoclinica che definisce la struttura della cellulosa, risultano per gli altri tre parametri dei valori

(1) C. TROGUS, H. HALBERSCHADT e K. HESS, «Naturwiss.», 18, 846 (1930).

(2) G. NATTA e M. GIANOLI, «Brev. Ital.», n. 410444 (1935).

che accordano con quelli röntgenografici ammessa una lieve mercerizzazione della cellulosa.

Per la cellulosa non mercerizzata Mark e Meyer infatti trovano⁽¹⁾:

$$a = 8,3 \quad b = 10,3 \quad c = 7,9 \quad \beta = 84^\circ.$$

Per quella mercerizzata Andress⁽²⁾ trova le seguenti costanti:

$$a = 9,1 \quad b = 10,3 \quad c = 8,1 \quad \beta = 62^\circ$$

alquanto diverse da quelle proposte quasi contemporaneamente da Burgeni e Kratly⁽³⁾:

$$a = 8,89 \quad b = 10,35 \quad c = 8,04 \quad \beta = 64,30^\circ.$$

Ammettendo $c = 8,00$ e $V = 672 \times 10^{-24}$ cc., ipotesi che risultano verosimili in quanto che in base ai risultati röntgenografici soprariferiti il volume V rimane lo stesso ($= 672 \times 10^{-24}$ cc.) mentre il valore di c varia di poco per effetto della mercerizzazione, risultano dal calcolo del nostro fotogramma coi raggi di elettroni $b = 10,30 \text{ \AA}$ $a = 8,25 \text{ \AA}$ e $\beta = 82^\circ$. Si deve tener presente che solo il valore $b = 10,30 \text{ \AA}$ è indipendente da ogni presupposto valore per le altre costanti e risulta quindi veramente sicuro. Appare quindi indubbio l'orientamento dell'asse b delle cristalliti nel piano della film ed inoltre appare molto probabile che il piano (101) si presenti normalmente al piano di queste, imponendo un orientamento bidimensionale alle cristalliti stesse.

Risultati analoghi riportati nella tabella II provengono dal calcolo di un fotogramma röntgenografico di un fascio di fibre di canapa elementarizzata leggermente teso, ottenuto disponendo l'asse del fascio normalmente alla direzione dei raggi X monocromatici.

In queste condizioni compaiono sul piano equatoriale le riflessioni dovute alle faccie che presentano un indice eguale a zero e precisamente quello relativo all'asse parallelo alla direzione delle catene cellulosiche ($k = 0$). Dette riflessioni possono portare alla determinazione univoca di tre delle costanti, ammesso per la costante b il valore di $10,3 \text{ \AA}$, che in base ai dati numerosi della letteratura ed ai fotogrammi elettronici risulta il parametro più sicuramente determinato, che si mantiene invariato nella massima parte dei derivati della cellulosa e che nel nostro caso viene confermato dal calcolo delle interferenze relative alle facce con $k = 1$ e $k = 2$.

Nel fotogramma compaiono riflessioni corrispondenti a facce dei tre tipi: (hOh), (hOh), (OOl), ed applicando quindi le tre relazioni che esprimono le rispettive costanti reticolari in funzione delle incognite a , c , e β , ne risulta un sistema di tre equazioni a tre incognite, che venne risolto.

(1) K. H. MEYER e H. MARK, «Ber.», 61, 593 (1928); H. MARK e K. H. MEYER, «Zeitschr. phys. Chem.», Abt. B, 2, 115 (1929).

(2) K. R. ANDRESS, «Zeitschr. phys. Chem.», Abt. B, 4, 190 (1929).

(3) A. BURGENTI e D. KRATLY, «Zeitschr. phys. Chem.», Abt. B, 4, 401 (1929).

TABELLA I.

Fotogramma coi raggi E di cellulosa da soluzione cupriammoniacale di canapa elementarizzata $\lambda = 0.0474 \text{ \AA}$. Distanza preparato-lastra mm 420.

I. Oss.	diam. cerchi (mm)	d	p q r	$d_{\text{TOT}} (b/d_{\text{TOT}} = 1.68)$	h k l	b
md	6.45	6.172	1 0 0	6.17	1 0 1	10.27
f	15.00	2.653	2 2 0	6.17	2 2 2	10.29
ff	25.90	1.537	4 0 0	6.15	4 0 4	10.24
dd	30.00	1.327	4 4 0	6.11	4 4 4	10.32
d	38.80	1.026	6 0 0	6.15	6 0 6	10.26

TABELLA II.

Fotogramma coi raggi X di fibre di canapa elementarizzata Fe anticatodo.

Int.	oss. $\theta/2$	d	h k l	b
------	-----------------	---	-------	---

Interferenze sul piano equatoriale ($k = 0$)

m	$9^{\circ}00'$	6.178	1 0 1	10.05
md	$10^{\circ}05'$	5.473	1 0 $\bar{1}$	10.22
m	$12^{\circ}40'$	3.997	3 0 2	10.31
ff	$14^{\circ}00'$	3.996	0 0 2	10.31
d	$20^{\circ}30'$	2.761	2 0 $\bar{2}$	10.32
d	$29^{\circ}00'$	1.995	0 0 4	10.29

Interferenze ad indice $k = 1$

md	$20^{\circ}30'$	2.761	3 1 0	10.28
----	-----------------	-------	-------	-------

Interferenze ad indice $k = 2$

md	$12^{\circ}35'$	4.420	1 2 0	10.28
----	-----------------	-------	-------	-------

Paragoniamo i risultati così ottenuti con quelli risultanti dai fotogrammi coi raggi E in base all'ipotesi predette:

Fotogramma coi raggi X di canapa tesa secondo l'asse delle fibre.		Fotogramma coi raggi E di lamine sottili esaminate per trasparenza.	
a	8,60		8,25
b	10,30		10,30
c	8,07		8,00
β	82°		82°
		$V = 672$	

I valori in corsivo nel precedente specchietto corrispondono a quelli introdotti come noti pel calcolo dei rimanenti.

Se paragoniamo questi risultati con quelli di Mark e Meyer per la cellulosa nativa e con quelli di Andress o di Burgeni e Kratly per la cellulosa mercerizzata, risulta che tanto la canapa elementarizzata con soluzione di soda all'1% alla pressione di 8 atmosfere, quanto quella proveniente dalla precipitazione di canapa disciolta nel liquido cupriammoniacale ed essicata nel vuoto catodico, presentano costanti reticolari simili ed intermedie a quelle della cellulosa nativa e di quella mercerizzata, ma molto più vicine a quelle della prima.

Dato che Herzog⁽¹⁾ osservò che la cellulosa precipitata dalle soluzioni nel liquido di Schweizer fornisce fotogrammi identici a quelli della cellulosa mercerizzata coi comuni metodi, così si dev'è ritenere che il processo di essicamento molto spinto che ha luogo nel vuoto catodico porti nelle lamine sottili ad una retrocessione del processo di mercerizzazione. Ciò conferma il risultato di Centola⁽²⁾ sulla reversibilità del processo di mercerizzazione, ottenuto per altra via, e dimostra che la cellulosa mercerizzata deve la sua struttura al suo stato di maggiore solvatazione.

Conclusioni. — All'esame röntgenografico la cellulosa proveniente dalle fibre di canapa (*cannabis sativa*) per elementarizzazione con una soluzione di soda caustica all'1% ad 8 atmosfere, presenta le seguenti costanti reticolari: $a = 8,60$, $b = 10,30$, $c = 8,07 \text{ \AA}$, $\beta = 82^\circ$, denotando una leggerissima deformazione del reticolo noto per la cellulosa verso quello della cellulosa mercerizzata.

All'esame coi raggi di elettroni le cristalliti di cellulosa nelle lamine sottili, ottenute per precipitazione di soluzioni di fibre di canapa elementarizzata come sopra nel liquido di Schweizer ed essicate nel vuoto catodico, risultano orientate in modo tale che il piano (101) si trova ad essere normale al piano delle lamine e l'asse b ad essere contenuto in quest'ultimo. La costante b risulta $10,3 \text{ \AA}$ ed, ammesso $c = 8,00$ e V (volume della cella elementare) $= 672 \times 10^{-24} \text{ cc.}$, a risulta eguale ad $8,25 \text{ \AA}$, β a 82° .

(1) R. HERZOG, «Naturwiss.», 12, 955 (1924).

(2) G. CENTOLA, «Gazz. Chim. Ital.», 65, 1015 (1935).

Geologia. — *Intorno all'età di alcune formazioni dell'Appennino.* Nota di P. PRINCIPI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. A. PELLOUX.

Una recente memoria di Rolf B. Behrmann sulla orogenesi e sullo sviluppo paleogeografico dell'Appennino ⁽²⁾ costituisce un interessante tentativo di sintesi geologica della nostra penisola. Mentre de Wijkerslooth ⁽³⁾ ha ritenuto di poter applicare a tutta la regione italiana la teoria delle grandi falde di ricoprimento, basandosi in gran parte su concetti ipotetici, il Behrmann, invece, ammette una struttura a falde solo nell'Appennino settentrionale, dove la serie delle Liguridi, costituita essenzialmente da argille scagliose ofiolitifere e calcari marnosi, sarebbe stata spinta verso est sopra la serie autoctona delle Toscanidi e nella Calabria, dove la serie delle Calabridi, sollecitata verso NO, avrebbe ricoperto i calcari mesozoici della Lucania e della Campania. L'Appennino centrale umbro-marchigiano, gli Abruzzi ed il Molise rappresenterebbero tre zolle autoctone, piegate, fagliate ed interessate in alcuni punti da strutture embriate o da accavalcamenti di importanza puramente locale.

La assenza di vere falde di ricoprimento nell'Appennino umbro-marchigiano ed abruzzese risulta anche dalle mie ricerche eseguite sulle regioni suddette. La sovrapposizione del calcare massiccio del Lias inferiore sul calcare rosato del Cretaceo superiore dei Monti spoletini e folignati è la conseguenza del rovesciamento di un'anticlinale, spezzatasi, poi, bruscamente secondo un piano parallelo al suo asse orizzontale: lo spostamento secondo questa superficie di rottura fu tale, che il fianco normale venne spinto più in avanti sul fianco rovesciato, per cui gli strati inferiori del primo andarono a sovrapporsi sugli strati più giovani del secondo.

Anche le anormali sovrapposizioni, che io ho osservato nei Monti della Maiella e del Morrone, nelle valli del Sagittario e del Gioenco e nei dintorni di Antròdoco, non sono in relazione a grandi falde, ma a lembi di calcari mesozoici staccatisi dal fianco normale di pieghe fortemente inclinate, i quali hanno slittato e scivolato sui calcari dell'Eocene o anche sulle rocce del Miocene, originando così una particolare struttura a scaglie, assai frequente soprattutto negli Abruzzi meridionali, nella valle Latina e nella Lucania.

(1) Nella seduta del 15 marzo 1936.

(2) R. B. BEHRMANN, *Die Faltenbögen des Apennins und ihre paläogeographische Entwicklung*. « Abhandl. d. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen », Math.-Phys. Kl., III folge, heft 15. Berlin, 1936.

(3) P. DE WIJKERSLOOTH, *Bau und Entwicklung des Apennins, besonders der Gebirge Toskanas*. Amsterdam, 1934.

Secondo Behrmann la falda delle Liguridi, che comprende una serie di sedimenti estendentisi dal Giurassico sino al Bartoniano, è costituita nella sua zona interna da una formazione ofiolitica, sulla quale si sovrappongono calcari marmosi e flysch argilloso, mentre nella sua zona esterna comprende, dal basso verso l'alto, argille variegata, calcari marnosi e flysch argilloso.

Questa falda corrisponde al cosiddetto flysch argilloso-calcareo (argille scagliose ofiolitifere e calcari marnosi a Fucoidi), che io ritengo costituire una serie comprensiva, che dal Cretaceo giunge sino all'Eocene e forse anche all'Oligocene ed eteropica di una gran parte della scaglia cinerea e della scaglia rosata dell'Appennino centrale⁽¹⁾. In essa io ho distinto due livelli di flysch calcareo: uno appartenente all'Eocene inferiore-medio e comprendente gli affioramenti del Monte Carpegna, di Badia Tedalda e dei dintorni del Monte Fumaiolo e l'altro all'Eocene superiore, a cui ho riferito i calcari marnosi di Pieve S. Stefano e di Borgo Sansepolcro. Il riferimento dei calcari del Monte Carpegna all'Eocene inferiore-medio ha avuto una sicura conferma, avendo in essi il Behrmann riscontrato *Nummulites Guettardi* D'Arch., *N. subexilis* Douv., *N. lucasani* Defr., *N. subatacicus* Douv.

Una notevole divergenza si ha a proposito dell'età dei calcari marnosi affioranti nei dintorni della Pieve S. Stefano e di Borgo Sansepolcro, da me riferiti, come ho già sopra ricordato, all'Eocene superiore e dal Behrmann considerati oligocenici, distinti perciò dagli altri calcari della falda liguride e appartenenti ad una posttettonica terziaria. Il Behrmann è condotto a tale riferimento, ritenendo che i calcari marnosi in questione siano per lo più trasgressivi sul flysch argilloso liguride mediante l'interposizione di un conglomerato costituito da frammenti di rocce verdi, di radiolariti e di calcari a *Calpionella*. Particolarmente evidente sarebbe la trasgressione di questo Oligocene sulle serpentinite liguride del Monte Murlo a Sud di Pieve S. Stefano. Secondo le mie osservazioni, invece, le serpentinite del M. Murlo appaiono sovrastanti ai calcari marnosi del Poggio Stantino e le brecce serpentinosi, accompagnate anche da zone di serpentina arenizzata, che si riscontrano presso il contatto dei calcari, rappresentano non un conglomerato di sedimentazione, ma l'effetto meccanico degli intensi spostamenti subiti dalle argille scagliose, per cui le rocce ofiolitiche in esse imballate furono scompaginate, laminate e assoggettate ad una vera e propria triturazione⁽²⁾.

L'ipotesi che la formazione ofiolitica e le argille scagliose rappresentino una grande coltre di ricoprimento sovrappostasi ai sedimenti autoctoni delle Toscanidi è basata specialmente sul fatto che l'arenaria macigno dell'Appennino apparisce spesso immergersi al di sotto del flysch ofiolitico.

(1) P. PRINCIPI, *Intorno all'età della scaglia cinerea dell'Appennino centrale*. « Rend. R. Accademia dei Lincei ». Roma, 1933.

(2) P. PRINCIPI, *Relazione sul rilevamento geologico del quadrante al 50.000 "Sansepolcro" appartenente al foglio 115 della Carta d'Italia*. « Boll. R. Ufficio Geologico d'Italia », LIV, 1929.

Behrmann, inoltre descrive la cosiddetta finestra della Val Parma, lungo i margini della quale il Paleogene delle Toscanidi risulta sottostante alla formazione argillosa. A me, però, sembra che non si possa escludere come tali ricoprimenti siano la conseguenza di un fenomeno avente una estensione assai più limitata. La potente formazione argillosa per la sua notevole plasticità, sotto la spinta delle pressioni tangenziali, poté dare facilmente origine a pieghe rovesciate, talora anche accatastate e stirate sino a suddividersi in vari lembi, che per successivi movimenti di carattere diapirico riuscirono ad intrudersi verso l'alto, scompaginando alla loro volta la serie stratigrafica soprastante e a schiacciarsi in ventaglio al di sopra degli strati più recenti. Ciò può spiegare come il flysch ofiolitifero ricopra spesso le arenarie del Paleogene o anche quelle del Miocene e come le serpentine, i calcari marnosi eocenici e le arenarie si trovino talvolta in un assetto tale da apparire dei lembi giustapposti.

Gli affioramenti di argille scagliose, che si riscontrano nell'Umbria settentrionale tra la valle del torrente Assino e quella del torrente Carpina⁽¹⁾ e nell'alta valle del Savio ad est e a NE di S. Piero in Bagno, dimostrano in modo evidente come esse non fanno parte di vere e proprie pieghe, ma che, in seguito a fenomeni diapirici, si sono incuneate entro discontinuità degli strati miocenici, in modo da sembrare talora interstratificate fra le marne langhiane o anche da riuscire a traboccare al di sopra di queste.

Il Behrmann fa passare il margine ipotetico della fronte della coltre liguride in corrispondenza degli ultimi lembi di argille scagliose affioranti verso Est nel tratto compreso tra Candeggio a SE di Città di Castello e i contigui territori di Gubbio e di Umbertide, concludendo che la falda delle Liguridi non ha oltrepassato l'Appennino centrale. Ma il non trovar più nessun affioramento di argille scagliose ad Est della linea, che, secondo il Behrmann rappresenterebbe l'estremo limite raggiunto dalle Liguridi, potrebbe dipendere, secondo i concetti da me altra volta esposti, dal fatto che il flysch argilloso viene sostituito dalla scaglia mesozoica e terziaria.

Il Behrmann attribuisce all'Eocene superiore le arenarie della catena del Cimone, dell'Alpe di Catenaia, del Monte Favalto e dei Monti ad est e a sud del Trasimeno, le quali sono state da me collocate nell'Oligocene per la presenza in esse di lenti calcaree includenti una fauna costituita da scarse Nummuliti e Ortofragmine e da abbondanti Lepidocicline, ritenendo egli che le Lepidocicline siano comparse prima dell'Oligocene e che le Ortofragmine siano ristrette all'Eocene.

Se anche in alcune regioni mediterranee, come nell'Africa settentrionale, le Lepidocicline possono avere fatto la comparsa nell'Eocene superiore, nulla autorizza ad asserire che le Ortofragmine, specialmente le forme raggiate

(1) P. PRINCIPI, *Intorno ad alcuni affioramenti di argille scagliose nell'Umbria settentrionale*. «Rend. R. Accademia dei Lincei». Roma, 1929.

degli *Asterodiscus* (*stella*, *Taramellii*), che sono appunto quelle, che si riscontrano associate alle Lepidocycline nelle arenarie dell'Italia centrale, abbiano cessato di esistere alla fine dell'Eocene.

Ma, inoltre, è necessario considerare nel suo insieme la fauna di Foraminiferi segnalata nelle lenti calcaree intercalate nelle arenarie in questione. Osserviamo, innanzitutto, che essa è caratterizzata da numerose forme di Lepidocycline (*Lepidocyclina sumatrensis* Lem. e Douv., *L. Morgani* L. e D., *L. dilatata* Mich., *L. Tournoueri* Lem., *L. Raulini* L. e D.), mentre le Ortofragmine e le Nummuliti si riducono a poche specie (*Nummulites Boucheri* de la Harpe, *N. vascus* J. e L., *N. budensis* Hantk.) rappresentate da un numero assai esiguo di individui.

Il *Nummulites Boucheri* è presente nell'Oligocene inferiore della Stiria ed il *Nummulites vascus* è stato riscontrato nell'Auversiano-Bartoniano del NO della Corsica, non associato a Lepidocycline, mentre insieme a queste ultime forme trovasi nel Cattiano del Vicentino (strati inferiori di Schio) e nel Rupeliano di Castelgomberto. La coppia *Nummulites Boucheri*-*N. vascus* è presente nel Priaboniano del Siebenburg e di Priabona, ma senza Lepidocycline, mentre è accompagnata da queste nel Cattiano del Piemonte e della Liguria. Secondo Boussac la coppia *Nummulites Boucheri*-*N. vascus*, associata a Lepidocycline, sarebbe senz'altro caratteristica del Cattiano, quantunque si possa riscontrare anche nel Rupeliano associata all'altra coppia *Nummulites Bouillei*-*N. Tournoueri*. Infine il *Nummulites budensis* è una specie, che, se si trova anche nell'Eocene, è frequente soprattutto nell'Oligocene.

Ci troviamo, quindi, dinnanzi ad una fauna, che è contraddistinta da rare Nummuliti, che si riscontrano in gran prevalenza nell'Oligocene e da abbondanti Lepidocycline, che ordinariamente mancano nei giacimenti di sicura età eocenica. Infatti nell'Appennino gli strati appartenenti con certezza all'Eocene superiore, come ad esempio quelli dei dintorni di Firenze, se includono talora il *Nummulites budensis* ed il *Nummulites Boucheri*, non rivelano alcuna traccia di Lepidocycline. Tale fauna, adunque, mentre si ricollega per alcuni caratteri — quali l'abbondanza delle Lepidocycline unite a forme di *Operculina*, *Miogypsina*, *Amphistegina* — al Miocene, per altri tratti si avvicina all'Eocene ed è quindi logicamente riferibile ad un periodo intermedio, quale è l'Oligocene.

Secondo il mio parere risulta in modo assai evidente come nell'Appennino settentrionale e centrale gli strati di sicura età eocenica non contengono mai Lepidocycline e che si può affermare come tali Foraminiferi siano penetrati in questi territori solamente all'inizio del periodo oligocenico.

Fisiologia. — *Fenomeni di ossido-riduzione e stati di attività funzionale del neurasse*⁽¹⁾. Nota di M. MITOLO, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sebbene la dottrina delle ossido-riduzioni abbia avuto largo sviluppo e sia stata feconda di interpretazioni e di applicazioni nello studio della respirazione interna e del metabolismo intermedio dei tessuti, non sono numerosi, a tutt'oggi, i dati sperimentali sull'andamento dei processi ossido-riduttivi in rapporto ai diversi stati funzionali di un tessuto o di un organo. Accenni alla soluzione del problema si trovano nei lavori di Lipschitz e Collaboratori (3), i quali, con esperimenti eseguiti soltanto *in vitro*, hanno studiato la riduzione di nitrocomposti (particolarmente del m-dinitrobenzolo) operata da poltiglie di tessuti, in diverse condizioni sperimentali. Risultò dalle ricerche degli AA. che la riduzione del m-dinitrobenzolo a m-nitrofenilidrossilammina è legata alla respirazione cellulare; tutte le condizioni che tendono a far aumentare l'intensità dei processi respiratori della cellula elevano pure l'intensità e la velocità di riduzione del nitrocomposto, e viceversa i narcotici, l'acido cianidrico e gli altri mezzi atti a ridurre la respirazione cellulare inibiscono la riduzione del m-dinitrobenzolo (Lipschitz e Gottschalk (4)). Secondo Comel (5), la riduzione del nitrocomposto, operata da poltiglie di muscoli di rana, è una funzione della concentrazione degli idrogenioni del mezzo ambiente, nel senso che si attenua con l'abbassarsi del pH, rispetto all'*optimum* che si riscontra vicino alla neutralità; se è vero che il ricambio gassoso dei tessuti ha analogo comportamento, non si può dire, tuttavia, che vi sia esatto parallelismo, per cui la riduzione del m-dinitrobenzolo deve essere considerata soltanto come un mezzo di orientamento intorno ai processi respiratori tessutari. A prescindere dalla considerazione che queste esperienze *in vitro* possano solo fino a un certo punto avere attinenza con i fenomeni dell'attività funzionale degli organi, non è da trascurare l'azione propria dei nitrocomposti sulle cellule e sulla loro respirazione interna, soprattutto l'azione tossica della sostanza derivata dal processo di riduzione (ad esempio, la m-nitrofenilidrossilammina). Tanto per stare nel campo dei fenomeni ossido-riduttivi del sistema nervoso centrale, a cui si riferisce questa Nota, ricorderò che Winterstein (6) ha già dimostrato come la sostituzione dell'ossigeno con accettori d'idrogeno (blu di metilene, m-dinitrobenzolo, chinone) non riesce a conservare nè l'eccitabilità riflessa al midollo spinale isolato di rana, nè il suo normale scambio gassoso respiratorio; anche dopo asfissia dei centri, gli accettori di idrogeno non possono sostituire l'ossigeno nella sua funzione respiratoria.

Con la stessa tecnica di Lipschitz, recentemente Testa (7) ha studiato l'andamento dei processi deidrogenativi in poltiglie di tessuto renale prelevato da animali in condizioni

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Cagliari.

(2) Nella seduta del 1° marzo 1935.

(3) W. LIPSCHITZ, «Zeitschr. f. physiol. Chem.», CIX, 189, 1920; G. HERTWIG e W. LIPSCHITZ, «Pflüger's Arch. f. d. ges. Physiol.», CLXXXIII, 274, 1920.

(4) W. LIPSCHITZ e A. GOTTSCHALK, «Pflüger's Arch. f. d. ges. Physiol.», CXCI, I, 1921.

(5) M. COMEL, «Arch. di Scienze Biol.», XIII, 158, 1929.

(6) H. WINTERSTEIN, «Pflüger's Arch. f. d. ges. Physiol.», CXCVIII, 504, 1923.

(7) C. TESTA, «Riv. di Patologia sperimentale», N. S., V, 59, 1936.

normali, e, comparativamente, da animali trattati con diuretici; l'A. ha visto che, eccitando la funzione del rene con i diuretici, i processi deidrogenativi aumentano nell'organo, sebbene in vario grado; invece l'azione antidiuretica degli estratti di lobo posteriore ipofisario non modifica la normale attività deidrogenativa del rene. Agendo direttamente sulla innervazione renale (stimolazione faradica del tronco dei vaghi al collo, impiego di farmaci vagotropi; oppure taglio e congelamento dei vaghi al collo, atropinizzazione totale, denervazione dei peduncoli renali) Martini, Bonsignore e Pinotti (1) hanno riscontrato nei cani che l'eccitamento del vago tende a far aumentare il potere riducente dell'urina (ritenuto come espressione della capacità di riduzione del rene stesso), e che tale aumento appare indipendente dall'effetto diuretico; al contrario, la paralisi vagale tende a far diminuire l'attività riducente dell'urina e quindi dell'apparato renale.

Quest'azione del sistema parasimpatico sul potere riducente dei tessuti sembra essere di ordine generale. In realtà, secondo Harris e Beznak (2), nei surreni e nel fegato di gatti, cani e cavie non si osservano variazioni della proprietà riducente nè dopo stimolazione, nè dopo taglio del simpatico, nè dopo perfusione di detti organi con liquidi contenenti adrenalina o acetilcolina; per cui gli A.A. hanno concluso che tale potere riducente non è influenzato dal sistema nervoso autonomo. Invece Copello (3), se non ha ottenuto modificazioni apprezzabili per i surreni di cavia in seguito alla somministrazione di sostanze parasimpaticotrope, impiegando gli stessi farmaci parasimpaticomimetici ha notato aumento del potere riducente del fegato, ed al contrario diminuzione per la paralisi del parasimpatico. Già Longo (4) aveva segnalato diminuzione delle proprietà riducenti del fegato per effetto del taglio del vago al collo. Secondo Bonsignore (5), la intensa illuminazione dell'occhio (che provoca miosi per eccitamento delle fibre parasimpatiche del nervo oculomotore comune) e l'istillazione, nell'occhio, di soluzioni di farmaci parasimpaticotropi fanno aumentare la capacità riducente dell'umor acqueo, mentre tale effetto manca o si inverte nell'occhio atropinizzato.

Per quanto riguarda il sistema nervoso centrale, le prime ricerche di Ehrlich (6) provarono che, con la stimolazione elettrica ed in presenza di sostanze coloranti capaci di agire da accettori d'idrogeno, si svela, già *intra vitam*, nella sostanza grigia della corteccia cerebrale, un potere di riduzione, dimostrato dallo scolorimento delle stesse sostanze coloranti nello spessore della corteccia, tutt'attorno all'elettrodo. Herter (7), poi, iniettando blu di metilene per via endovenosa, vide che la corteccia cerebrale di coniglio, mentre nell'animale normale resta incolora, appare tinta più o meno nettamente in blu nell'animale raffreddato (fino ad una temperatura rettale di 30-32° C.); la stessa cosa avviene per la corteccia di gatto, narcotizzato con etere etilico, come effetto della diminuzione dei processi ossido-riduttivi, operata dal raffreddamento e dalla narcosi.

(1) E. MARTINI, A. BONSIGNORE e F. PINOTTI, « Boll. Soc. Ital. Biol. sperim. », X, 471, 1935.

(2) Z. HARRIS e A. BEZNAK, « 4 Tag. d. Ungar. Gesellsch. ». Budapest, 1934 (rif. in « Ber. ü. d. ges. Physiol. », LXXXI, 567, 1935).

(3) F. COPELLO, « Boll. Soc. Ital. Biol. sperim. », X, 509, 1935.

(4) V. LONGO, « Bioch. e Terap. sperim. », XX, 333, 1933.

(5) A. BONSIGNORE, « Boll. Soc. Ital. Biol. sperim. », X, 62, 505, 1935.

(6) P. EHRLICH, *Das Sauerstoffbedürfnis des Organismus*. Berlino, 1885.

(7) C. A. HERTER, « Zeitschr. f. physiol. Chem. », XLII, 493, 1904.

Al di fuori di queste osservazioni accidentali di Ehrlich e di Herter, non ho trovato nella letteratura altri cenni sulle variazioni del potere riducente del tessuto nervoso centrale in rapporto a modificazioni del suo stato funzionale. Ho voluto pertanto indagare se l'esaltamento dell'eccitabilità riflessa centrale, e rispettivamente la sua attenuazione, portassero a paralleli cambiamenti della normale capacità di ridurre, in mezzo acido, l'indicatore di ossido-riduzione 2:6- diclorofenoloindofenolo, capacità che, giusta mie precedenti ricerche⁽¹⁾, risulta possedere in alto grado il tessuto nervoso, nelle sue diverse parti. Ho sperimentato su rospi e ratti albin (tutti di sesso maschile), cui si induceva abnorme aumento dell'eccitabilità riflessa mediante iniezione sottocutanea di 0,5 cc. (per ciascun rospo) o 1 cc. (per ogni ratto) di sol. di nitrato di stricnina all'1%, oppure di 2 cc. di sol. di acido fenico all'1% (per ciascun rospo); attendevo la comparsa e lo sviluppo del quadro dell'intossicazione acuta stricnicina (tetani) o fenolica (cloni), indi prelevavo rapidamente dall'animale tutto il neurasse, previa apertura dello speco vertebrale e della cavità cranica, badando di non ledere nell'operazione la sostanza nervosa. Alcuni ratti sono stati iniettati con 1 cc. di sol. di bromuro di potassio al 25%, al mattino, e sacrificati nelle prime ore del pomeriggio, quand'era chiaramente dimostrabile una diminuzione dell'eccitabilità riflessa degli animali; anche da questi si prelevava tutto il tessuto nervoso centrale. Neurassi di controllo sono stati prelevati da rospi e ratti in condizioni normali, sacrificati mediante rapida compressione alla nuca. Poichè la quantità di sostanza nervosa di ciascun rospo è assai scarsa per poterne indagare il potere riducente, per ogni determinazione ho mescolato insieme sei neurassi di *Bufo vulgaris*. Il peso dei ratti bianchi ha oscillato tra 81 e 150 gr. Anche in queste ricerche, come nelle precedenti sulla presenza e distribuzione di alcune sostanze riducenti nel neurasse, ho impiegato il micrometodo di Birch, Harris e Ray⁽²⁾, basato sulla riduzione, in mezzo acido, del 2:6- diclorofenoloindofenolo; tale procedimento, applicato al tessuto nervoso, può esprimere, anche con dati quantitativi, il potere riducente di cui sono forniti gli estratti acquosi acidi del tessuto. Nella tabella detto potere riducente è quantitativamente indicato dal numero dei cc. della soluzione 1:10000 di indicatore scolorati (ridotti) da 1 gr. di tessuto nervoso fresco. Le esperienze sono state fatte nel mese di febbraio di quest'anno. I risultati ottenuti per i ratti sono stati divisi in due gruppi, in rapporto al peso, e quindi all'età dell'animale, poichè Plaut e Bülow⁽³⁾ hanno recentemente visto che il tessuto nervoso di animali giovani è più ricco di sostanze riducenti di quello degli adulti; pertanto ho separato i valori ricavati da ratti il cui peso corporeo oscillava da 81 a 105 gr., da quelli ottenuti da ratti del peso di 117-150 gr.

(1) M. MITOLO, «Questi Rendiconti», XXII, ser. 6ª, 2º sem., 359, 1935.

(2) T. W. BIRCH, L. J. HARRIS e S. N. RAY. «Biochem. Journ.», XXVII, 590, 1933.

(3) F. PLAUT e M. BUELOW, «Z. Neurol.», CLII, 84, 1935.

TABELLA I.
Neurassi di rospi ♂

Controlli	Dopo trattamento con stricnina	Dopo trattamento con acido fenico
1 gr. di sostanza nervosa fresca scolara cc. di indicatore		
5,49	5,96	5,92
5,63	6,00	5,86
4,57	5,93	5,89
5,39	5,98	—
—	6,20	—
Media 5,27	6,01	5,89
Differenza —	+ 0,74	+ 0,62

TABELLA II.
Neurassi di ratti albini ♂

Ratto	Peso del ratto gr.	Controlli	Dopo trattamento con stricnina
n°.	1 gr. di sostanza nervosa fresca scolara cc. di indicatore		
1	105	4,55	—
2*	81	—	5,90
3	89	—	5,45
4	85	4,57	—
5	90	4,78	—
6	95	—	5,34
7	85	—	5,86
8	87	—	6,26
9	95	5,10	—
Media —	—	4,75	5,76
Differenza —	—	—	+ 1,01

(*) ratto surrenoprivo.

TABELLA III.
Neurassi di ratti albiu ♂

Ratto	Peso del ratto gr.	Controlli	Dopo trattamento con stricnina	Dopo trattamento con bromuro di potassio
n°.	1 gr. di sostanza nervosa fresca scolora cc. di indicatore			
1	119	4,61	—	—
2	126	—	4,96	—
3*	143	—	4,91	—
4	137	—	5,29	—
5	122	4,46	—	—
6	117	—	—	4,20
7	135	—	—	4,46
8	150	4,47	—	—
9	150	—	—	4,04
10	130	—	—	4,15
Media —	—	4,51	5,05	4,21
Differenza —	—	—	+ 0,54	— 0,30

* ratto surrenoprivo.

Le cifre esprimonti il potere riduttore di 1 gr. di sostanza nervosa fresca di rospi e ratti normali, sebbene concordanti fra loro, sono un po' più basse di quelle da me trovate nei precedenti dosaggi ⁽¹⁾ eseguiti a Roma nel mese di maggio dell'anno scorso, impiegando la medesima tecnica; senza voler invocare un fattore stagionale che, specialmente per il rospo, potrebbe essere ben chiamato in causa (per analogia con le variazioni di altri fenomeni biochimici di questa specie animale, in rapporto all'epoca annuale dell'esperimento), forse la diversa ricchezza in sostanze riducenti del neurasse dipende dai differenti ceppi di rospi e ratti adoperati nelle presenti ricerche o dalle differenti condizioni ambientali e di alimentazione. Ciò premesso, i risultati che mi sembra si possano ricavare dalle tabelle sono i seguenti:

Per i neurassi di rospo, il normale valore medio di riduzione di 5,27 sale a 5,81 e a 6,01 per l'abnorme aumento della eccitabilità riflessa cau-

(1) Loc. cit.

sato da due tipici veleni convulsivanti centrali, l'acido fenico e la stricnina. Per i neurassi di ratto, la stricninizzazione generale porta le cifre medie di riduzione da 4,75-4,51 rispettivamente a 5,76-5,05; viceversa la depressione dell'eccitabilità riflessa centrale, indotta dal bromuro di potassio, abbassa il valore medio da 4,51 a 4,21.

Farò incidentalmente notare che il ratto n. 2 della prima serie e il ratto n. 3 della seconda serie sono stati privati delle capsule surrenali pochi minuti prima dell'iniezione di stricnina; ho eseguito tale operazione perchè alcuni farmacologi⁽¹⁾ sostengono che nel corso dell'avvelenamento da stricnina si ha aumento di increzione adrenalinica da parte dei surreni. Ora, l'adrenalina è una delle sostanze svelate dall'indicatore di ossido-riduzione da me adoperato; si sarebbe, quindi, potuto sospettare che le più alte cifre di riduzione, trovate negli estratti del neurasse, non fossero dovute all'aumento dell'eccitabilità riflessa centrale, ma ad un più elevato tenore di adrenalina nel tessuto nervoso. Che ciò non sia è dimostrato dal fatto che valori alti di riduzione si hanno anche per neurassi di animali prima surrenalectomizzati bilateralmente, indi stricninizzati.

Talchè si può trarre la conclusione che uno stato abnorme di ipereccitabilità riflessa del neurasse (di rospo e di ratto) si accompagna ad aumento della capacità che il tessuto nervoso centrale possiede di ridurre l'indicatore 2:6- diclorofenoloindofenolo, in mezzo acido; mentre uno stato di depressione dell'eccitabilità riflessa centrale va di pari passo con l'attenuazione dello stesso potere riducente.

Poichè un certo parallelismo esiste tra intensità del ricambio gasoso e del metabolismo materiale da una parte e fenomeni di ossido-riduzione cellulare dall'altra, mi pare che il comportamento del potere riducente dei neurassi per effetto di una maggiore o minore eccitabilità riflessa trovi rispondenza nell'analogo andamento generale dei processi metabolici e della respirazione interna del tessuto nervoso, in precedenza studiato da vari autori (Baglioni, Winterstein, Gayda, Mitolo ecc.) nei diversi stati di attività funzionale del sistema nervoso centrale.

(1) Cfr. E. ZUNZ, *Éléments de Pharmacodynamie spéciale*, to. 1, 297. Parigi, 1932.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 5 aprile 1936 Anno (XIV)

Presidenza del prof. F. MILLOSEVICH.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *La proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari e le curve infinitamente vicine.* Nota⁽¹⁾ del Socio F. ENRIQUES.

1. Sopra una superficie algebrica irregolare, di generi, geometrico e numerico, p_g e p_a ($p_g > p_a$), un sistema lineare regolare $|C|$ di curve, di genere π , di grado n e di dimensione $r = p_a + n - \pi + 1$, è contenuto in un sistema continuo $\{C\}$ di dimensione $p_g + n - \pi + 1$, costituito di $\infty^{p_g - p_a}$ sistemi lineari disequivalenti; la serie caratteristica del sistema lineare essendo non completa, di deficienza $p_g - p_a$, mentre la serie caratteristica del sistema continuo riesce completa.

Questa proprietà caratteristica delle superficie irregolari, è stata da me dedotta dal computo delle curve infinitamente vicine ad una C , mostrando appunto che vi è una curva siffatta che passa per ciascun gruppo della serie caratteristica di $\{C\}$. La dimostrazione così indicata in una Nota dell'Accademia di Bologna del 1904, fu allora accettata dai geometri e il Severi ne produsse poco appresso una variante fondata sullo stesso concetto; mentre il Castelnuovo e il Severi medesimo sviluppavano le conseguenze del teorema in ordine all'esistenza degli integrali semplici di Picard annessi ad una superficie irregolare ecc. Più tardi (nel 1912) H. Poincaré forniva una nuova dimostrazione del teorema di cui si discorre, per via trascendente.

(1) Presentata nella seduta del 5 aprile 1936.

Tuttavia la dimostrazione cui ho accennato presenta una lacuna, che è stata messa in evidenza dalla critica più recente del Severi ⁽¹⁾: l'esistenza di curve infinitamente vicine alla C non porta necessariamente che queste appariscano come curve infinitamente vicine a C entro un sistema continuo; in generale la dimensione di una varietà algebrica V non si può dedurre dalla semplice conoscenza che un punto generico ha, sopra V , un intorno costituito di ∞^r punti infinitamente vicini: giacchè questa dimensione risulterà minore di $r + 1$, se la V sia definita come varietà comune di più ipersuperficie che si tocchino fra loro.

Riesaminando la cosa nelle mie « Lezioni sulla classificazione delle superficie algebriche ... » redatte dal prof. Campedelli ⁽²⁾, io facevo osservare tuttavia che la deduzione da me tratta nel 1904 deve conservare il suo valore, se si ammetta che le curve infinitamente vicine sopra una superficie algebrica abbiano, per così dire, una reale esistenza, e che su di esse si possa operare, come sulle curve al finito, per somma e sottrazione. Imperocchè, essendo C_1 una curva infinitamente vicina a C e disequivalente da essa, l'operazione $+ C_1 - C$, successivamente ripetuta, varrà a definire, nell'intorno di una curva K qualsiasi, una serie di curve infinitamente vicine, successive e ciò porta di conseguenza che appunto la K debba appartenere ad una serie continua non lineare, entro la quale la curva K_1 - definita nell'intorno del 1° ordine di K - sia vicina a K .

Restava però da giustificare la verità intuita: che si può effettivamente operare sopra le curve infinitamente vicine appartenenti ad una superficie, per somma e sottrazione. E questo è appunto lo scopo della presente Nota, la cui esposizione verrà più largamente spiegata nei « Rendiconti » del Seminario della R. Università di Roma.

2. Prendiamo le mosse dal caso dei gruppi e delle serie lineari appartenenti ad una curva.

Se si procede nel modo ordinario sembra a prima vista che p. es. la sottrazione di due gruppi infinitamente vicini G e G_1 dalla serie segnata sopra una curva f dalle curve d'ordine m riesca impossibile. Perchè le curve d'ordine m che toccano f nei punti del G segano, in verità, su f , non la serie ottenuta sottraendo $G + G_1$, ma quella ottenuta sottraendo $2G$, indipendente affatto della scelta che si faccia di un G_1 nell'intorno di G .

Ciò non pertanto si riesce allo scopo indicato riferendosi alla varietà V jacobiana della f , i cui punti rispondono ai gruppi di p punti della curva di genere p : sulla quale varietà i punti infinitamente vicini vengono definiti in modo preciso dalle note condizioni differenziali. Infatti la varietà V possiede, com'è noto, un gruppo ∞^p di trasformazioni birazionali permutabili,

(1) « Rendiconti Lincei », V, 30 (1921).

(2) « Rendiconti del Seminario matematico di Roma », 1934.

sicchè due punti infinitamente vicini A e A_1 , dati su V , definiscono una trasformazione infinitesima (AA_1) generatrice del gruppo, nel senso di S. Lie; di conseguenza anche per ogni altro punto B di V , resta definita una traiettoria del gruppo generata dalla trasformazione suddetta (AA_1) , e quindi una serie di punti successivi B_1, B_2, B_3, \dots infinitamente vicini a B negli intorno d'ordine $1, 2, 3, \dots$. È chiaro che la trasformazione (AA_1) dove A e A_1 rispondano ai gruppi G e G_1 di f , definisce precisamente l'operazione $+ G_1 - G$, che applicata ripetutamente a un altro gruppo di p punti, conduce ad una serie di gruppi successivi, vicini ad esso.

Non vi è difficoltà a passare dai gruppi di p punti alle serie non speciali g_n^{n-p} sopra f : anche per queste verrà similmente definita l'operazione $+ g_1 - g$, dove g_1 sia una serie vicina a g , e, a partire da un'altra serie qualunque, una successione di serie infinitamente vicine che ne derivano.

3. A quel modo che si è fatto sopra per i gruppi di punti e per le serie non speciali sopra una curva, è lecito definire le curve infinitamente vicine sopra una superficie, in relazione ad una serie continua di curve $\{C\}$: in questo caso le curve C_1 , vicine a una C nell'intorno del 1° ordine, sono definite dai modi di avvicinamento a C entro $\{C\}$.

Nonostante la contraria apparenza non si esce da questo modo di definizione quando si trovano le curve infinitamente vicine ad una C disequivalenti ad essa, sia valendosi (come nella mia dimostrazione originale del 1904) di una rappresentazione sul piano multiplo, sia valendosi di curve spezzate, vicine ad una $C + K$, sopra la superficie. Il confronto di questi due modi di definizione vale ad assicurare che una « curva C_1 infinitamente vicina a C » è un ente ben definito, che non dipende dalla scelta del sistema ausiliario $|K|$.

Ora due curve infinitamente vicine, C e C_1 , segneranno sopra la curva K di un sistema ausiliario $|K|$, due serie lineari infinitamente vicine, g e g_1 , d'un certo ordine m , che potremo supporre non speciali. E si può dimostrare il lemma fondamentale:

Se le serie g e g_1 segnate dalle curve C e C_1 sopra le K sono equivalenti, le due curve C e C_1 sono esse stesse equivalenti, cioè appartengono ad un fascio lineare.

La dimostrazione, che svilupperò nella Memoria del Seminario matematico di cui sopra ho detto, si dà costruendo anzitutto un sistema lineare di curve, L , $L_1 = |C + iK|$, che seghino sulle K variabili d'un fascio i gruppi delle g_m definite da C e C_1 . Si trova in $|L$ un sistema lineare di curve dotato di una curva fondamentale composta di K del fascio, e — staccando queste — un fascio cui appartengono C e C_1 .

4. Come conseguenza del lemma sopra enunciato, due curve infinitamente vicine, C e C_1 disequivalenti, segano sopra le K di un sistema lineare ausiliario, gruppi non equivalenti. Se, come sopra, la serie segata da

$|C|$ sulle K si suppone essere una serie non speciale, contenuta in una serie completa $g = g_m^m - \pi$, resta quindi definita sopra ogni K una successione di serie $g_1, g_2, g_3 \dots$, vicine alla g negli intorni d'ordine $1, 2, 3 \dots$.

Si tratta di costruire delle curve, $C_2, C_3 \dots$, vicine alla C , e successive a C_1 , che seghino su K gruppi delle serie indicate. Per riuscire a questo scopo conviene sostituire alla C una curva L che si otterrà come luogo dei gruppi G_m di g costretti a passare $m - \pi$ volte per un punto A , base per un fascio di K . Qui la L viene generata da gruppi di π punti variabili colle K (di genere π) del detto fascio; e l'operazione $+ g_1 - g$ porta su ogni K codesto gruppo generatore G variabile in gruppi successivi $G_1, G_2, G_3 \dots$ che generano curve $L_1, L_2, L_3 \dots$, infinitamente vicine alla L negli intorni d'ordine $1, 2, 3 \dots$.

Quando si sono costruite codeste curve infinitamente vicine alla L , negli intorni successivi, si riesce anche a costruire le curve infinitamente vicine a C e successive a C_1 , bastando all'uopo considerare le curve vicine a $L + C$.

Infine, avendo provato che, per ogni curva C_1 vicina alla C , vi sono curve successive negli intorni d'ordine $2, 3 \dots$ (e seguentisi sopra rami lineari) ne deriva che la C appartiene ad un sistema continuo $\{C\}$, c. d. d.

Meccanica. — *Sui postulati della seconda relatività.* Nota di G. GIORGI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia (Astrofisica). — *Altezza della cromosfera nel 1935 ed andamento del ciclo solare.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. G. ABETTI.

I risultati delle osservazioni dell'altezza della cromosfera eseguite ad Arcetri, Praga e Catania durante il 1935, misurando l'altezza della riga H α invertita, con la fessura dello spettroscopio radiale al bordo sono raccolti nella seguente tabella. Ad Arcetri si sono fatte osservazioni in 95 giorni con l'equatoriale di Amici in massima parte da P. Cipriani; all'osservatorio Stefànik di Praga le osservazioni sono state eseguite in 68 giorni da B. Libedinský, B. Nováková e A. Vrátník, a Catania in 212 giorni da S. e L. Taffara di 45° in 45° invece che di 30° in 30° a causa dell'immagine solare più piccola ivi disponibile.

Altezza media della cromosfera nel 1935.

+ 90° N	+ 60° E	+ 30° E	0° E	- 30° E	- 60° E	- 90° S	- 60° W	- 30° W	0° W	+ 30° W	+ 60° W	Media
Arcetri												
10".78	10".44	10".02	10".04	10".19	10".34	10".58	10".32	10".44	10".17	10".06	10".09	10".29
Praga												
10.86	10.08	9.97	9.39	10.46	10.63	11.00	10.59	10.61	9.52	10.04	10.25	10.28
Catania												
10".7	$\frac{+ 45^\circ \text{E}}{9''.6}$		9".1	$\frac{- 45^\circ \text{E}}{9''.9}$		10".8	$\frac{- 45^\circ \text{W}}{9''.4}$		8".1	$\frac{+ 45^\circ \text{W}}{8''.8}$		9".55

Nella figura sono riportati questi dati dai quali si nota che l'accordo è ottimo fra Arcetri e Praga; per Catania l'altezza è generalmente più bassa specie all'equatore, probabilmente, come si è già altra volta notato, in relazione alla minore potenza dello strumento ivi adoperato.

(1) Presentata nella seduta del 5 aprile 1936.

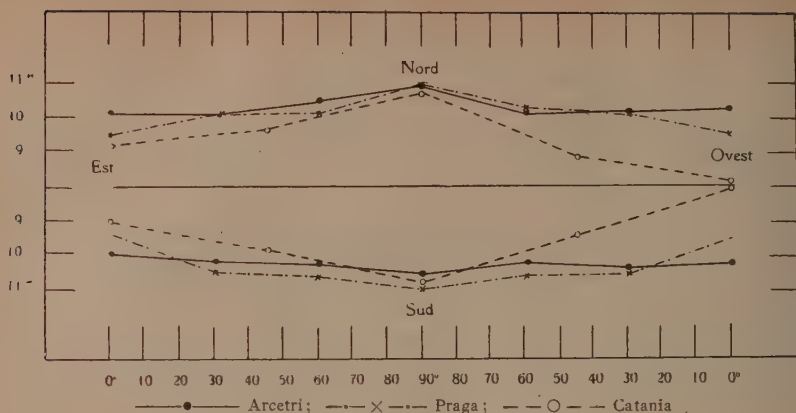


Fig. 1. - Altezza della cromosfera nel 1935.

L'altezza misurata ad Arcetri si può confrontare con quella ottenuta nel precedente anno.

$$1935 - 1934 = -0''.15.$$

È continuata quindi una lieve diminuzione generale e sembrerebbe così (almeno dalle osservazioni di Arcetri) che durante il 1933, anno di minimo, si sia verificata la massima altezza della cromosfera con la maggiore differenza fra i poli e l'equatore.

L'area totale delle protuberanze dedotta dalle stazioni di Arcetri, Catania, Praga, Tashkent, Zurigo nel 1935 risulta di 344 unità di protuberanza maggiore di quella del 1934, quindi l'attività del sole va rapidamente aumentando, come è provato anche dalla presenza di cinque gruppi di macchie comparsi nel secondo semestre del 1935, tutti nell'emisfero australe, con area maggiore di un millesimo di un emisfero solare. La maggiore attività dell'emisfero australe si dimostra anche nel fatto che i massimi principali delle protuberanze sono avvenuti nell'emisfero nord a 47° e in quello sud a 52° , continuando così lo spostamento verso i poli delle protuberanze ad alta latitudine rispettivamente di 2° e di 7° , in confronto al 1934. L'emisfero sud sembra quindi un poco in anticipo rispetto a quello nord, come è provato ancora dall'altra circostanza che nel primo è comparso nel 1935, ed è già ben definito, il massimo secondario delle protuberanze a relativamente bassa latitudine, cioè a $+32^\circ$, mentre nell'emisfero nord esso è appena accennato.

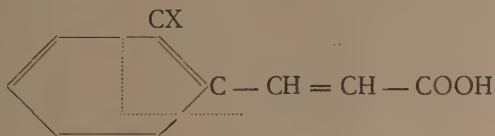
Dagli spettroeliogrammi in luce monocromatica di calcio e di idrogeno presi durante il 1935 alla torre solare si rileva che l'attività dei flocculi chiari ed oscuri è pure cresciuta da 0.5 a 1.5 nella scala dei numeri caratteristici dell'attività solare (0 = attività nulla; 5 = massima attività).

Per i dettagli di queste osservazioni si veda il fasc. 54 delle « Pubblicazioni del R. Osservatorio di Arcetri ».

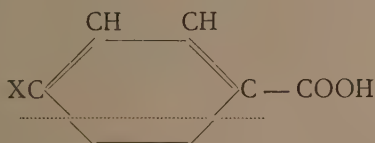
Chimica. — *Anomalie nella costante di dissociazione di alcuni acidi organici alogenati* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ del Socio M. BETTI e di E. LUCCHI.

Volendo estendere ad altri composti le indagini riguardanti l'anomalia già da noi constatata in una serie di acidi organici alogenati ⁽³⁾ e consistente nel fatto che l'acido cloro-sostituito è meno energico del corrispondente composto bromurato, furono sottoposti ad esame gli acidi orto-alogeno-cinnamici, che per la distanza dell'alogeno dal carbossile si possono mettere a confronto con gli acidi para-alogeno-benzoici:

(X = Cl o Br)



ac. orto-alogenocinnamici



ac. para-alogenobenzoici,

di comportamento normale.

Però, come fu esposto in una precedente pubblicazione ⁽⁴⁾, a causa della pochissima solubilità dei detti acidi orto-alogeno-cinnamici, i metodi chimico-fisici non permettono di raggiungere nella misura della loro costante di dissociazione un'approssimazione maggiore di $\pm 0,01$ di pH e conducono per ambedue allo stesso valore:

acido orto-cloro-cinnamico (trans) K. $10^4 = 0,39...$

acido orto-bromo-cinnamico (trans) K. $10^4 = 0,39...$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Bologna.

(2) Presentata nella seduta del 5 aprile 1936.

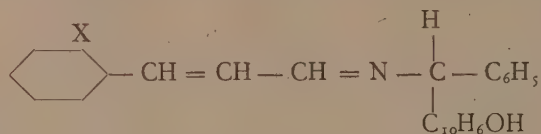
(3) « Rendiconti R. Accademia dei Lincei », ser. 6^a, vol. XV, 1° sem., 509 (1932);

« Ibid », vol. XXII, 2° sem., p. 284 (1935).

(4) « Rendiconti R. Accademia dei Lincei », ser. 6^a, vol. XXII, 2° sem., p. 367 (1935).

Non si può quindi per tal via riconoscere se questi acidi presentino o no l'anomalia sopraricordata.

Era opportuno vedere se ciò si potesse constatare basandosi sulla relazione polarimetrica già da tempo messa in evidenza da uno di noi ⁽¹⁾. Se cioè dal potere rotatorio dei derivati aldeido-aminici che il β-naftol-fenil-amino-metano (destrogiro) forma con le aldeidi o-alogeno-cinnamiche e che corrispondono alla seguente struttura:



(X = Cl o Br)

si potesse stabilire il carattere più o meno « elettronegativo » dei residui contenuti nelle aldeidi medesime:



e contenuti anche negli acidi carbossilici ad esse corrispondenti.

Abbiamo a tale scopo preparato i detti derivati, per ottenere i quali dovemmo prima preparare le due aldeidi, che non erano conosciute.

I dati polarimetrici forniti da questi derivati, messi a confronto col potere rotatorio del derivato ottenuto dall'aldeide cinnamica non sostituita, sono i seguenti:

derivato cinnamilidenico (trans)	[M] _D = + 1953° ⁽²⁾
» ortoclorocinnamilidenico (trans)	» = + 1792°
» ortobromocinnamilidenico (trans)	» = + 1815°

e fanno concludere con tutta sicurezza che il residuo o-clorocinnamico è più negativo di quello o-bromo-sostituito e che quindi *in questo caso l'anomalia non si manifesta*. Infatti, come fu già esposto in altra pubblicazione ⁽³⁾, quanto più fortemente elettro-negativo è il residuo dell'aldeide copulata con la destro base, tanto più fortemente risulta abbassata la rotazione destrogiro del composto aldeido-aminico.

(1) BETTI, « Transactions of the Faraday Society », XXVI, p. 337 (1930).

(2) Il dato polarimetrico del derivato cinnamilidenico da me pubblicato molto tempo fa, durante gli anni della guerra, era più basso di quello qui riportato, perchè fu ottenuto misurando un preparato derivante da un vecchio campione di aldeide cinnamica, che verosimilmente era impuro di benzaldeide. Anche il punto di fusione allora dato (156°) è inferiore a quello ora ottenuto, 162° M. B.

(3) « Gazz. Chim. Ital. », 53, p. 423 (1923).

Possiamo per altro rilevare che le differenze fra le rotazioni dei tre derivati non sono così forti come quelle che si verificano in altri casi, e per es. nei derivati alogeno-benzalici, nei quali coll'aumentare del carattere elettronegativo del residuo aldeidico, i valori polarimetrici discendono addirittura fino a raggiungere rotazioni sinistrogire:

derivato benzalico	[M] _D = + 373°.1
» ortoclorobenzalico	» = — 128°.4
» ortobromobenzalico	» — — 308°.7

Evidentemente nei composti o-alogenocinnamici, l'alogeno, ormai così lontano dal carbossile, ha minore influenza sul carattere acido di questo. Ciò risulta anche dalla costante di dissociazione degli acidi o-alogeno-cinnamici, che è soltanto di poco superiore a quella dell'acido cinnamico non sostituito:

acido cinnamico	K. 10 ⁴ = 0.365
» ortoclorocinnamico	» = 0.39
» ortobromocinnamico	» = 0.39

Il *d.-naftol*, *fenil*, *amino*, *metano* fu preparato nel modo già altra volta descritto ⁽¹⁾.

Come abbiamo già accennato, le aldeidi o-cloro- ed o-bromocinnamica non erano note. Alcuni primi tentativi fatti per ottenerle secondo la classica reazione di Chiozza, mettendo a reagire l'acetaldeide con la o-cloro e rispettivamente colla o-bromobenzaldeide ed impiegando come condensanti l'anidride acetica ed il cloruro di zinco, non condussero allo scopo. Buoni risultati si ottengono invece adoperando come condensante la dietilamina.

Per la preparazione dell'*aldeide o-cloro-cinnamica* 20 gr. di o-cloro-benzaldeide e 10 gr. di aldeide acetica vengono sciolti in 100 cc. di alcool a 95° e poi addizionati con otto gocce di dietilamina anidra. Dopo tre giorni il liquido si acidifica con poche gocce di acido solforico doppio normale e si concentra quindi a bagno maria fino ad un terzo del volume primitivo. Si estrae quindi con etere, che asporta l'aldeide e lascia indietro il solfato di dietilamina, ed il liquido eterico essiccato in presenza di solfato sodico anidro si distilla. Rimane un olio che in bagno di paraffina si distilla frazionatamente a pressione ridotta (14 mm. di mercurio); prima dei 130° distilla l'o-clorobenzaldeide rimasta inalterata: fra i 152° e i 155° (14 mm.) distilla l'aldeide o-clorocinnamica che col raffreddamento si rapprende in una massa di cristalli aghiformi bianchi che si purificano poi con ripetute cristallizzazioni dell'alcool. Il composto puro fonde a 56°-57°; è assai solu-

(1) « Gazz. Chim. Ital. », 37, I, 384; 36, II, 392; « Organic Syntheses », 9, 60 (1929).

bile nell'alcool e nel benzene, molto nell'etere, insolubile nell'acqua; a 10 mm. di pressione bolle a 138°; ha intenso odore di cannella.

Analisi: mg. 4.093 di sost. dettero mg. 9.760 di CO₂ e mg. 1.547 di H₂O.

C %	Trovato	65.03	Calc. per C ₉ H ₇ OCl	64.87
H %	»	4.20	»	»
				4.20

L'aldeide si ossida lentamente all'aria e fornisce l'acido o-clorocinnamico *trans* (p. fus. 207°).

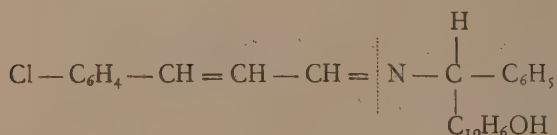
Per l'aldeide o-bromocinnamica si parte dall'o-bromotoluene, che per ossidazione con cloruro di cromile si trasforma in o-bromo-benzaldeide, e si procede poi come nel caso precedente. L'aldeide o-bromocinnamica si presenta in cristalli bianchi assai solubili nell'alcool, molto nell'etere, insolubili nell'acqua, che fondono a 67° e bollono 160° (14 mm.). Hanno spiccato odore di cannella.

Analisi: mg. 3.776 di sost. dettero mg. 7.068 di CO₂ e mg. 1.218 di H₂O.

C %	Trovato	51.05	Calc. per C ₉ H ₇ OBr	51.19
H %	»	3.58	»	»
				3.32

L'aldeide si ossida all'aria, ma più lentamente dell'aldeide clorurata e forma acido o-bromocinnamico *trans*. (p. fus. 214°)

Il derivato dell'aldeide o-clorocinnamica colla base otticamente attiva:



fu preparato sciogliendo a mite calore (45°) gr. 2 di base (1 mol.) in 90 cc. di alcool ordinario ed aggiungendo al liquido tiepido gr. 1.50 di aldeide (1 mol.) sciolta in 5 cc. di alcool. Per raffreddamento e col riposo si separano gr. 2.8 di un prodotto cristallizzato in sottili aghi bianchi, pochissimo solubili nell'alcool, alquanto solubili nel benzene anche freddo. Il composto, purificato facendolo cristallizzare per tre volte da una miscela di alcool e benzene, fonde a 162°.

Analisi: mg. 3.922 di sost. dettero mg. 11.323 di CO₂ e mg. 1.917 di H₂O mg. 5.70 di sost. dettero cc. 0.155 di azoto (20° e 749 mm.).

C % Trovato 78.74 Calc. per $C_{26}H_{20}ONCl$ 78.49

H » » 5.43 » » 5.03

N » » 3.12 » » 3.52

Potere rotatorio: una soluzione benzenica contenente in 100 cc. gr. 1.0258 di sost., esaminata in un tubo lungo 2 dm. dette:

$$\alpha_D = + 9^{\circ}.25 \text{ da cui } [\alpha]_D = 450^{\circ}.9 \text{ e } [M]_D = + 1792^{\circ}.$$

Il composto non presenta il fenomeno della polirotazione, che altra volta è stato invece constatato in composti analoghi.

Il derivato dell'aldeide o-bromocinnamica con la base otticamente attiva fu preparato in modo corrispondente a quello seguito pel precedente composto. Gr. 1.59 di base (1 mol.) furono sciolti in 80 cc. di alcool ed alla soluzione furono aggiunti gr. 1.45 di aldeide o-bromocinnamica (1 mol.) sciolta in 5 cc. di alcool. Si ebbero 3 gr. di composto cristallizzato in aghi bianchi, poco solubili nell'alcool, solubili nel benzene. P.fus. 123° .

Analisi: mg. 3.857 di sost. dettero mg. 10.049 di CO_2 e mg. 1.896 di H_2O mg. 3.90 di sost. dettero cc. 0.098 di azoto (19° e 764 mm.).

C % Trovato 71.06 Calc. per $C_{26}H_{20}ONBr$ 70.59

H » » 5.46 » » 4.53

N » » 2.95 » » 3.17

Potere rotatorio: una soluzione benzenica contenente in 100 cc. gr. 1.0352 di sost., esaminata in un tubo lungo 2 dm. dette:

$$\alpha_D = + 8^{\circ}.50 \text{ da cui } [\alpha]_D = + 410^{\circ}.5 \text{ e } [M]_D = + 1815^{\circ}$$

Anche questo composto non presenta polirotazione.

Ringraziamo la dott.ssa Dea Dal Monte Casoni che ha collaborato alle ricerche riferite nella presente pubblicazione.

Geologia. — *Di una particolare «facies» continentale dell'Oligocene ligure.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. G. ROVERETO.

Non sono attualmente comuni delle superficiali coltri rocciose, più o meno grossamente spezzate, dovute a particolari condizioni climatiche, morfologiche, litologiche: si osservano nelle Montagne Rocciose, dove, essendo il clima rigido, si formano le cosiddette *pavimentazioni di rocce*: nelle montagne del Sahara, dove per il clima arido si determinano i *tassili*; nelle steppe granitiche dell'Australia, della Sierra Guadarrama, della Gallura e di numerosi altri siti, a rocce granitiche e in prevalenza a clima semiarido; in regioni a solifluzione, come le Malvine, o a ghiacciai di rocce e a frane di sfacelo, come le Alpi, benchè siano allora, in questi ultimi tre casi, più limitate.

Già più volte nel Sud-America ho avuto occasione di constatare l'esistenza di un letto di *rocce sepolte*, fra il granito, o altre rocce cristalline, e il loess della Pampa, di cui bisognava tener conto nelle ricerche di acque sotterranee: così, in una perforazione fatta a Merlo, ai piedi occidentali della Sierra di Cordova, dopo venti metri di loess, se ne attraversarono altri quaranta di *rocce granitiche*, avanti di trovare la roccia intatta e l'acqua: in casi normali il primo arrivo al granito avrebbe fatto sospendere la ricerca.

Ora credo di aver trovato residui di simili *pavimentazioni di rocce* in alcuni lembi oligocenici dell'Appennino Ligure Occidentale, per i quali non manca la nota di geologia applicata, perchè racchiudono lenti, omai riconosciute povere o limitate, di lignite picea.

Salendo da Isoverde ai laghi artificiali del Gorzente, quando si è sotto il valico di Prato del Gatto, su di una parete di serpentina esiste un cappello di breccia serpentinoso, che rappresenta il principio dell'oligocene di cui è parola: ma il suo assetto e la sua composizione sono tali, che nessuno ha sinora riconosciuto tale profonda variazione geologica, anzi dirò, che siccome la stessa breccia si continua sino al Lago Lungo, la diga di sbarramento di questo si è incassata, per la spalla destra, nella breccia, credendo di incastrarla nella serpentina.

Salendo un po' più a mezzogiorno, per la mulattiera che da San Martino di Paravanico porta a C. Sciacaluga, mentre si crede di camminare sulla serpentina, e il terreno è sparso di massi serpentinosi, che si ritengono

(1) Presentata nella seduta del 5 aprile 1936.

isolati dall'erosione in posto, si trova ad un tratto, a destra della salita, sul versante orientale di M. Orditano, una piccola lente di lignite.

È questo l'esempio più tipico di ciò che considero un'antica pavimentazione di roccame, con la differenza però, che qui si aveva una regione pianeggiante e costiera, poichè qua e là nella breccia esistono strati di marne, con o senza lignite, che indicano il riempimento di piccole depressioni, e lenti di ciottoli marini (verso C. Vallecaldà e in Praglia dove si è trovato un corallario fluitato), che indicano come allo stesso livello si avesse la cimasa costiera, mentre la lignite testimonia, che alle condizioni climatiche che preparavano il roccame, se ne alternavano altre che permettevano un'attiva vegetazione.

In pratica questo fatto rende molto difficoltoso il rilievo geologico, perchè alla superficie non si scorgono che dei massi scheggiati di serpentina, circondati dalla vegetazione erbacea; ma lungo il letto in roccia viva dei rivi, che scendono dal piccolo altipiano di Praglia, si vede fra i massi maggiori un riempimento di materiale serpentinoso, più minuto e saldato: se non fosse che si tratta certamente di una coperta oligocenica, si direbbe un accumulo detritico o franoso, e il Taramelli difatti deve averlo preso per tale, perchè dice, riferendosi a questi luoghi, che dovunque le pendici sono coperte da frane, e che la lignite di M. Orditano affiora da una frana.

Questa formazione si comincia a trovare come una coltre sull'alto della montagna, a circa settecento-ottocento metri di altitudine, e forma tutto il pianoro di Praglia, da cui si eleva M. Poggio (m. 1081), che è però di serpentina e peridotite in posto. Attorno a questo rilievo, lungo il Rio detto del Carbone di Pietra, alle Capanne Superiori di Marcarolo, a C. Pescina, in Praglia a cominciare da C. Ciappi, poi lungo il R. Lischeo, e per la costola fra la valle della Polcevera e quella del Gorzente, sin sotto a M. delle Figne, si estende la coltre di roccame, qua e là con tracce di lignite (ai Piani di Praglia, a Prato Nerceo, alla Baiarda, a Termini alto), e con le variazioni di cui si è detto. Un lembo staccato, pure con lignite, è quello di Mazzapello, dove la breccia è però ben distinguibile, perchè non è più di solo roccame di serpentina, ma di più specie rocciose (tavolette Masone e Busalla).

A settentrione di M. delle Figne la copertura oligocenica riprende, nei dintorni di C. Carrosina, con deciso aspetto conglomeratico-arenaceo, usuale; in qualche tratto scende anche in basso, come nel Rio Acquestregate, dove si hanno tracce di lignite, e si continua sin quasi a circondare M. Tuggio, sotto il quale, in valle del Morzone esiste il banco di lignite più notevole della regione, esplorato durante la guerra.

Ammaestrato da ciò che avevo osservato in questo gruppo di M. Orditano-M. Tuggio, ho trovato altri materiali da denudazione subatmosferica, qua e là, in alto, per tutto l'Appennino Occidentale, specialmente dove la roccia di

base è serpentinoso, mentre se ne hanno scarse tracce dove è calcescistoso, o prasinitico.

Si osservano in particolar modo: sotto le pendici settentrionali e orientali di M. Pracaban, e sino a Bric dei Ladri, anche qui fra gli 800 e i 900 m.; nella regione della Masca, fra Masone e Campoligure; nella regione degli Uvi, sopra Morbello; lungo la strada da Ponzone a Pian Castagna; ma in molte altre località devono essermi sfuggiti, tanto più che ebbi pratica di ciò solo negli ultimi tempi.

Ho poi trovato lo stesso eluviale oligocenico attorno al bacino di Sassello, in particolar modo nella regione di Palo verso l'Olba, dove forma una zona alla periferia dei sedimenti marini, e quindi è intercalato fra questi e la roccia in posto: anzi qui vi è traccia di *terreno lateritico*, collegato a un disfacimento in relazione a prasiniti, e per di più si hanno ciottoli rivestiti dalla cosiddetta *vernice del deserto*, che, come ho altrove dimostrato, è meglio chiamare *vernice tropicale*, e che può essere tanto fluviale che marina. Una grande estensione di questo oligocene eluviale esiste pure all'estremo opposto dello stesso bacino, verso nord-ovest, a Bric Montaldo, fra depositi marini e la roccia serpentinoso, e da qui si estende a M. Vallaccia, dove forma tutta la montagna, che è in mezzo alla serpentina; ciò pone termine da questa parte al noto bacino di Sassello.

E così, il rocceame pavimentato aumenta il numero delle « facies » continentali, già tanto varie e numerose, dell'oligocene ligure: dai sedimenti limosi, ora argille, con elitre di coleotteri di Sassello, si passa alle arenarie a filliti, e alle argille marnose a ligniti, di tanti luoghi noti, alle ghiaie e ai conglomerati di tanti altri, comprese le sabbie e le ghiaie silicee, che, come quelle di Vicoforte, si riconoscono continentali, perchè contengono a loro volta ligniti, con fossili terrestri; ghiaie però, che sono tanto sfericamente rotolate, da ritenersi che rappresentino il rimaneggiamento di un preesistente cordone marino.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi. — *Sulla iterazione di una classe di funzioni.*

Nota di G. BARBA, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. V. NOBILE.

1. Si abbia da studiare l'iterazione della funzione $m_1 = f(m)$ con f simbolo di funzione razionale.

Sia g una certa operazione funzionale che lega la m ad una variabile ausiliaria x . Poniamo, cioè $m_0 = g(x_0)$ con x_0 elemento base della successione $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ e quindi anche $m_1 = g(x_1)$. Ne segue — per essere $m_0 = m - g(x_1) = f[g(x_0)]$ da cui $x_1 = g^{-1}[f\{g(x_0)\}]$ od anche chiamando k il complesso funzionale $g^{-1}fg$: $x_1 = k(x_0)$.

Quindi si ha x_1 attraverso la trasformata di f mediante g .

Ne segue che da m_0 noi possiamo passare ad m_1 in due modi: o direttamente, attraverso la f , oppure, passando, prima, da m_0 ad x_0 attraverso la g^{-1} , poi da x_0 ad x_1 , mediante la k , infine da x_1 a m_1 , attraverso la g .

La possibilità di poter seguire questo secondo procedimento per passare da m_0 ad m_1 , ci dice l'importanza che può avere una opportuna scelta di g . Difatti, si può cercare di scegliere l'operatore g in modo che la k conduca ad uno studio più semplice di quello iniziale, allo studio, cioè, dell'iterazione della $x_1 = k(x_0)$ — studio dal quale, poi, si risalirà a quello relativo alle m , attraverso, appunto, la g .

Dalla Nota del prof. G. Andreoli, *Sull' iterazione di una speciale funzione* ⁽²⁾ e dalla mia Nota, *Un problema d' iterazione razionale relativo ad un fascio sizigetico di forme biquadratiche* ⁽³⁾ si rileva che riesce conveniente nei casi esaminati assumere g funzione periodica — in particolare circolare od iperbolica: g essendo monodroma, e g^{-1} determinata a meno di polidromia per costante additiva.

Queste ultime offrono il vantaggio di condurre ad espressioni, per $k(x)$, del tipo $k(x) = \alpha x$, che evidentemente sono tra le più semplici anche agli effetti dell' iterazione.

Ma a forme egualmente semplici per $k(x)$ si può arrivare anche facendo ricorso a funzioni g più generali delle periodiche e con partenza da funzioni f , non solo razionali; ma più generalmente da una relazione algebrica tra m_0 ed m_1 .

È di ciò che vogliamo accennare nella presente.

(1) Nella seduta del 5 aprile 1936.

(2) « Rendiconti R. Acc. dei Lincei », vol. XXVIII, ser. 5^a, 1° sem., fasc. 12.

(3) « Atti Accademia Gioenia di Scienze in Catania », vol. XVII.

2. Il problema della iterazione è caratterizzato dalla successione di punti (o gruppi di punti) consecutivi tali che:

$$F(x_n, x_{n+1}) = 0$$

con F simbolo di polinomio.

I valori x_{n+1} che competono ad un certo x_n saranno detti — usando una nota terminologia — *susseguenti* di questo, mentre i valori x_n che competono ad un certo x_{n+1} saranno detti *antecedenti* di questo.

È ovvio che l'antecedente (conseguente) di un antecedente (conseguente) di un certo valore è ancora antecedente (conseguente), ma non è affatto vero che il susseguente di un antecedente debba essere un susseguente o un antecedente (potendo essere l'uno o l'altro), com'anche l'antecedente di un susseguente può non essere nè l'uno nè altro.

I problemi, pertanto che naturalmente sono da impostare in tema di iterazione sono i seguenti:

I) Determinare l'insieme dei susseguenti (antecedenti) ad un dato valore, indi determinare la natura di tale insieme.

II) Determinare l'insieme più generale ottenuto a partire da un valore, prendendo in esame combinazioni sempre più vaste di antecedenti e conseguenti.

Ove la F permetta di ricavare x_{n+1} come funzione monodroma di x_n , si ha una semplice successione di susseguenti ed un insieme di gruppi di punti come antecedenti (il contrario si ha nel caso reciproco).

L'eventualità banale che di ogni valore si presenti un solo antecedente (conseguente) implica per la F la bilinearità nei suoi argomenti: si ha in tal caso l'iterazione di una trasformazione omografica e della sua inversa.

3. Le ricerche relative alla iterazione di una funzione razionale trattate magistralmente dal Julia ⁽¹⁾, possono assumere veste più semplice attraverso la teoria delle funzioni automorfe, studiando il comportamento dei valori assunti da tali funzioni lungo una certa successione di valori che assume l'argomento.

L'esempio che svilupperemo si riferisce al caso delle funzioni periodiche — pensate caso particolare di quelle automorfe — e la successione dei valori sarà ottenuta con legge ricorrente assai semplice.

Non tratteremo, per esempio, di funzioni doppiamente periodiche per amor di brevità, presentando un comportamento analogo a quello delle periodiche, riservandoci eventualmente, di trattarne in altra sede.

Si tratta, allora, di riportare nel campo fondamentale dell'argomento i valori di quella successione, potendosi avere le seguenti alternative:

a) I corrispondenti della successione in esame, nel campo fondamentale danno un numero finito di punti distinti;

(1) V. indicazioni in mia Nota citata.

b) I corrispondenti formano un insieme denso ovunque su una certa poligonale a lati curvilinei di detto campo;

c) I corrispondenti in discorso sono dovunque densi nel campo fondamentale.

Per meglio fissare le idee diremo che il problema consiste nel determinare per quali punti del campo fondamentale si presenta ciascuna delle eventualità suddette, osservando che a) e b) possono presentare un antiperiodo, superato il quale si è nel periodo propriamente detto.

4. Da quanto precede risulta, ispirandosi ai casi già esaminati nelle citate Note, che occorre esista una funzione $\varphi(\zeta)$, tale che si possa porre:

$$x_n = \varphi(\zeta_n) \quad , \quad x_{n+1} = \varphi(\zeta_{n+1})$$

essendo, poi, ζ_n e ζ_{n+1} legate da una relazione del tipo lineare.

Il problema, così impostato, trova la sua soluzione nel supporre φ funzione automorfa e che il passaggio da ζ_n a ζ_{n+1} avvenga attraverso una trasformazione lineare di tipo prefissato.

Particolarmente semplici sono quei casi (che qui accenneremo) nei quali la φ può, addirittura essere scelta come funzione periodica, ed in particolare della forma: seno, coseno, tangente o cotangente.

In tal caso si pone, per esempio:

$$x_n = \cos \zeta_n \quad , \quad x_{n+1} = \cos \zeta_{n+1}$$

con

$$\zeta_{n+1} = 1^\circ \zeta_n + \alpha, \quad 2^\circ k\zeta_n, \quad 3^\circ k\zeta_n + \alpha, \quad 4^\circ r\zeta_n, \quad 5^\circ r\zeta_n + \alpha$$

(k intero, r razionale).

Il 1° caso corrisponde, genericamente, ad una relazione quadratica fra x_n e x_{n+1} (cfr. G. Andreoli, Nota cit.).

Il 2° caso, a seconda che k è pari o dispari, ad una espressione di x_{n+1} polinomiale in x_n , oppure polinomiale in x_n e $\sqrt{1 - x_n^2}$.

Il 3° caso, si comporta come il secondo nell'ultima eventualità.

Il 4° caso porta ad una relazione algebrica tra x_n e x_{n+1} .

Il 5° caso si comporta come il 4° caso.

Ponendo di tramite la funzione seno, anziché il coseno ci si potrebbe ricondurre al caso precedente, in sostanza, ma, anche con sviluppo diretto le conclusioni differiscono poco dalle già viste.

Ove invece si faccia ricorso alle funzioni tangente o cotangente, si hanno nel 1°, 2°, 3° caso espressioni *sempre* razionali (fratte).

5. Vogliamo accennare, qui, a due esempi.

A) scegliamo:

$$x_n = \cos \zeta_n \quad , \quad x_{n+1} = \cos 2\zeta_n, \quad \text{dove} \quad \zeta_{n+1} = 2\zeta_n.$$

Si ha quindi, da iterare, in sostanza, la funzione

$$f(x) = 2x^2 - 1.$$

Restando nel campo reale, questo vale se $|x| \leq 1$.

La stessa funzione, per $|x| > 1$, resta iterata attraverso le

$$x_n = Cb\zeta_n, \quad x_{n+1} = Cb2\zeta_n \quad \text{e quindi:} \quad \zeta_{n+1} = 2\zeta_n$$

Si passa dal 1° al 2° caso mutando, ovviamente, ζ in $i\zeta$.

Scelto, ora, un qualsiasi valore di ζ , pel momento reale, bisogna considerare la successione dei susseguenti:

$$x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$$

ottenuta, ovviamente, in modo unico.

Si vede facilmente che se ζ_0 è della forma: $\frac{q \cdot \pi}{2^r}$ dopo r iterazioni

— dovendosi procedere a delle determinazioni a meno di multipli di 2π , com'è ovvio — si cade in un valore unico corrispondente a $\zeta = 0$. In tal caso quindi, la successione dei susseguenti si compone di r valori distinti — formanti antiperiodo — e dell'unico valore 1, che da un certo punto in poi si ripete sempre.

Se invece è: $\zeta_0 = \frac{q \cdot \pi}{2^r \cdot s}$ vi sarà anche stavolta un antiperiodo, ma,

iterando, a partire da detto antiperiodo, poichè a numeratore figureranno tutte le successive potenze di 2, si presenta una periodicità derivante dal come tali successive potenze sono congrue al numero *dispari* s .

Se invece, ζ_0 non è razionale con π , si ripresentano le stesse conclusioni svolte nella mia Nota già citata.

Per riguardo, invece, agli antecedenti, nel caso che ci occupa, si vede subito che ogni numero ha due antecedenti, con le leggi connesse già espresse, e che la periodicità non può aversi se non per una particolare scelta.

Passando, poi, al caso di $|x| > 1$, e pel momento supporremo x positivo, si vede che l'iterazione conduce ad una successione non più periodica.

Di tutto ciò ci rendiamo esatto conto trasferendoci nel piano complesso. Diviso questo in strisce dovute alla periodicità reale, nel 1° caso si itera nella stessa direzione della periodicità — allorchè ζ è reale — e quindi bisogna ogni volta riportarsi nel campo fondamentale (striscia); nel 2° caso si iterano le ζ nella direzione immaginaria e quindi si rimane, sempre nel campo fondamentale.

Se si parte invece che da valori reali od immaginari di ζ , più generalmente, da valori complessi $\zeta_0 = u_0 + iv_0$, allora la costruzione dei successivi ζ si può, ovviamente, spezzare in due parti: una, quella dovuta alle u_n , che partecipa del 1° tipo, l'altra dovuta alle v_n , che partecipa del 2° tipo.

In tal guisa si viene ad avere un insieme di punti isolati che percorrono la striscia, andando ad accumularsi verso il punto $\zeta = \infty$, nel caso generale.

B) Sia: $f(x) = 3x - 4x^3$. Poniamo

$$x_1 = 3x_0 - 4x_0^3 = \operatorname{sen} 3\zeta_0$$

la successione, in ζ , sarà, allora data da: $\zeta_n = 3^n \zeta$.

6. Non dissimili da quelle viste al numero precedente sono le conclusioni relative alle posizioni

$$x_n = \operatorname{tg} \zeta_n, \quad x_{n+1} = \operatorname{tg} 2\zeta_n$$

corrispondente alla iterazione di $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$, per cui: $\zeta_{n+1} = 2\zeta_n$ e l'altra:

$$x_n = \cos \zeta_n, \quad x_{n+1} = \cos k\zeta_n \quad (k \text{ pari})$$

onde: $\zeta_{n+1} = k\zeta_n$.

Per quest'ultima, se il valore di partenza ζ_0 è della forma: $\zeta_0 = \frac{q \cdot \pi}{k^r}$

si ha un antiperiodo formato da r punti e poi tutti i consecutivi coincidenti; se, $\zeta_0 = q\pi / k^r \cdot s$ allora, certamente si ha un antiperiodo, formato da r punti, e poi, se s è primo con k , si hanno gli stessi cicli che competono alle successive potenze di k , rispetto al mod. s , diversamente vi è riduzione.

RIASSUMENDO. — I problemi di iterazione di funzioni razionali o di funzioni algebriche, più generalmente, possono ricondursi allo studio di proprietà riguardanti certi insiemi di punti nel campo fondamentale di una funzione automorfa.

Ove questo insieme di punti converga od abbia come eventuale unico punto limite un punto di singolarità, lo studio si riattacca al comportamento della funzione nelle vicinanze della singolarità stessa.

Matematica (Algebra). — *Sulla riduzione delle matrici a forma canonica*. Nota I di S. CHERUBINO, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. SCORZA.

Per stabilire il criterio di equivalenza per simiglianza delle matrici nel corpo complesso è sufficiente, tanto in Algebra che in Geometria, provare l'esistenza di una forma canonica ben definita, senza preoccuparsi del modo come questa possa raggiungersi.

Il grande sviluppo del calcolo di matrici e delle sue applicazioni fa oggi desiderare anche l'assegnazione di una catena ordinata di operazioni, tutte esplicitamente determinabili, atta a portare ogni data matrice (di conosciute radici caratteristiche) nella sua forma canonica.

Naturalmente, importa anche avere la catena più corta ed è opportuno costruirla coi mezzi più semplici.

Credo che a questa duplice necessità rispondano assai bene i risultati di questa ricerca.

Essa è divisa in due parti. Nella prima indico le trasformazioni della catena che fanno ottenere la segnatura (Scorza) relativa a ciascuna radice caratteristica ⁽²⁾. Nella seconda stabilisco le ulteriori trasformazioni mercè le quali si raggiunge la forma canonica.

Quella qui conseguita, salvo differenze non sostanziali, coincide con la forma tipica ottenuta dal Predella nella teoria delle omografie. Si riconosce così che quella di questo geometra, anche dal punto di vista algebrico, è più spontanea della forma tipica del Jordan. E si constata anche che, diminuendo di un'unità ciascuno degl'interi caratteristici della segnatura, si passa alla « caratteristica » del Predella.

Alla fine della prima parte mostro come il risultato stabilito consenta di determinare « a semplice vista » la segnatura di una certa classe di matrici che ha attirato recentemente l'attenzione di vari Autori ⁽³⁾.

(1) Nella seduta del 5 aprile 1936.

(2) La conoscenza della segnatura permette di scrivere *ipso facto* la forma canonica che qui si raggiunge (o quella del PREDELLA) nonchè, con breve calcolo [G. SCORZA, *Corpi numerici ed Algebre*. Messina (1921), p. 434] quella del JORDAN.

(3) Questa classe fu incontrata nei tentativi di istituire una definizione di funzione analitica di matrici. La determinazione della sua forma canonica è stata oggetto dei tre lavori seguenti: S. AMANTE, *Sulla riduzione a forma canonica di una speciale classe di matrici* [due Note in questi « Rendiconti », vol. XVII, gennaio e marzo 1933]; G. SCORZA, una breve Nota con lo stesso titolo nei « Rendiconti della R. Accademia di Napoli » (1934, vol. IV); M. TOGNETTI: una Nota, ancora con lo stesso titolo, negli « Atti della R. Accademia di Torino » (vol. 71^o, to. I, novembre-dicembre 1935).

1. Sia A una matrice complessa di ordine n . Come d'uso, si dirà che B è *equivalente ad A per simiglianza* o per *contragredienza*, oppure che A e B sono *simili*, quando esiste una matrice H non degenere, tale che

$$(1) \quad B = H^{-1}AH$$

ove H^{-1} è la reciproca di H . Si dirà anche che H *trasforma per contragredienza o simiglianza* A in B , ossia che B è la trasformata di A mediante H . A sua volta A è la trasformata di B mediante H^{-1} .

Se A e B sono simili si ha senz'altro che le loro equazioni caratteristiche coincidono, cioè che

$$|H^{-1}AH - \lambda I| = |A - \lambda I|$$

ove I è la matrice identica di ordine n e λ un'indeterminata.

2. Supponiamo che una radice dell'equazione caratteristica di A sia nulla, cioè che A sia degenere, e diciamo h la sua caratteristica, μ la molteplicità della radice nulla. Sarà necessariamente

$$\mu \geq 1, h < n, n - h \leq \mu.$$

Permutando convenientemente le righe di A è possibile portare ai primi h posti h sue righe linearmente indipendenti. Tale operazione può effettuarsi con successivi scambi di due righe per volta, quindi si esegue moltiplicando, a sinistra, per un prodotto di matrici come $I^{(r,s)}$, ciascuna ottenuta dalla identità permutando fra loro le due righe di indici r ed s .

Moltiplicando a destra per gli stessi fattori, nello stesso ordine, si porteranno ai primi h posti le h colonne di A aventi gli stessi indici delle righe precedenti. In tal modo, il minore principale comune alle h righe e colonne che si spostano, resta ancora principale.

Le matrici $I^{(r,s)}$ essendo tutte *involutorie*, l'inverso del prodotto di due o più di esse coincide con il prodotto delle stesse, ordinate in senso opposto: perciò la matrice ottenuta con le operazioni sopra descritte è simile alla A .

Possiam dunque partire da una matrice come

$$(1) \quad A_1 = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array} \right)$$

in cui $(a|b)$ sia una matrice ad h righe (ed n colonne) di caratteristica h . In questa abbiám posto in vista il minore principale a , che è lo stesso di quello contenuto nelle h righe indipendenti di A che abbiám portate ai primi posti.

3. Le righe di $(c|d)$ dipendono da quelle di $(a|b)$, quindi può porsi

$$(c|d) = \mu (a|b)$$

ossia $c = \mu a$, $d = \mu b$, con μ matrice ad $n - b$ righe ed b colonne, determinabile in modo ovvio.

Dopo di che, la matrice

$$H = \left(\begin{array}{c|c} I_b & 0 \\ \hline \mu & I_{n-b} \end{array} \right),$$

dove con I_r si indica la matrice identica di ordine r , trasformerà per contragredienza la (1) in una matrice dell'aspetto

$$(2) \quad A^* = \left(\begin{array}{c|c} a^* & b^* \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right).$$

Precisamente si ha

$$H^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_b & 0 \\ \hline -\mu & I_{n-b} \end{array} \right)$$

quindi

$$H^{-1} A H = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \cdot H = \left(\begin{array}{c|c} a + b\mu & b \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

onde risulta

$$(3) \quad a^* = a + b\mu, b^* = b.$$

4. Sia ora a^{**} una matrice simile ad a^* , cioè si abbia

$$(4) \quad a^{**} = L^{-1} a^* L$$

con L matrice opportuna, di ordine b (e non degenera). Ponendo

$$M = \left(\begin{array}{c|c} L & 0 \\ \hline 0 & I_{n-b} \end{array} \right)$$

e trasformando A^* mediante M si ha

$$(5) \quad M^{-1} A^* M = \left(\begin{array}{c|c} a^{**} & L^{-1} b \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right).$$

E se a^* è non degenera, sicchè possa porsi

$$(6) \quad b^* = a^* \cdot v$$

con v matrice ad b righe ed $n - b$ colonne, determinabile anch'essa in modo ovvio, prendendo

$$M_1 = \left(\begin{array}{c|c} I_b & -v \\ \hline 0 & I_{n-b} \end{array} \right)$$

e trasformando per contragredienza la (2) mediante questa, si ottiene la matrice

$$(7) \quad A_2 = \left(\begin{array}{c|c} a^* & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

dalla quale trasformando ancora (sempre per contragredienza) mediante M , si ottiene l'altra

$$(7) \quad A^{**} = \left(\begin{array}{c|c} a^{**} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

ove a^{**} è anch'essa non degenera, come a^* .

5. Operando, se occorre, più volte di seguito le trasformazioni per simiglianza descritte negli articoli precedenti, la matrice A si riduce a una dello aspetto

$$(8) \quad B = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \begin{array}{c|c} a_0 & b_0 \\ \hline 0 & 0_1 \end{array} & b_1 & & & \\ \hline \begin{array}{c|c} 0 & 0_2 \end{array} & b_2 & & & \\ \hline & & \ddots & & \\ \hline & & & \ddots & \\ \hline & & & & b_j \\ \hline & & & & 0 & 0_{j+1} \end{array} \right)$$

che può anche scriversi

$$(8') \quad B = \left(\begin{array}{c|c} a_i & b_i \\ \hline 0 & 0_{j+1} \end{array} \right) = a_{j+1},$$

ponendo

$$(8'') \quad a_j = \left(\begin{array}{c|c} a_{j-1} & b_{j-1} \\ \hline 0 & 0_j \end{array} \right), \dots, a_1 = \left(\begin{array}{c|c} a_0 & b_0 \\ \hline 0 & 0_1 \end{array} \right).$$

Ciascuna a_i è una matrice quadrata degenera di caratteristica eguale all'ordine della matrice a_{i-1} , meno a_0 che è non degenera, oppure nulla.

Indicheremo con b_0 l'ordine di a_0 , e con b_i l'ordine della matrice nulla 0_i ($i = 1, 2, \dots, j+1$), sicchè quello di a_i è $b_0 + b_1 + \dots + b_i$ e la sua caratteristica $b_0 + b_1 + \dots + b_{i-1}$, mentre le matrici b_i sono ad $b_0 + b_1 + \dots + b_i$ righe ed b_{i+1} colonne.

Si tenga infine presente che, se la matrice a_0 è nulla, b_0 è necessariamente di caratteristica b_0 e dovrà quindi aversi $b_0 \leq b_1$. Inoltre, a norma dell'art. 4, se la matrice a_0 è non degenera si può supporre che sia nullo b_0 . In ogni caso, come risulterà di qui a poco, sarà $b_i \leq b_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, j$).

Si tratta ora, in base alla prima delle osservazioni fatte nell'articolo precedente di ulteriormente semplificare, sempre con trasformazioni contragredienti, le matrici a_i . Cominceremo da a_1 e, via via, arriveremo ad a_{j+1} , ossia a B .

OSSERVAZIONE I. È opportuno rilevare subito che, come si riconoscerà in quel che segue, le operazioni sin qui effettuate sono sufficienti a far nota la segnatura della matrice A , rispetto alla radice caratteristica 0. Invero,

se a_0 è nulla, onde 0 è l'unica radice caratteristica ed A è pseudonulla si vedrà che la segnatura di A è

$$(b_{j+1}, b_j, \dots, b_1, b_0)$$

e la forma canonica di A (tanto quella classica che la nostra) è già ottenuta.

Se a_0 non è degenerare, la segnatura di A relativa alla radice caratteristica o risulta

$$(b_{j+1}, b_j, \dots, b_1).$$

Le segnature relative alle altre radici caratteristiche si ottengono operando in modo analogo su a_0 , e la forma canonica vien così raggiunta.

OSSERVAZIONE II. Consideriamo la classe di matrici cui si è accennato in prefazione.

Per maggior chiarezza, supponiamo che questa matrice, indichiamola x , abbia ordine $n = 10$ e che il primo elemento non nullo della successione a_2, a_3, \dots, a_{10} sia, ad es., $a_{k+1} = a_4$, cioè prendiamo $k = 3$. Essendo a_1 l'unica radice caratteristica di x , la matrice $x - a_1 I$ è pseudonulla e si scrive

$$\left(\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \\ 0 & & & & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\ 0 & & & 0 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \\ 0 & & & 0 & 0 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ \hline & & & 0 & & & & a_4 & a_5 & a_6 \\ & & & & & & & 0 & a_4 & a_5 \\ & & & & & & & 0 & 0 & a_4 \\ \hline & & & 0 & & & & & & 0_3 \end{array} \right)$$

dove $0_1, 0_2, 0_3$ son 3 matrici nulle di terz'ordine.

La segnatura di $x - a_1 I$, cioè quella di x relativa alla radice caratteristica a_1 , è dunque $(3, 3, 3, 1)$ ove l'ultimo intero è manifestamente il resto della divisione di 10 per 3.

In generale, se si indica con r il resto della divisione di $n - 1$ per k e con q il quoziente, la segnatura di $x - a_1 I$, cioè quella di x relativa alla radice a_1 , risulta

$$(k, k, \dots, k, r + 1)$$

dove il numero dei termini eguali a k è q , quindi $q + 1$ è il rango di $x - a_1 I$.

Come si vede, in questo esempio non è occorsa alcuna operazione nè alcun ragionamento supplementari ⁽¹⁾.

(1) Il metodo ora indicato si estende in modo ovvio alla determinazione delle segnature di una matrice somma diretta di più matrici come x . Si ha così il risultato dell'ultimo articolo della Nota del TOGNETTI cit. (2).

Matematica (Analisi). — *Sopra le equazioni funzionali non lineari nel campo analitico*. Nota di S. CINQUINI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. L. TONELLI.

In una vasta Memoria, dedicata ai funzionali analitici, il prof. Fantappiè ⁽²⁾ si è brevemente occupato delle equazioni funzionali non lineari nel campo analitico.

Supposto che l'equazione considerata abbia una e una sola soluzione, l'A. indica una via per ricercare questa soluzione, via che consiste nel costruire una serie i cui termini sono successivamente calcolabili mediante prodotti funzionali, quando si sia preventivamente risolta un'unica equazione funzionale lineare.

Per consiglio del prof. Fantappiè, ho ripreso lo studio di queste equazioni non lineari da un altro punto di vista, proponendomi cioè di vedere sotto quali condizioni si può affermare che una tale equazione ammette soluzione.

Questo studio ha formato oggetto di una Memoria in corso di stampa ⁽³⁾; e la presente Nota ha per scopo di indicare alcuni dei risultati ottenuti, nonchè il metodo seguito, che è completamente diverso da quello del Fantappiè, perchè l'idea, che si presenterebbe a prima vista, di riprendere in esame la serie costruita dal Fantappiè, e di vedere sotto quali condizioni essa è convergente ed è soluzione dell'equazione considerata, non è la più conveniente.

Ho invece applicato, innanzi tutto, al funzionale non lineare, che compare nell'equazione in considerazione, lo sviluppo in serie dato dal Fantappiè, procedendo poi in modo analogo a quello seguito per le equazioni integrali non lineari da Lichtenstein ⁽⁴⁾, il quale ha arrecato alcune varianti ed estensioni ad un precedente lavoro di Schmidt ⁽⁵⁾. Questi Autori, come è noto,

(1) Nella seduta del 5 aprile 1936.

(2) L. FANTAPPIÈ, *I funzionali analitici*. «Memorie della R. Accademia dei Lincei», ser. VI, vol. III, fasc. XI, 1930. Ved. parte III, cap. VI, n. 89, pp. 635-38.

(3) S. CINQUINI, *Sopra le equazioni funzionali non lineari nel campo analitico*. (In corso di stampa nel «Jornal de Matemática pura e aplicada da Universidade de São Paulo», vol. I, p. 41 e sgg.

(4) L. LICHTENSTEIN, *Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integrodifferentialgleichungen*, cap. I, §§ 1-7, pp. 1-27. (Springer, 1931, Berlin).

(5) E. SCHMIDT, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*. In particolare: III Teil: *Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichungen und die Verzweigung ihrer Lösungen*. «Mathematische Annalen», Bd. LXV, 1908, pp. 370-399.

hanno basato lo studio di un'equazione non lineare sulla discussione preliminare di un'opportuna equazione integrale di Fredholm.

Nel problema in questione si presenta, invece, un'equazione funzionale lineare nel campo analitico, analoga a quella di cui il Fantappié ha già rilevato l'importanza, e che è la base del nostro studio.

A tal uopo si fa uso dell'estensione, brevemente indicata dal Fantappié⁽¹⁾, della teoria di Fredholm alle equazioni funzionali lineari nel campo analitico; i risultati del Fantappié vengono richiamati e completati, nel cap. I della mia Memoria, dedicato alle generalità, con alcune aggiunte interessanti di per sé e indispensabili per il seguito, in parte suggerite dai lavori del Pinner sulle equazioni integrali lineari nel campo analitico.

Lo studio delle equazioni non lineari viene fatto nel cap. II della Memoria, nel cui § 1 viene discussa la citata equazione lineare. Secondochè questa si trova in condizioni analoghe a quelle o del primo o del terzo teorema di Fredholm, i risultati a cui si perviene sono differenti.

Nel primo caso (*caso regolare*) l'equazione funzionale non lineare ammette, sotto opportune condizioni, una e una sola soluzione, che può calcolarsi con il metodo delle approssimazioni successive.

Nel secondo caso (*caso di diramazione*) l'esistenza di una o più soluzioni, che, se esistono, si ottengono ancora con il metodo delle approssimazioni successive, dipende da un sistema di equazioni (in numero di ν , se la citata equazione lineare ha precisamente ν soluzioni linearmente indipendenti), analoghe alle equazioni di diramazione (*Verzweigungsgleichungen*), ottenute uguagliando allo zero ν serie di potenze in $\nu + 1$ variabili. La discussione completa di questo sistema, che è in generale molto laboriosa, viene fatta, con Lichtenstein, nel caso $\nu = 1$.

La redazione del lavoro è fatta, per quanto riguarda la teoria generale dei funzionali analitici, tenendo presente la già citata Memoria del Fantappié, ed altri più recenti lavori dello stesso Autore⁽²⁾, che supporremo noti al lettore.

Nelle righe seguenti indicheremo brevemente i punti essenziali del lavoro.

I. EQUAZIONI FUNZIONALI LINEARI.

Un'equazione funzionale lineare può sempre scriversi, come ha indicato il Fantappié, nel seguente modo

(1) L. FANTAPPIÉ, *Le equazioni funzionali lineari nel campo complesso*. «Rendiconti R. Accademia dei Lincei», ser. 6^a, vol. IX, 1929, pp. 603-608; ed anche in luogo citato in (2) a p. 483, parte II, cap. IV, n. 68, pp. 567-571.

(2) L. FANTAPPIÉ, *Cenni riassuntivi sulla teoria dei funzionali analitici*, «*Studia Mathematica*», to. I, 1929, pp. 141-158; *Nuova dimostrazione della formula fondamentale per i funzionali analitici lineari*, «Rendiconti R. Accademia dei Lincei», ser. 6^a, vol. XV, 1932, pp. 850-855; *Überblick über die Theorie der analytischen Funktionalen und ihre Anwendungen*, «Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung», Bd. 43, 1933, pp. 1-25.

$$(1) \quad y(\zeta) = \lambda F[y(t); \zeta] + f(\zeta),$$

ove y è la funzione incognita, f è una funzione nota, $F[y(t); \zeta]$ è un funzionale analitico (misto) lineare, e λ è un parametro che si introduce per comodità. Indicando con $k(\zeta, \alpha)$ l'indicatrice emisimmetrica del funzionale F , cioè ponendo

$$F_t \left[\frac{1}{\alpha - t}; \zeta \right] \equiv k(\zeta, \alpha),$$

si ha per la formula fondamentale del Fantappiè

$$F[y(t); \zeta] = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} k(\zeta, t) y(t) dt = k(\zeta, t^*) y(t^*),$$

ove la separatrice C_0 è una curva chiusa la quale rinchiude tutti i punti in cui l'indicatrice $k(\zeta, t)$, considerata come funzione di t , non è definita, e lascia al di fuori tutti i punti ove $y(t)$ non è definita.

La (1) può quindi scriversi nel seguente modo

$$(1') \quad y(\zeta) = \frac{\lambda}{2\pi i} \int_{C_0} k(\zeta, t) y(t) dt + f(\zeta).$$

Supposti i piani-sfera delle due variabili complesse ζ e t sovrapposti, e indicato con π il loro comune sostegno, si supponga che siano verificate le seguenti ipotesi:

Esista nel piano π una curva chiusa rettificabile C_0 (eventualmente composta di più curve chiuse parziali) di lunghezza (complessiva) l , e tale che, indicato con A il campo chiuso costituito da tutti i punti della curva C_0 e da quelli da essa racchiusi, e con B il campo chiuso costituito da tutti i punti della curva C_0 e da quelli che essa lascia al di fuori, siano verificate le seguenti proprietà:

1°) $k(\zeta, t)$ sia una funzione analitica regolare, monodroma, per ogni coppia ζ, t , con ζ appartenente al campo chiuso A e t appartenente al campo chiuso B .

2°) $f(\zeta)$ sia in tutto il campo chiuso A funzione analitica regolare⁽¹⁾.

Sotto queste ipotesi, nelle quali la funzione f appartiene certamente al campo di definizione del funzionale F , si possono provare, per l'equazione (1), i tre teoremi di Fredholm, in modo analogo a quello indicato dal Fantappiè:

(1) È da rilevare che la curva C_0 può essere anche mobile, purchè la sua lunghezza complessiva sia inferiore ad un numero fisso, ed inoltre il massimo modulo di $k(\zeta, t)$ e quello di $f(\zeta)$ siano superiormente limitati, quando ζ sia l'affissa di un punto qualunque di A , e t sia l'affissa di un punto qualunque di B .

I) L'equazione (1) ammette per ogni λ diverso dai valori caratteristici, una e una sola soluzione $y(\lambda)$, che è funzione analitica regolare per ogni λ appartenente al campo A .

II) a) Se λ_0 è un valore caratteristico di molteplicità μ e di rango ν , l'equazione omogenea

$$(2) \quad y(\lambda) = \lambda_0 k(\lambda, t) y(t),$$

ammette ν soluzioni linearmente indipendenti, che sono funzioni analitiche regolari e monodrome per ogni λ di A . Inoltre ogni soluzione della (2) è una combinazione lineare di queste ν funzioni.

b) Sotto le ipotesi fatte in a) l'equazione omogenea associata

$$(3) \quad x(t) = \lambda_0 k(\lambda, t) x(\lambda)$$

ammette ν soluzioni linearmente indipendenti che sono funzioni analitiche regolari e monodrome per ogni t di B . Inoltre ogni soluzione della (3) è una combinazione lineare di queste ν funzioni.

III) Se λ_0 è un valore caratteristico di ordine di molteplicità μ e di rango ν , condizione necessaria e sufficiente, perchè l'equazione (1) ammetta soluzione per $\lambda = \lambda_0$, è che la funzione $f(\lambda)$ sia ortogonale a ν soluzioni $X_j(\lambda)$, ($j = 1, 2, \dots, \nu$), linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata (3), cioè si abbia

$$(3') \quad X_j(\lambda) f(\lambda) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, \nu).$$

Se queste condizioni sono soddisfatte, ogni funzione

$$y(\lambda) = f(\lambda) + \lambda_0 \frac{D(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_\nu; t_1^*, t_2, \dots, t_\nu) f(t)}{D(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu; t_1, t_2, \dots, t_\nu)} + \sum_{j=1}^{\nu} p_j Y_j(\lambda),$$

ove p_j sono ν costanti arbitrarie e $Y_j(\lambda)$ sono ν soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea (2), corrispondente alla (1), è soluzione della (1) ed è analitica regolare per ogni λ di A .

2. EQUAZIONI FUNZIONALI NON LINEARI.

Un'equazione funzionale non lineare può sempre scriversi, per comodità, nel seguente modo

$$(4) \quad y(\lambda) = F_\lambda[x(t), y(t); \lambda],$$

ove F è un funzionale analitico non lineare, misto, dipendente da un parametro λ e da due funzioni $x(t), y(t)$, la prima delle quali sia nota e l'altra incognita.

In forma concisa il problema in questione può formularsi nei seguenti termini: in corrispondenza ad ogni funzione $x(t)$ variabile, sotto opportune condizioni, in un certo campo funzionale, determinare una funzione $y(t)$ che soddisfi all'equazione (4).

Supponiamo allora che esista una coppia di funzioni $x_0(t), y_0(t)$, la prima analitica regolare, monodroma in un dominio R_1 della sfera complessa, la seconda analitica regolare, monodroma in un dominio R_2 , tali che se ζ è l'affissa di un punto qualunque di R_2 , il funzionale, che compare nella (4),

$$F_t[x(t), y(t); \zeta]$$

sia analitico (in senso stretto) regolare per ogni coppia di funzioni analitiche regolari $x(t), y(t)$ appartenenti rispettivamente la prima all'intorno (r_1, σ_1) ⁽¹⁾ di $x_0(t)$, la seconda all'intorno (r_2, σ_2) di $y_0(t)$, e sia inoltre monodromo se entrambe le funzioni $x(t), y(t)$ sono monodrome; inoltre sia

$$y_0(\zeta) \equiv F_t[x_0(t), y_0(t); \zeta].$$

Posto

$$(5) \quad k(\zeta, \alpha_1) \equiv F'_t[x_0(t), y_0(t), \alpha_1; \zeta]$$

ove $F'_t[x(t), y(t), \alpha_1; \zeta]$ è il funzionale derivato primo, parzialmente rispetto alla funzione y , e quindi $F'_t[x_0(t), y_0(t), \alpha_1; \zeta]$ è una funzione nota delle due variabili ζ e α_1 , supponiamo che esista nel piano complesso π (supposti sovrapposti i piani delle due variabili complesse ζ e α_1) una curva chiusa rettificabile C_0 (eventualmente composta di più curve chiuse parziali), di lunghezza (complessiva) l , e tale che indicato, con A il campo chiuso costituito da tutti i punti della curva C_0 e da quelli da essa racchiusi, ogni punto di A abbia per corrispondente sulla sfera complessa un punto interno alla regione $R_2(r_2)$, e, indicato con B il campo chiuso costituito da tutti i punti di C_0 e da quelli che la curva C_0 lascia al di fuori, sia verificata la seguente proprietà: $k(\zeta, \alpha_1)$ sia funzione analitica regolare monodroma, per ogni coppia ζ, α_1 , con ζ appartenente ad A ed α_1 appartenente a B .

Sotto queste ipotesi, se $\lambda = 1$ non è valore caratteristico per il nucleo $k(\zeta, \alpha_1)$, definito dalla (5), è possibile determinare un numero positivo, sufficientemente piccolo, η_1 , minore di σ_1 , in modo che, per ogni funzione analitica regolare $x(t)$ appartenente all'intorno (r_1, η_1) di $x_0(t)$, esista almeno una funzione analitica regolare $y(t)$, appartenente all'intorno (r_2, η_2) , (con $0 < \eta_2 < \sigma_2$), di $y_0(t)$ e che soddisfi all'equazione (4).

(1) L'intorno (r_1, σ_1) di una funzione $x_0(t)$, analitica regolare in R_1 , è costituito dalla totalità delle funzioni $x(t)$, analitiche regolari nella regione $R_1(r_1)$ (costituita da quei punti di R_1 , che hanno una distanza sferica, non superiore ad r_1 , dai punti dell'insieme in cui $x_0(t)$ non è definita), e che in $R_1(r_1)$ soddisfano alla disuguaglianza

$$|x(t) - x_0(t)| < \sigma_1.$$

Se poi il funzionale F e tutti i suoi funzionali derivati sono, per $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$, funzioni monodrome dei loro argomenti e inoltre la funzione $x(t)$ è monodroma, si può affermare, sotto opportune limitazioni, che la soluzione dell'equazione (4) è unica.

Se invece $\lambda = 1$ è valore caratteristico per il nucleo $k(\lambda, \alpha_1)$ non staremo a precisare, nella presente Nota, i risultati a cui si perviene, aggiungendo soltanto che l'esistenza o no di una o più soluzioni della (4) dipende da un sistema di equazioni, conseguenza immediata delle (3'), la cui discussione si presenta assai complicata, perchè in esse figura anche la funzione incognita $y(t)$ dell'equazione (4).

Matematica. — *Sulle funzioni olomorfe ammettenti due valori eccezionali finiti e sull'andamento di una funzione olomorfa in prossimità di un punto singolare essenziale isolato.* Nota I di S. MINETTI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Questa Nota fa parte e seguito a tutto un gruppo di lavori sullo stesso soggetto che ho avuto recentemente occasione di pubblicare in raccolte varie.

Essa, più precisamente, si riattacca alla mia Memoria *Sulle famiglie di funzioni analitiche ammettenti valori eccezionali e sul comportamento di una funzione uniforme in prossimità di un punto singolare essenziale isolato*, pubblicata negli « Atti della Reale Accademia d'Italia » ⁽²⁾, ove ebbi tra l'altro occasione di dimostrare una proprietà, a priori inaspettata, delle funzioni olomorfe all'interno di un dominio connesso D ove esse ammettono due valori eccezionali finiti a e b , $a \neq b$.

La proprietà cui alludo e che giova qui ricordare è precisamente la seguente:

Ad ogni coppia di domini connessi D e D' del piano delle z , di cui D' completamente interno a D , e ad ogni famiglia F di funzioni $w = f(z)$ olomorfe all'interno di D ed ivi ammettenti due valori eccezionali finiti a e b , $a \neq b$, restano associati, nel piano delle w , due cerchi C_a e C_b di centri a e b e raggi non nulli ρ_a e ρ_b , perfettamente definiti dai soli elementi D , D' , ed F e tali che l'ingresso (anche per un sol valore) di una « qualunque » $f(z)$ di F nel primo di essi comporta l'interdizione dell'ingresso della $f(z)$ nell'altro.

Da tal teorema dedurremo qui varie altre proposizioni, che portano un nuovo contributo allo studio del comportamento di una funzione uniforme in prossimità di un suo punto singolare essenziale isolato, che mi sembra rimarchevole.

(1) Nella seduta del 5 aprile 1936.

(2) Vedi « Atti Reale Accad. d'Italia », Classe Scienze, vol. VI, estratto n. 22, 1935, pp. 1293-1307.

§ 1. — Cominciamo col dichiarare che data una $f(z)$ olomorfa all'interno di un dominio connesso D ove essa ammette due valori eccezionali finiti a e b , $a \neq b$, chiameremo insieme I_λ di determinazione λ ogni insieme di punti di D ammettente come unico punto di accumulazione un punto frontiera, $z_f^{(\lambda)}$, di D e sul quale $\lim_{z \rightarrow z_f^{(\lambda)}} f(z) = \lambda$.

Si vuol intender con ciò che scelto comunque $\varepsilon > 0$ è possibile determinare un $\sigma > 0$ tale che per ogni punto z di I_λ per cui $|z - z_f^{(\lambda)}| < \sigma$ resulti $|f(z) - \lambda| < \varepsilon$. — Il valore λ sarà poi detto *valore asintotico generalizzato* della $f(z)$ relativamente al dominio D .

Ciò posto dimostreremo che:

TEOREMA 1°. — Se $f(z)$ è olomorfa in un dominio D semplicemente connesso ove ammetta due valori eccezionali finiti a e b , $a \neq b$, e se esistono infiniti insiemi $I_n^{(a)}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, di determinazione a , e infiniti insiemi $I_n^{(b)}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, di determinazione b , i cui rispettivi punti di accumulazione $z_n^{(a)}$ e $z_n^{(b)}$ ammettono sulla frontiera di D un comune punto di accumulazione z_0 la convergenza a limite della $f(z)$ su tali insiemi non potrà giammai essere uniforme.

In altre parole, sotto le poste ipotesi, non sarà possibile che, scelto comunque $\varepsilon > 0$, si possa determinare un $\eta > 0$ tale che qualunque sia n e qualunque sia z su $I_n^{(a)}$ o $I_n^{(b)}$ soddisfacente alla condizione $|z - z_n^{(a)}| < \eta$ ovvero all'altra $|z - z_n^{(b)}| < \eta$ resulti $|f(z) - a| < \varepsilon$ e contemporaneamente $|f(z) - b| < \varepsilon$.

Consideriamo infatti, ciò che non lede la generalità della questione, il dominio D_1 , del piano delle z , definito, in coordinate polari dalle condizioni $0 < \rho < 1$; $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, e una $f(z)$ del tipo indicato nell'enunciato del teorema e per cui sia ulteriormente $z_0 \equiv 1$, e $z_n^{(a)} = z_n^{(b)} = 1$.

Sia G la famiglia di funzioni $g_n(z) = f(z_n^{(a)})$, dove per $z_n^{(a)}$ si sia scelta, ad esempio, quella, fra le sue n determinazioni

$$z_n^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

che corrisponde al valore $k = 0$.

Le funzioni $g_n(z)$ saranno anch'esse olomorfe in D_1 e poichè, per ogni n , i valori che esse acquistano in D_1 sono i valori che $f(z)$ acquista nel dominio D_n per cui $0 < \rho < 1$; $0 < \theta < \frac{\pi}{2n}$, ammetteranno anch'esse in D_1 , a e b come valori eccezionali.

Ciò posto si consideri un dominio D'_1 per cui $\varepsilon \leq \rho \leq (1 - \varepsilon)$ ed $\varepsilon \leq \theta \leq \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$, con $\varepsilon > 0$, completamente interno a D_1 , così che i va-

lori che $g_n(\zeta)$ acquista in D'_1 sono i valori che $f(\zeta)$ acquista nel dominio D'_n per cui $\varepsilon^{\frac{1}{n}} \leq \rho \leq (1 - \varepsilon)^{\frac{1}{n}}$ e $\frac{\varepsilon}{n} \leq \theta \leq \frac{1}{n} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right)$.

Siano allora ρ_a e ρ_b i due raggi (non nulli) dei cerchi C_a e C_b di cui è parola nel teorema ricordato nella precedente introduzione e che si riferiscono alla famiglia G e ai domini D_1 e D'_1 ; sia ρ il minore dei due e si provi a supporre che scelto comunque $\sigma > 0$ esista un $\eta > 0$ tale che, qualunque sia n e qualunque sia ζ di $I_n^{(a)}$ o di $I_n^{(b)}$ soddisfacenti all'una o all'altra delle due condizioni $|\zeta - \zeta_n^{(a)}| < \eta$ e $|\zeta - \zeta_n^{(b)}| < \eta$ si abbia $|f(\zeta) - a| < \sigma$ e $|f(\zeta) - b| < \sigma$.

In tal caso ricordando che i punti $\zeta_n^{(a)}$ e $\zeta_n^{(b)}$ hanno $\zeta_0 \equiv 1$ per comune punto di accumulazione è evidente che per n sufficientemente grande poichè

$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \varepsilon)^{\frac{1}{n}} = 1$, in D'_1 si troverebbero sempre coppie di punti

$\xi_n^{(a)}$ e $\xi_n^{(b)}$ ove la funzione $g_n(\zeta)$ acquista i valori che la $f(\zeta)$ acquista a sua volta in coppie di punti $\xi_n^{(a)'}$ e $\xi_n^{(b)'}$, corrispondenti ai primi, appartenenti ad $I_n^{(a)}$ e $I_n^{(b)}$, tali che $|\xi_n^{(a)} - \xi_n^{(a)'}| < \eta$, $|\xi_n^{(b)} - \xi_n^{(b)'}| < \eta$ e pei quali quindi

$$|f(\xi_n^{(a)'}) - a| < \sigma \quad \text{e} \quad |f(\xi_n^{(b)'}) - b| < \sigma.$$

I punti corrispondenti $\xi_n^{(a)}$ e $\xi_n^{(b)}$ sarebbero dunque tali che

$$|g_n(\xi_n^{(a)}) - a| < \sigma \quad \text{e} \quad |g_n(\xi_n^{(b)}) - b| < \sigma$$

cosicchè se $\sigma < \rho$ i valori delle $g_n(\zeta)$, a partire almeno da un certo rango, invaderebbero, nel piano delle w sia il cerchio C_a di centro a e raggio ρ_a , come quello, C_b , di centro b e raggio ρ_b .

Ma ciò è assurdo pel teorema ricordato nella precedente introduzione e l'asserto è provato.

Se ne deduce inoltre che:

TEOREMA II. — Se $f(\zeta)$ ammette in $\zeta = 0$ un punto singolare essenziale isolato ed è olomorfa in un settore AOB di vertice O, se in questo settore non prende nè il valore a nè quello b , $a \neq b$ finiti, e se infine tali due valori eccezionali sono per essa valori assintotici generalizzati rispettivamente su due successioni di insiemi $I_n^{(a)}$ e $I_n^{(b)}$ di determinazione a e b , aventi $\zeta = 0$ per comune punto di accumulazione e completamente interni ad un settore A'OB' interno ad AOB, la convergenza a limite della $f(\zeta)$ verso a sugli insiemi $I_n^{(a)}$, e quella verso b sugli insiemi $I_n^{(b)}$, non potranno essere contemporaneamente uniformi.

§ 2. — Si consideri ora una $f(\zeta)$ sempre ammettente in $\zeta = 0$ un punto singolare essenziale isolato ed olomorfa in un settore AOB di vertice O ove essa non prende due valori finiti distinti a e b , e si supponga che esista, ad esempio, su un semiraggio OL interno ad AOB, un insieme p. es. nu-

merabile di punti $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dots$ tendenti ad o e sul quale $f(\zeta)$ tenda, per $n \rightarrow \infty$, al valore eccezionale a . — Tale valore a sarà dunque per la $f(\zeta)$, valore assintotico generalizzato. È chiaro intanto che in tal caso può anche dirsi che esistono per la $f(\zeta)$ una infinità numerabile di insiemi $I_n^{(a)}$ di determinazione a ognuno de' quali ammette il punto $\zeta = o$ per proprio (unico) punto di accumulazione e che si trovano nelle condizioni volute dal precedente teorema. Su tali insiemi, inoltre, la convergenza al limite a della $f(\zeta)$ sarà ovviamente uniforme. Considerato allora, in particolare, un qualunque altro semiraggio OL' pure interno ad AOB è chiaro che non è possibile che su OL' esista un insieme di punti $\zeta'_1, \zeta'_2, \dots, \zeta'_n, \dots$ convergenti a zero e sul quale $f(\zeta)$ tenda per $n \rightarrow \infty$, e quindi per $\zeta'_n \rightarrow o$, al limite b .

Se infatti un tale insieme esistesse, verrebbe ad esistere anche una infinità numerabile di insiemi $I_n^{(b)}$ di determinazione b che insieme agli $I_n^{(a)}$ sarebbero interni ad un settore $A'O'B'$ interno ad AOB , ognuno de' quali ammette come proprio (ed unico) punto di accumulazione il punto $\zeta = o$ e sui quali ovviamente la convergenza al limite b della $f(\zeta)$ sarebbe pure uniforme.

Ma ciò è impossibile pel precedente teorema II. Dunque:

TEOREMA III. — *Se $f(\zeta)$ ammette il punto O , $\zeta = o$, come punto singolare essenziale, se è olomorfa in un settore AOB di vertice O ed ivi non prende due valori finiti distinti a e b e se infine uno dei valori limiti della $f(\zeta)$ su un semiraggio OL interno ad AOB è il valore eccezionale a , nessuno dei valori limiti della $f(\zeta)$ su qualunque altro semiraggio OL' interno ad AOB , distinto o coincidente con OL , potrà essere eguale a b .*

Osservazione 1^a. — È ovvio che a tal teorema potrebbe darsi forma più generale. Ne lasciamo cura al lettore.

Osservazione 2^a. — Gioverà coglier qui occasione per ricordare un teorema che per vie completamente diverse, nello stesso ordine di idee, ebbe occasione di stabilire il Montel⁽¹⁾: *Se, quando ζ tende a zero su OL , $f(\zeta)$ ammette uno dei numeri a, b, ∞ per uno dei suoi valori limiti, essa l'ammette anche su ogni altro raggio OL' .*

§ 3. — Seguitiamo ora a trarre qualche altra espressiva conseguenza dei precedenti teoremi, che aggiungerà nuove conoscenze sull'andamento di una funzione in prossimità di una singolarità essenziale isolata.

Si consideri sempre una $f(\zeta)$ avente nell'origine un punto singolare essenziale isolato, olomorfa in un settore AOB di vertice O , ove non prende due valori eccezionali finiti a e b , $a \neq b$, e si supponga che uno dei due, ad es. a , sia rispetto ad AOB , valore assintotico generalizzato interno, sia cioè valore assintotico generalizzato su di un insieme I_a di determinazione a , che sia completamente interno ad AOB e cioè interno ad un settore $A'O'B'$ interno ad AOB .

(1) Vedi, ad es., G. JULIA, *Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé*. Paris, Gauthier-Villars, 1924, p. 99, n. 64.

Dico che in tali condizioni la $f(z)$ nell'intorno dell'origine e all'interno di un qualunque settore $A'OB'$ interno ad AOB deve necessariamente ammettere tutto un dominio di valori eccezionali contenente il valore b al suo interno.

Se infatti ciò non accadesse dovrebbe necessariamente esistere un insieme I di punti $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n, \dots$ interni ad $A'OB'$ e convergenti ad O tali che il corrispondente insieme di valori $f(z_1), f(z_2), \dots, f(z_n), \dots$, avrebbe b , nel piano delle $\omega = f(z)$ come proprio punto di accumulazione. Ma allora con ragionamenti perfettamente analoghi a quelli dianzi sviluppati ed il cui schema si troverà d'altronde completamente esposto in dettaglio nella dimostrazione del Teorema VII che si darà nella Nota II su questo stesso soggetto, si vede agevolmente che si cadrebbe in contraddizione con l'asserto del teorema generale ricordato nell'Introduzione. Dunque:

TEOREMA IV. — Se $f(z)$ è olomorfa in un settore AOB di vertice O , se O è suo punto singolare essenziale isolato, se in AOB ammette due valori eccezionali distinti a e b di cui uno, p. es. a , è suo valore asintotico generalizzato interno, allora nell'intorno di O e all'interno di un qualunque settore $A'OB'$ interno ad AOB la $f(z)$ ammette tutto un dominio di valori eccezionali del piano delle $\omega = f(z)$ contenente il valore b al suo interno.

Se ne deduce altresì l'altro teorema:

TEOREMA V. — Se nel dominio di un settore AOB una $f(z)$, che ha O come punto singolare essenziale isolato, è olomorfa, e se all'interno di AOB e nell'intorno di O essa ammettesse due soli valori eccezionali finiti distinti a e b (supposto ciò possibile), nè l'uno nè l'altro di tali due valori potrebbero essere valori asintotici generalizzati interni.

Se infatti anche uno solo dei due valori a e b fosse valore asintotico generalizzato interno, pel precedente teorema la $f(z)$, nell'intorno di O , e all'interno di un qualunque settore $A'OB'$ interno ad AOB non potrebbe ammettere a e b come soli valori eccezionali.

Osservazione 1^a — Se ne conchiude subito l'impossibilità dell'ipotesi ammessa nell'enunciato del teorema.

Osservazione 2^a. — Questo teorema completa utilmente altri teoremi che nello stesso ordine di idee ebbi occasione di dare nella mia Memoria pubblicata negli « Atti della Reale Accademia d'Italia », citata nell'introduzione.

Osservazione 3^a. — È ovvio che l'ipotetico settore AOB di cui si parla nell'annunciato del teorema non potrebbe mai essere un settore di Julia; in un siffatto settore infatti la $f(z)$ acquista (infinite volte) ogni valore finito, uno al più eccettuato.

Matematica. — *Sulle potenze di una matrice del secondo ordine.* Nota di L. TOSCANO, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. GIORGI.

1. Sia

$$\Phi = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix}$$

una matrice del secondo ordine, simbolo di una trasformazione lineare omogenea, e Φ^n rappresenti la sua potenza n^{ma} .

Indicando con 2γ l'invariante diagonale $\varphi_{11} + \varphi_{22}$ e con δ il determinante o modulo della matrice $\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}\varphi_{21}$, valgono le seguenti espressioni per Φ^n ⁽²⁾:

$$\Phi^2 - 2\gamma\Phi + \delta = 0 \quad (\text{Cayley})$$

$$(1) \quad \Phi^n = p_n \Phi + q_n$$

con

$$p_{n-1} = \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^{m-1} \binom{n-m-1}{m-1} (2\gamma)^{n-2m} \delta^{m-1}$$

$$q_n = -\delta p_{n-1},$$

e

$$(2) \quad \Phi^n = \begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\rho_1^{n+1} - \rho_2^{n+1}}{\rho_1 - \rho_2} - \varphi_{22} \frac{\rho_1^n - \rho_2^n}{\rho_1 - \rho_2} & \varphi_{12} \frac{\rho_1^n - \rho_2^n}{\rho_1 - \rho_2} \\ \varphi_{21} \frac{\rho_1^n - \rho_2^n}{\rho_1 - \rho_2} & \frac{\rho_1^{n+1} - \rho_2^{n+1}}{\rho_1 - \rho_2} - \varphi_{11} \frac{\rho_1^n - \rho_2^n}{\rho_1 - \rho_2} \end{vmatrix},$$

essendo ρ_1 e ρ_2 le radici dell'equazione caratteristica

$$D(\rho) = \begin{vmatrix} \varphi_{11} - \rho & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} - \rho \end{vmatrix} = 0.$$

(1) Nella seduta del 5 aprile 1936.

(2) E. PORCU-TORTORINI, *Sulle potenze delle matrici di secondo ordine.* «Atti Pontificia Accad. Scienze Nuovi Lincei», anno LXXX, pp. 231-238, 1927; S. MARTIS-BIDDAU, *Ricerca di un'espressione razionale per le potenze di una matrice di secondo ordine.* «Rend. R. Acc. Lincei», ser. 6^a, vol. VIII, pp. 130-133, 1928.

Inoltre S. Martis-Biddau applicando la (2) ha determinato i valori di ψ_{ik} in funzione dell'invariante 2γ e del discriminante della $D(\rho) = 0$

$$R = \gamma^2 - \delta = \frac{(\varphi_{11} - \varphi_{22})^2 + 4\varphi_{12}\varphi_{21}}{4}.$$

Ma tanto la (1) quanto quest'ultima determinazione di ψ_{ik} si possono subito ricavare insieme ad altre espressioni per Φ^n solo che le (1) e (2) si presentino in opportuna forma che permetta di sfruttare il formulario delle successioni ricorrenti del secondo ordine.

2. Sia

$$x^2 - px + q = 0$$

l'equazione generatrice di una successione ricorrente del secondo ordine, lineare ed omogenea,

$$U_0, U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$$

di elementi iniziali $U_0 = 0, U_1 = 1$.

Valgono le relazioni

$$U_n = pU_{n-1} - qU_{n-2}$$

$$x^n = U_n x - qU_{n-1}$$

$$U_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2},$$

essendo x_1 e x_2 le radici dell'equazione generatrice.

Ponendo

$$p = 2\gamma, \quad q = \delta, \quad x = \Phi, \quad x_1 = \rho_1, \quad x_2 = \rho_2,$$

la (1) diventa

$$(3) \quad \Phi_n = U_n \Phi - \delta U_{n-1}$$

e la (2)

$$(4) \quad \Phi^n = \begin{vmatrix} U_{n+1} - \varphi_{22} U_n & \varphi_{12} U_n \\ \varphi_{21} U_n & U_{n+1} - \varphi_{11} U_n \end{vmatrix}.$$

Per avere quindi espressioni di Φ^n basta possederne per U_n , e in ciò il formulario per le successioni ricorrenti non difetta.

Precisamente si conoscono le seguenti espressioni di U_n ⁽¹⁾

(1) L. TOSCANO, *Sulla integrazione delle successioni ricorrenti del secondo ordine, lineari ed omogenee*. «Rend. R. Acc. Lincei», ser. 6^a, vol. XIX, pp. 849-854, 1934.

$$(5) \quad U_n = \begin{vmatrix} p & q & 0 & 0, \dots, 0 \\ 1 & p & q & 0, \dots, 0 \\ 0 & 1 & p & q, \dots, 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0, \dots, p \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$(6) \quad U_n = \sum_{r=0}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} (-1)^r \binom{n-r-1}{r} p^{n-2r-1} q^r$$

$$(7) \quad U_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} \binom{n}{2r+1} p^{n-2r-1} \Delta^r$$

$$(8) \quad U_{2n} = p \sum_{r=0}^{n-1} \binom{2n-r-1}{r} q^r \Delta^{n-r-1}$$

$$(9) \quad U_{2n-1} = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{2n-1}{2n-r-1} \binom{2n-r-1}{r} q^r \Delta^{n-r-1}$$

$$(10) \quad U_n = \frac{q^{\frac{n-1}{2}} \sin n\omega}{\sin \omega},$$

con $\Delta = p^2 - 4q$, $\cos \omega = \frac{p}{2q^{\frac{1}{2}}}$.

E sostituendo nelle (3) e (4) questi valori di U_n con $p = 2\gamma$, $q = \delta$, $\Delta = 4R$, si hanno varie espressioni di Φ^n .

La (6) applicata alla (3) e la (7) alla (4) danno i risultati di E. Porcu-Tortrini e S. Martis-Biddau: le altre sostituzioni danno nuove espressioni.

Nel caso parabolico $p_1 = p_2$ si hanno facili espressioni limite.

Matematica. — *Cinematica integrale.* Nota di W. BLASCHKE, presentata dal Corrisp. E. BOMPIANI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica (Geometria). — *Un'osservazione sui plurigeneri delle superficie elettriche di genere $p_g = 0$.* Nota di L. CAMPEDELLI, presentata dal Socio F. ENRIQUES.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica (Algebra). — *Sulla riduzione delle matrici a forma canonica*. Nota II di S. CHERUBINO, presentata dal corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Di una generalizzazione delle formule di Newton e di Waring*. Nota di G. PALAMÀ, presentata dal Socio U. AMALDI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica (Analisi). — *A proposito di un teorema di Caccioppoli sulla rappresentazione conforme delle superficie*. Nota di G. SCORZA-DRAGONI, presentata dal corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulle omografie vettoriali con applicazioni cinematiche negli spazi S_n* . Nota I. *Sulle assiali e dilatazioni*. Nota di M. MANARINI, presentata ⁽¹⁾ dal corrisp. P. BURGATTI.

In una mia Memoria ⁽²⁾, che istituisce le basi del calcolo plurivettoriale in un S_n con metodo diretto o assoluto, cioè indipendentemente da ogni sistema di riferimento, ho fatto vedere come questo calcolo si presti vantaggiosamente, e nella maniera più analoga a quella seguita per il metodo vettoriale in S_3 , alla trattazione della cinematica dei sistemi rigidi negli spazi euclidei ad n dimensioni, limitandomi alle questioni fondamentali. Il calcolo suddetto fu da me ulteriormente sviluppato in successivi lavori e nell'indirizzo intrinseco per trattare questioni involgenti la geometria di Riemann e di Weyl; ed ora una Nota del signor Woinaroskÿ ⁽³⁾ mi dà occasione di ritornare sulla cinematica dei sistemi rigidi negli spazi S_n ove stabilisco una formula generale per la velocità di trascinamento e tratto, nel caso di n necessariamente pari, la composizione dei moti istantanei di

(1) Nella seduta del 5 aprile 1936.

(2) M. MANARINI, *Sul calcolo plurivettoriale negli spazi S_n ed applicazioni alla meccanica dei sistemi rigidi*. « Annali di Matematica pura ed applicata », ser. IV, to. XII, 1933-34, pp. 75-115.

(3) R. WOINAROSKÿ, *La cinématique du corps solide dans un espace euclidien à n dimensions*. « Rendiconti Reale Acc. dei Lincei », ser. 6^a, vol. 22, 1935, pp. 34-37.

rotazione, generalizzando la teoria della composizione delle rotazioni istantanee per la figura piana nel piano. All'uopo dovrò prima intrattenermi su alcune utili questioni relative alla ricerca delle direzioni unite per speciali omografie vettoriali in un S_n . In particolare, sebbene non rappresenti un caso che qui direttamente mi interessa per le applicazioni cinematiche in vista, mi soffermo sulla questione delle direzioni unite delle dilatazioni, onde darne una sistemazione semplice.

1. È ben noto che in uno spazio S_n le direzioni unite per un'omografia vettoriale α sono in relazione con le radici reali dell'equazione di grado n in x :

$$(1) \quad I_n(\alpha - x) = 0,$$

ed in particolare che le direzioni nulle dipendono dalle radici nulle di questa equazione.

Il caso generale, riguardante un'omografia α qualunque, per radici multiple reali di (1) ed ancora lo studio relativo alle radici multiple complesse, è stato trattato da B. De Finetti con un'interessante laboriosa discussione ⁽¹⁾. In essa, generalizzando un risultato da me stabilito per le dilatazioni nel caso della radice doppia ⁽²⁾, si dimostra l'esistenza di uno spazio invariante S_c , con dimensione c , in corrispondenza della radice b di (1) qualora questa sia reale e multipla di ordine c , non escluso che sia nulla, ed ancora si dimostra l'esistenza di uno spazio invariante S_{2c} , di dimensione $2c$, in corrispondenza della radice b di (1), qualora questa sia complessa e multipla di ordine c , completando in quest'ultimo caso un risultato ottenuto dal Burgatti ⁽³⁾.

In vista delle applicazioni cinematiche che seguiranno, ove entrano in campo particolari omografie, trovo opportuno, al fine di presentare le cose in una forma semplice ed esauriente, di trattare direttamente la questione per i casi particolari che mi interessano, tanto più che i risultati appariranno in una forma particolarmente semplice ed espressiva, riuscendo in tal modo interessanti anche per se stessi.

Ritorno anzitutto sul caso di α omografia assiale, già in parte da me trattato in altro lavoro ⁽⁴⁾, con il duplice scopo di perfezionarne la dimostrazione diretta del teorema che, in corrispondenza della radice nulla multipla

(1) B. DE FINETTI, *Caratteristica di un'omografia vettoriale*. « Atti della Pont. Acc. delle Scienze, Nuovi Lincei », anno LXXXII, 1929, pp. 387-395; *Studio delle omografie vettoriali in relazione alle radici di $I_n(\alpha - x) = 0$* , « Ibidem », pp. 408-417.

(2) M. MANARINI, *Sulle direzioni unite delle dilatazioni in un S_n euclideo*. « Boll. Un. Mat. Ital. », anno VII, 1928, pp. 98-100.

(3) P. BURGATTI, *Sulle equazioni algebriche a matrice*. « Boll. Un. Mat. Ital. », anno VII, 1928, pp. 65-69.

(4) Cfr. *Sul calcolo plurivettoriale ecc.*, loc. cit., p. 80.

di ordine c per (1) (c necessariamente pari o dispari con le dimensioni dello spazio S_n), si ha per α uno spazio S_c di direzioni nulle ed ancora di trattare il caso delle radici non nulle di (1), completando un risultato ottenuto dal Burgatti nella Nota citata.

Dal De Finetti il suddetto numero c , ordine di molteplicità della radice nulla per l'equazione $I_n(\alpha - x) = 0$, anche per omografie non assiali, è chiamato *caratteristica di α* ⁽¹⁾.

Consideriamo dunque l'assiale γ di S_n e sia c la sua caratteristica non nulla; consegue che γ è necessariamente degenerare, cosicchè esisterà per essa un vettore non nullo a_1 direzione nulla:

$$\gamma a_1 = 0.$$

L'ipotesi che lo zero sia radice multipla di ordine c per $I_n(\gamma - x) = 0$, comporta che sono nulli i successivi invarianti di γ di ordine decrescente a partire dall'ennesimo fino a quello di ordine $n - c + 1$, essendo invece $I_{n-c} \gamma \neq 0$.

Se $c \geq 2$ risulta in particolare $I_{n-1} \gamma = 0$, cosicchè, scelta una ennupla di vettori linearmente indipendenti $a_1, b_2, b_3, \dots, b_n$, avendosi per definizione di $I_{n-1} \gamma$:

$$(2) \quad V(a_1, b_2, \dots, b_n) \cdot I_{n-1} \gamma = V(\gamma a_1, \gamma b_2, \dots, \gamma b_{n-1}, b_n) + \\ + V(\gamma a_1, \gamma b_2, \dots, \gamma b_{n-2}, b_{n-1}, \gamma b_n) + \dots + \\ + V(a_1, \gamma b_2, \gamma b_3, \dots, \gamma b_n)^{(2)},$$

risulta nel caso nostro

$$V(a_1, \gamma b_2, \gamma b_3, \dots, \gamma b_n) = 0.$$

Pertanto i vettori $a_1, \gamma b_2, \dots, \gamma b_n$ sono linearmente dipendenti, onde esisteranno n numeri reali non tutti nulli c_1, c_2, \dots, c_n tali che:

$$c_1 a_1 + c_2 \gamma b_2 + \dots + c_n \gamma b_n = 0,$$

da cui, posto

$$a_2 = -(c_2 b_2 + c_3 b_3 + \dots + c_n b_n),$$

necessariamente non nullo e linearmente indipendente da a_1 , consegue

$$\gamma a_2 = c_1 a_1.$$

(1) Cfr. *Caratteristica di un'omografia vettoriale*, loc. cit. p. 387. Il numero $n - c$ corrisponde alla caratteristica in senso algebrico della matrice dell'omografia α nella rappresentazione cartesiana di questa.

(2) Il simbolo $V(\dots)$ sta ad indicare il volume del parallelepipedo ad n dimensioni i cui spigoli successivi uscenti da un punto arbitrario sono uguali in grandezza direzione e verso ai vettori entro parentesi.

Per essere γ assiale si ha

$$\gamma \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_2 \times \gamma \mathbf{a}_1 = 0$$

e risulta che dovrà essere

$$\gamma \mathbf{a}_2 = 0, \quad \text{ossia} \quad c_1 = 0.$$

Dunque le condizioni $I_n \gamma = I_{n-1} \gamma = 0$ portano all'esistenza del vettore \mathbf{a}_2 , direzione nulla per γ linearmente indipendente da \mathbf{a}_1 .

Così seguitando, in corrispondenza della radice nulla multipla di ordine c di $I_n(\gamma - x) = 0$, per il fatto che risulta $I_n \gamma = I_{n-1} \gamma = \dots = I_{n-c} \gamma = 0$ si comprova l'esistenza di c vettori linearmente indipendenti $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_c$, direzioni nulle per γ ; inoltre, per il fatto che $I_{n-c} \gamma \neq 0$ risulta, che non può esistere per γ una ulteriore direzione nulla \mathbf{a}_{c+1} linearmente indipendente dalle precedenti, ricorrendo alla relazione analoga a (2) che definisce $I_{n-c} \gamma$, formata con vettori linearmente indipendenti fra i quali figurino $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_c, \mathbf{a}_{c+1}$. Di qui concludiamo che *in corrispondenza della caratteristica c per γ si ha l'esistenza di uno spazio S_c di direzioni nulle per γ , con dimensione c di parità concorde alle dimensioni di S_n , con l'esclusione che ne possa esistere uno con dimensione maggiore di c .*

Ricordando la definizione di rango ⁽¹⁾ per un'omografia, possiamo affermare che *per le assiali il rango e la caratteristica coincidono*, cosa che in generale non avviene per un'omografia qualunque, come risulta dalla menzionata discussione del De Finetti.

2. Il teorema precedente si completa con quanto segue. È noto che le radici non nulle dell'equazione $I_n(\gamma - x) = 0$, con γ assiale, non possono essere che immaginarie pure, cioè del tipo $\pm qi$. Il caso delle radici distinte è stato considerato dal prof. Burgatti dimostrando ⁽²⁾ che a ciascuna coppia $\pm qi$ corrisponde per γ un particolare spazio S_2 (piano) invariante; trattiamo qui il caso generale delle radici multiple. Se $\pm qi$ sono radici multiple dell'ordine c per l'equazione $I_n(\gamma - x) = 0$, si può dimostrare ⁽³⁾ che l'omografia $\beta = \gamma^2 + q^2$ (dilatazione) risulta con caratteristica $2c$. Ragionando come al numero precedente (ed è quello che poi faremo al numero seguente per le dilatazioni in generale) si dimostra immediatamente che $2c$ è pure il rango dell'omografia β , in quanto per essa esiste uno spazio S_{2c} e non con dimensione maggiore, di direzioni nulle.

(1) Rango di un'omografia vettoriale è il numero dei vettori linearmente indipendenti che vengono da essa trasformati nel vettore nullo.

(2) Cfr. P. BURGATTI, *Sulle equazioni algebriche a matrice*, loc. cit., p. 69.

(3) Cfr. B. DE FINETTI, *Studio delle omografie vettoriali in relazione alle radici di $I_n(\alpha - x) = 0$* , loc. cit., p. 412.

Se u è un versore direzione nulla per β , posto

$$\gamma u = -q v,$$

con v opportuno, si ricava subito:

$$\gamma v = q u, \quad \beta v = 0, \quad v^2 = 1, \quad u \times v = 0,$$

cosicchè v è pure versore direzione nulla per β .

Possiamo dunque affermare che in corrispondenza della radice q_i multipla dell'ordine c dell'equazione $I_n(\gamma - x) = 0$, abbiamo per γ uno spazio invariante S_{2c} con dimensione $2c$ e non con dimensione maggiore; i $2c$ versori che lo determinano sono coppie u_i, v_i per le quali si ha

$$\begin{aligned} \gamma u_i &= -q_i v_i \\ \gamma v_i &= q_i u_i \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, c).$$

Cosicchè data in S_n l'omografia assiale γ di caratteristica c , se $\pm q_i$ sono le $2v$ radici immaginarie non nulle di $I_n(\gamma - x) = 0$, dell'ordine rispettivo c_s di molteplicità con $c + \sum_{s=1}^v 2c_s = n$, possiamo concludere con l'esistenza di c versori a_i ed $\frac{n-c}{2}$ coppie di versori $u_i^{(s)}, v_i^{(s)}$, linearmente indipendenti, per cui si ha:

$$\begin{aligned} \gamma a_i &= 0, & i &= 1, 2, \dots, c \\ (3) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma u_i^{(s)} &= -q_s v_i^{(s)} \\ \gamma v_i^{(s)} &= q_s u_i^{(s)} \end{aligned} \right. & i &= 1, 2, \dots, c_s \\ & & s &= 1, 2, \dots, v. \end{aligned}$$

Gli spazi S_c ed S_{n-c} determinati dai versori a_i e $u_i^{(s)}, v_i^{(s)}$ sono perpendicolari fra loro, essendo ad es.

$$\gamma u_i^{(s)} \times a_i = -u_i^{(s)} \times \gamma a_i = 0.$$

Per γ non degenerare (n necessariamente pari) è $c = 0$ ed esistono soltanto i v spazi invarianti S_{2c_s} , messi in evidenza dal secondo gruppo delle relazioni (3).

(1) Del resto, stando con le definizioni e le conclusioni della discussione del De Finetti, le direzioni primitive della dilatazione β sono semplici, e consegue ancora l'esistenza dei $2c$ vettori linearmente indipendenti presentantisi a coppie q_1, q_2 per i quali si ha:

$$\gamma q_1 = q q_2, \quad \gamma q_2 = -q q_1.$$

Ritornando a γ qualunque, anche degenerare, riferendo lo spazio S_n ai versori $\mathbf{a}_i, \mathbf{u}_i^{(s)}, \mathbf{v}_i^{(s)}$ dianzi considerati, l'omografia γ può essere rappresentata da una matrice che generalizza la forma indicata dal prof. Burgatti nel caso delle radici distinte nella Nota che abbiamo citato; detta matrice risulterà con c linee e c colonne di elementi nulli.

3. Con una dimostrazione identica a quella seguita precedentemente al n. 1 per le assiali γ , si può stabilire direttamente il risultato ivi ottenuto anche per le dilatazioni α , in conseguenza del fatto che è $K\alpha = \alpha$; cosicchè anche *per le dilatazioni il rango coincide con la caratteristica*.

Ne consegue immediatamente che, *supposto α una dilatazione, se h è una radice reale multipla di ordine c per l'equazione $I_n(\alpha - x) = 0$ (la quale, come è ben noto, non ammette in tal caso radici complesse), ad essa radice corrisponde uno spazio S_c (e non con dimensione maggiore) di direzioni unite α , tali cioè che $\alpha\alpha = h\alpha$.*

Invero, la dilatazione $\beta = \alpha - h$ risulta con caratteristica c a cui corrisponde l'esistenza dello spazio S_c (e non con dimensione maggiore) di direzioni nulle α per β per le quali si ha cioè $\beta\alpha = 0$ e di conseguenza $\alpha\alpha = h\alpha$.

Allora, *anche nel caso delle radici reali multiple dell'equazione $I_n(\alpha - x) = 0$, con α dilatazione, si può determinare per α l'ennupla di direzioni unite ortogonali*, spesso utile nelle applicazioni.

Questo risultato per le dilatazioni è stato stabilito dal De Finetti nella prima delle Note citate (generalizzando il caso particolare della radice doppia da me studiato) come applicazione della discussione generale da lui svolta. Come si è visto, procedendo direttamente, la dimostrazione risulta assai semplice ed identica a quella da me seguita per stabilire l'analogo risultato per le assiali. E questo stesso metodo, con piccoli accorgimenti, si presta anche allo studio degli altri casi particolari utili nella applicazione cinematica della composizione delle rotazioni istantanee negli spazi S_n , come si vedrà.

Meccanica. — *Un teorema sulle coazioni elastiche.* Nota di C. TAGLIACOZZO, presentata ⁽¹⁾ del Socio G. CASTELNUOVO.

1. È ben noto che l'energia potenziale elastica Φ di un solido risulta, nel caso generale (*stato naturale* non coincidente con quello *non deformato*), composta di due termini distinti, dei quali l'uno, Φ_0 (*energia vincolata*), è funzione soltanto delle componenti della deformazione

$$(1) \quad (\epsilon_x)_0, (\epsilon_y)_0, (\epsilon_z)_0, (\gamma_{xy})_0, (\gamma_{yz})_0, (\gamma_{zx})_0,$$

preesistente nello stato naturale, o delle corrispondenti componenti speciali di tensione

$$(1') \quad (\sigma_x)_0, (\sigma_y)_0, (\sigma_z)_0, (\tau_{xy})_0, (\tau_{yz})_0, (\tau_{zx})_0;$$

mentre l'altro, L (*lavoro di deformazione*), dipende solamente dalla variazione di configurazione che il solido subisce nel passare, per l'azione delle forze esterne, dallo stato naturale a quello attuale; ed è quindi funzione delle componenti

$$(2) \quad \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$$

della deformazione prodotta dalle forze esterne, o delle corrispondenti componenti speciali di tensione

$$(2') \quad \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}.$$

Precisamente, si ha per l'energia vincolata l'espressione

$$\Phi_0 = \iiint_V \varphi_0 \cdot dV,$$

e per il lavoro di deformazione l'altra

$$L = \iiint_V \varphi \cdot dV,$$

nelle quali indicano: V lo spazio connesso occupato dal solido, φ_0 e φ , rispettivamente, l'energia vincolata unitaria ed il lavoro di deformazione

(1) Nella seduta del 5 aprile 1936.

unitario, forme quadratiche essenzialmente positive, la prima delle (1) (o delle (1')), la seconda delle (2) (o delle (2')).

Per l'analisi della variazione di configurazione prodotta dalle forze esterne, il teorema del MENABREA, che si compendia nelle due relazioni

$$\delta_{\sigma} L = 0 \quad , \quad \delta_{\sigma}^2 L > 0$$

(con l'indice σ si vuole brevemente indicare che la variazione si è operata nelle componenti della tensione), permette agevolmente la determinazione delle reazioni iperstatiche; mentre quello del CASTIGLIANO, espresso dalla uguaglianza

$$f = \frac{\partial L}{\partial F}$$

(F denota una forza esterna qualunque — che può essere anche fittizia — applicata nel punto generico P del solido, ed f lo spostamento di P nella direzione di F), costituisce un procedimento per calcolare gli spostamenti che i punti del sistema subiscono nella deformazione causata dalle forze esterne.

Per l'analisi dello stato naturale, il teorema del COLONNETTI compie lo stesso ufficio compiuto da quello del MENABREA, nella analisi precedente.

È noto che uno stato di *coazione elastica* in un solido può, in generale, essere concepito, imprimendo (idealmente) ai singoli elementi, che compongono il solido, certe deformazioni non congruenti di componenti (*componenti della deformazione impressa*)

$$(3) \quad e_x, e_y, e_z, g_{xy}, g_{yz}, g_{zx} :$$

dovendo la compagine del sistema rimanere inalterata, i singoli elementi reagiscono mutuamente inducendo una distribuzione di tensioni, le cui componenti speciali (1') producono la deformazione elastica di componenti (1), e danno origine alla energia vincolata Φ_0 .

Il teorema del COLONNETTI afferma che ⁽¹⁾

le tensioni interne che caratterizzano lo stato naturale sono quelle che rendono minima l'espressione

$$\Phi_0 + \iiint_V \{ e_x (\sigma_x)_0 + e_y (\sigma_y)_0 + e_z (\sigma_z)_0 + g_{xy} (\tau_{xy})_0 + g_{yz} (\tau_{yz})_0 + g_{zx} (\tau_{zx})_0 \} \cdot dV,$$

per rapporto a tutti i valori che l'espressione stessa può assumere, compatibilmente con la deformazione impressa e con le leggi dell'equilibrio per forze esterne tutte nulle; e permette agevolmente la determinazione delle incognite iperstatiche nello stato naturale.

(1) Cfr. COLONNETTI, *La statica delle costruzioni* U. T. E. T., Torino, 1928, vol. I, p. 333.

In questa Nota ci proponiamo di giungere ad una proposizione, che sia, per l'analisi dello stato naturale, analoga a quella del CASTIGLIANO per l'analisi della variazione di configurazione causata dalle forze esterne.

2. Oggetto della nostra ricerca è dunque la componente, secondo una certa direzione n , dello spostamento subito dal punto generico P di un solido elastico, qualunque e comunque vincolato (purchè in modo sufficiente a definire nello spazio la sua posizione), nel passaggio del solido stesso dalla configurazione iniziale (precedente ad ogni deformazione impressa) a quella attuale (stato naturale).

Perseguiamo questo intento (partendo dalla proposizione del COLONNETTI) con un procedimento simile a quello con il quale si può dedurre il teorema del CASTIGLIANO da quello del MENABREA (1).

Immaginiamo di aggiungere al solido considerato un nuovo vincolo, collegando — quando il sistema si trova ancora nella configurazione iniziale — il punto P ad un punto fisso dello spazio, mediante un'asta elastica (parallela alla direzione n), di forma prismatica e di sezione retta A, piuttosto piccola rispetto alla sua lunghezza l . I collegamenti dell'asta, con il punto P e con il punto fisso dello spazio, siano costituiti da cerniere (ideali) prive di attrito.

Ciò posto, vengano imprresse al solido le deformazioni (3) (indichiamo con s la corrispondente deformazione — variazione unitaria di lunghezza — dell'asta), e, quindi, indotte le tensioni (t'); e indichiamo con X la reazione che di conseguenza si genera nell'asta.

L'energia vincolata di tutto il sistema si comporrà manifestamente di quella Φ_0 del solido, e di quella dell'asta

$$\int_0^l \frac{X^2}{2 EA} dl,$$

dove E rappresenta il *modulo del Young* per il materiale da cui l'asta stessa è composta.

La proposizione del COLONNETTI, applicata all'intero sistema, porge

$$\frac{\partial}{\partial X} \left\{ \Phi_0 + \iiint_V [e_x(\sigma_x)_0 + e_y(\sigma_y)_0 + e_z(\sigma_z)_0 + \right. \\ \left. + g_{xy}(\tau_{xy})_0 + g_{yz}(\tau_{yz})_0 + g_{zx}(\tau_{zx})] \cdot dV + \int_0^l \frac{X^2}{2 EA} dl + \int_0^l s \cdot X \cdot dl \right\} = 0$$

oppure

(1) Cfr. COLONNETTI, op. cit., p. 254.

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \Phi_0 + \int_V \int [e_x (\sigma_x)_0 + e_y (\sigma_y)_0 + e_z (\sigma_z)_0 + \right. \\ \left. + g_{xy} (\tau_{xy})_0 + g_{yz} (\tau_{yz})_0 + g_{zx} (\tau_{zx})_0] \cdot dV \right\} = - \left\{ \int_0^l \frac{X}{EA} dl + \int_0^l s \cdot dl \right\}.$$

Il secondo membro della (4) rappresenta la variazione di lunghezza che l'asta aggiunta ha subito, nel passaggio dell'intero sistema dalla configurazione iniziale allo stato naturale: e rappresenta altresì lo spostamento che il punto P ha subito nella direzione dell'asta.

Sulla natura di questa non abbiamo introdotta alcuna ipotesi; pertanto, la (4) conserva la sua validità, qualunque sia il materiale da cui l'asta è composta.

Se, in particolare, supponiamo che l'asta sia infinitamente cedevole ($E = 0$, $X = 0$), e che, nella deformazione impressa a tutto il sistema, risulti

$$s = 0^{(1)},$$

il comportamento del solido non può differire da quello che si verificherebbe se l'asta mancasse; ed il primo membro della (4) rappresenta proprio la grandezza dello spostamento, che forma l'oggetto della nostra ricerca.

Il ragionamento precedente, completamente generale, conduce alla seguente proposizione:

lo spostamento p che un punto generico P di un sistema elastico subisce, secondo una direzione n, nel passaggio del sistema dalla configurazione iniziale (precedente ad ogni deformazione impressa) allo stato naturale, è espressa da

$$p = \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \Phi_0 + \int_V \int [e_x (\sigma_x)_0 + e_y (\sigma_y)_0 + e_z (\sigma_z)_0 + \right. \\ \left. + g_{xy} (\tau_{xy})_0 + g_{yz} (\tau_{yz})_0 + g_{zx} (\tau_{zx})_0] \cdot dV \right\},$$

dove X rappresenta la reazione di un'asta di vincolo, fittizia, applicata al punto P, parallelamente ad n.

(1) Si pensi, ad esempio, che la deformazione impressa venga originata da una variazione di temperatura; e che sia nullo il coefficiente di dilatazione termica del materiale da cui l'asta è costituita.

Meccanica. — *Effetto di tremolio nelle ali.* Nota di G. ANDREOLI, presentata dal Socio G. A. CROCCO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Le vibrazioni di un sistema elastico con vincoli inerti ed elastici.* Nota di A. GALLI, presentata dal Corrisp. A. SIGNORINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulle omografie vettoriali con applicazioni cinematiche negli spazi S_n . Sulle omografie prodotto di due assiali.* Nota II di M. MANARINI, presentata dal Corrisp. P. BURGATTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulle omografie vettoriali con applicazioni cinematiche negli spazi S_n . Formula generale per la velocità di trascinamento e composizione di moti istantanei di rotazione.* Nota III di M. MANARINI, presentata dal Corrisp. P. BURGATTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sul problema dell'ala rotante.* Nota di E. PISTOLESI, presentata dal Socio G. A. CROCCO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sugli archi elastici piani. II. Direttrice rettilinea.* Nota di E. VOLTERRA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia — *Il momento delle quantità di moto del sistema planetario e l'ipotesi cosmogonica di Laplace.* Nota di L.^o GIALANELLA, presentata dal Socio G. ARMELLINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geofisica. — *Due nuovi tipi di onde sismiche alla luce di una teoria del Somigliana.* Nota di P. CALOI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. F. VERCELLI.

1. Il prof. Somigliana, in tre Note comparse in questi Atti, negli anni 1917-1918⁽²⁾, ha esposto un'elegante teoria sulla propagazione delle onde sismiche. Mi limiterò a riportare di essa l'indispensabile per la comprensione della presente Nota, inviando, per il resto, alle Memorie originali del Somigliana.

L'Autore parte dall'ipotesi che il vettore rappresentante una vibrazione sismica consista di una componente secondo la normale dell'onda, che dà luogo ad un movimento longitudinale, e di una componente normale alla direzione di propagazione, che a sua volta si decompone in due: l'una giacente nel piano principale, l'altra in un piano normale a quello di propagazione.

Le condizioni che devono essere soddisfatte affinché le due onde sovrapposte, l'una longitudinale e l'altra trasversale, costituenti una singola coppia, abbiano velocità superficiali uguali e possano propagarsi in un suolo piano, conducono il Somigliana, nel caso della propagazione nel piano principale, all'equazione

$$(1) \quad \left(\frac{v^2}{v_s^2} - 2 \right)^4 - 16 \left(\frac{v^2}{v_l^2} - 1 \right) \left(\frac{v^2}{v_s^2} - 1 \right) = 0$$

dove v , v_s , v_l rispettivamente rappresentano la velocità di propagazione superficiale delle onde in questione, la velocità delle onde trasversali e quella delle onde longitudinali.

Quest'equazione coincide con quella a cui Lord Rayleigh è pervenuto per altra via.

La (1) ammette la soluzione $v^2 = 0$; togliendo il fattore v^2 e ponendo

$$v^2 = y \cdot v_s^2$$

essa diviene

$$(2) \quad y^3 - 8y^2 + 8 \left(3 - 2 \frac{v_s^2}{v_l^2} \right) y - 16 \left(1 - \frac{v_s^2}{v_l^2} \right) = 0.$$

(1) Nella seduta del 5 aprile 1936.

(2) C. SOMIGLIANA, *Sulla propagazione delle onde sismiche*. Questi «Rendiconti», Nota I, vol. XXVI, ser. 5^a, fasc. 7^o, p. 369 (aprile 1917); Nota II, vol. XXVI, ser. 5^a, fasc. 9^o, p. 472 (maggio 1917); Nota III, vol. XXVII, ser. 5^a, fasc. 1^o, p. 13 (gennaio 1918).

Quest'equazione ammette sempre una radice compresa fra 0 e 1. Il valore corrispondente di v sarà quindi minore della velocità v_s delle onde trasversali. È questa l'unica radice presa in considerazione da Lord Rayleigh, da cui si può trarre la velocità del gruppo d'onde della fase massima, che va noto sotto il suo nome. Il Somigliana ricerca le condizioni a cui deve sottostare la (1) per ammettere radici tutte reali e studia inoltre le onde che corrispondono alla radice minore dell'unità, dimostrando che esse costituiscono una generalizzazione delle cosiddette onde superficiali di Rayleigh.

Nelle condizioni ordinarie, caratterizzate dai valori possibili che può assumere σ (coefficiente di Poisson), l'equazione di Rayleigh ha tutte e tre le radici reali.

Lasciando da parte la radice minore dell'unità, che dà le onde di Rayleigh, Somigliana trova che le altre due conducono a due sistemi d'onde assimilabili alle onde P, S di un sismogramma, solo quando si assuma per σ la media $— 1/4$ dei valori per esso meccanicamente possibili. Un tale valore per σ non ha però nessuna conferma sperimentale.

D'altronde l'interpretazione che fa corrispondere le onde P, S alle due soluzioni reali, maggiori dell'unità, dell'equazione di Rayleigh, non regge anche per altre considerazioni, tra le quali il fatto che la velocità apparente di propagazione delle P, S non è affatto costante, ma è funzione della distanza epicentrale.

Altre interpretazioni che volevano far corrispondere le tre onde studiate teoricamente a tre gruppi d'onde della fase massima, sommariamente individuati, non hanno avuto maggior fortuna. Rimanevano sempre scarti troppo netti fra teoria e osservazione.

Ciò non ostante, dal fatto che anche le due radici maggiori dell'unità sono reali, dev'essere fuori discussione, come osserva lo stesso Somigliana, che se si ammette l'esistenza delle onde superficiali di Rayleigh nel suolo, com'è comunemente accettato, è giocoforza ammettere l'esistenza nel suolo anche delle onde corrispondenti alle altre due radici trascurate da Lord Rayleigh.

2. La teoria di Somigliana non trova corrispondenza nelle osservazioni per nessuno degli accoppiamenti di onde conosciute, quando ci si limiti a considerare per il coefficiente di Poisson il valore di 0.25, ritenuto come una specie di costante universale, almeno fino a qualche tempo fa. Ma se quel valore del coefficiente di Poisson sembra effettivamente conservarsi costante per gli strati profondi, comunque varino le velocità di propagazione delle onde longitudinali e trasversali, non è più così invece quando ci si avvicina alla superficie della Terra.

Recenti ricerche condussero il giapponese T. Matuzawa alla conclusione che σ assume valori tanto più piccoli quanto lo strato della crosta terrestre è più superficiale. Nello studio di parecchi terremoti giapponesi

egli dedusse, dalle osservazioni sismiche, la presenza di tre strati orizzontali, di uno spessore da 0 a 20 Km., da 30 a 50 Km. e oltre i 50 Km. rispettivamente. Matuzawa trovò che σ assume, nei tre strati, i valori 0.17; 0.21; 0.23 rispettivamente.

Si vede quindi che i valori di σ sono più piccoli nello strato superiore. È vero che questa disposizione degli strati sembra non valere per l'Europa centrale, dove la prima superficie di discontinuità risulterebbe a 45-50 Km. dal livello del mare; ma, a riprova delle conclusioni di Matuzawa, pare assicurato che, in corrispondenza degli Oceani, lo spessore del primo strato superficiale si aggiri appunto intorno ai 20 Km.

Le deduzioni di Matuzawa assumono quindi carattere pressochè generale.

Premesso questo, diamo ora notizia di due nuovi tipi di onde sismiche, propagantisi in superficie.

Il prof. Gutenberg del Seismological Laboratory di Pasadena ha messo recentemente in luce l'esistenza di un'onda superficiale⁽¹⁾, a lungo periodo, che viene registrata in alcuni terremoti, poco prima delle onde L e che si propaga con una velocità di 4.5 Km/sec. circa, con lievissimi scarti da questo valore medio. Egli la chiama G.

Ancor più recentemente, lo scrivente ha messo in evidenza un'altra onda particolare, pure a lungo periodo, le cui principali caratteristiche saranno esposte in una Nota a parte. Quest'onda, vibrante nel piano principale e propagantesi con una velocità di 6.2 Km/sec. circa, viene registrata, dagli strumenti a lungo periodo proprio, in occasione di terremoti lontani, subito dopo le onde PS. La indicheremo con C.

Poichè la teoria del Somigliana sembra avere significato solo per onde superficiali (essa richiede velocità di propagazione costanti), mi sono proposto di vedere se le C, G potevano corrispondere alle onde trovate da Somigliana per via teorica.

In questo caso però, per quanto è stato osservato più sopra, sarebbe erroneo usare per σ il valore di 1/4. Assumiamo invece per il coefficiente di Poisson il valore di 0.17 trovato da Matuzawa, corrispondentemente allo strato superficiale terrestre. Allora, poichè risulta $\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = 0.4$ circa, la (2) assume l'espressione:

$$y^3 - 8y^2 + 17.6y - 9.6 = 0.$$

Questa equazione ha le radici reali; risolta si ottengono per esse i seguenti valori, approssimati a meno di un decimillesimo,

$$y_1 = 4.5835, \quad y_2 = 2.4165, \quad y_3 = 0.8194.$$

(1) B. GUTENBERG and C. F. RICHTER, *On seismic waves*. «Gerlands Beiträge zur Geophysik», Band 43, Heft 1/2, 1934, p. 58 e successive.

La terza è la radice a cui corrispondono le onde di Rayleigh. Indicando con v_1, v_2 le velocità corrispondenti alle altre due radici, si trae per il loro rapporto, il valore

$$\frac{v_1}{v_2} = 1.38.$$

Confrontiamo con il rapporto delle velocità delle onde C e G. La media dei valori di v_C è 6.2; quella di v_G è 4.5. Se ne deduce

$$\frac{v_C}{v_G} = 1.38,$$

in perfetto accordo con il valore teorico che si trae dall'equazione di Rayleigh.

C'è piena rispondenza, quindi, tra teoria e osservazione. Il solo appunto che si può fare, riguarda il piano di oscillazione delle due onde C e G: mentre la prima oscilla nel piano principale, l'altra sembra oscillare in un piano normale alla direzione di propagazione.

Noto però che la teoria di Somigliana comprende anche il caso di movimenti ondulatori, verificantisi nella direzione normale alla direzione di propagazione. In altri termini, la G sarebbe un'onda che si propaga con velocità uguale ad una qualunque delle coppie associate, dando luogo in superficie ad un movimento ondulatorio normale alla direzione di propagazione ⁽¹⁾.

3. Un altro controllo sicuro si potrebbe ottenere confrontando i valori teorici e quelli osservati della velocità delle nuove onde e di quelle di Rayleigh propriamente dette, qualora si conoscesse, in modo preciso, la velocità di queste ultime. Disgraziatamente, di questa grandezza si hanno valori molto approssimativi, variabili da caso a caso, e ciò principalmente, perchè ancora non si sa precisare l'inizio delle onde di Rayleigh. In pratica, si sogliono indicare come onde di Rayleigh quelle costituenti la così detta fase massima, che segue immediatamente e tante volte è sovrapposta, alle onde di Love. L'inizio di questa fase è quanto mai incerto e quasi certamente non coincide affatto con l'inizio delle vere onde di Rayleigh, il quale dovrebbe verificarsi qualche tempo dopo, come sembra provarlo il fatto che solo le onde maggiormente distanziate da quelle di Love tendono a disporsi in un piano di oscillazione molto prossimo al piano principale.

La media delle osservazioni porta a 3.1 circa la velocità di propagazione delle prime onde massimali, da taluni ritenute come onde di Rayleigh (è risaputo come, a questa identificazione, si oppone, oltre al fatto, su accennato, che gli spostamenti del suolo non hanno sempre luogo nel piano verticale di propagazione, anche l'altra constatazione che gli spostamenti

(1) C. SOMIGLIANA, II delle Note citate, p. 479.

in senso verticale non vi sono preponderanti, come esige la teoria). Ad ogni modo, usando questo valore approssimato di v_R , si ottengono, con i dati di osservazione delle altre due onde, i seguenti rapporti:

$$\frac{v_C}{v_R} = \frac{6.2}{3.1} = 2.00 \quad ; \quad \frac{v_G}{v_R} = \frac{4.5}{3.1} = 1.45.$$

I valori teorici, dedotti dalla (2) per $\sigma = 0.17$, danno invece

$$\frac{v_1}{v_3} = 2.365 \quad ; \quad \frac{v_2}{v_3} = 1.717.$$

Il divario, in fondo, data l'incertezza dei valori di v_R e di σ risulta tutt'altro che accentuato, specie se si tien conto del fatto che noi non conosciamo con precisione l'influenza della curvatura della Terra sulla velocità di propagazione.

Abbiamo visto che nel caso $\sigma = 0.17$ il rapporto delle velocità che si traggono dalle due prime radici dell'equazione di Rayleigh, coincide perfettamente con il rapporto delle velocità delle onde C e G'.

Dai valori dei rapporti teorici $v_1/v_3, v_2/v_3$, si può quindi dedurre il vero valore che compete alla velocità v_3 dell'onda di Rayleigh, propriamente detta, quando si faccia $v_1 = v_C, v_2 = v_G$. Si ottiene, in entrambi i casi,

$$v_3 = v_R = 2.621.$$

Il valore di v_R risulterebbe quindi leggermente inferiore a quello che generalmente gli si attribuisce, e ciò sembra avere conferma in quanto è stato più sopra osservato.

Fisica. — *La ricerca del potere risolutivo dei materiali sensibili fotografici con un nuovo tipo di interferometro.* Nota di R. BRUSCAGLIONI, presentata dal Corrisp. U. BORDONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica-fisica. — *La colorimetria durante il periodo dello sviluppo del colore.* Nota di G. BERGAMI, E. BOERI, P. BAER, presentata dal Socio C. FOÀ.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Biologia. — *Intorno ad una « Phytophthora » causante un marciume del colletto nel pomodoro.* Nota di G. GOIDÀNICH presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. L. PETRI.

Oltre alla *Phytophthora infestans* (Mont.) De By., la notissima peronospora delle solanacee, numerose altre specie di questo genere di parassiti sono state segnalate sul pomodoro. Esse sono: *Phyt. terrestris* Sherb., *Phyt. cryptogea* Pethyb., *Phyt. sp.* (descritta e non denominata dal Reddick ⁽²⁾ che però la ritenne diversa da *Phyt. infestans*, *cryptogea*, *terrestris*) e *Phyt. mexicana* Hot. et Hart. Di frequente avviene che l'azione dannosa di tali funghi si espliciti col produrre un marciume del colletto dell'ospite, e ciò specialmente in *Phytophthora cryptogea* e *Phyt. mexicana*; ma anche per *Phyt. infestans* sono noti casi di simile comportamento parassitario ⁽³⁾.

La frequenza con cui questo tipo di marciume si manifesta all'estero, fa supporre che esso sia presente anche in Italia, quantunque raramente segnalato e mai in particolare studiato: deve essere una delle cause delle fallanze, talvolta anche gravi, che si manifestano nei semenzai e nei primi giorni dopo la messa a dimora delle giovani piantine di pomodoro, nel campo.

Questa malattia è comparsa nelle vicinanze di Roma nella primavera dell'anno passato. I primi campioni di pomodori similmente infetti furono portati a questa Stazione dal dott. A. Samoggia, reggente della sezione fitopatologica del R. Commissariato agrario di Roma, assieme al quale feci anche, in seguito, diversi sopralluoghi. Le piante presentavano una allessatura dello stelo nella zona del colletto, che si estendeva, in genere, dal punto in cui si dipartono le prime radichette fino a quello dell'attacco delle prime foglie. La zona allessata aveva una tinta marrone, contrastante col colore verde cupo delle parti normali. L'infezione è comparsa nel semenzaio, dove ha causato forti perdite, ma non si è estesa nel campo, in parte per le precauzioni profilattiche subito prese, in parte perchè in tale ambiente trova più sfavorevoli condizioni di sviluppo. Difficilmente le piante colpite si salvano, a meno che la malattia non venga combattuta quando è ancora all'inizio. Normalmente 2-3 giorni dopo avvenuta l'infezione, la pianta è completamente afflosciata al terreno. Nei luoghi che ho visitato io, i pomodori erano conservati nel semenzaio sebbene già grandi, allo scopo di ottenerne la foratura.

Nei tessuti alterati si rinviene costantemente una *Phytophthora*, che anche dai primi isolamenti si ottiene allo stato di purezza, senza cioè iniqui-

(1) Nella seduta del 5 aprile 1934.

(2) D. REDDICK, *A fourth « Phytophthora » disease of tomato.* « Phytopathology », 10, 1920, p. 528-534.

(3) J. E. HOWITT, « *Phytophthora infestans* » causing damping-off of tomatoes. « Phytopathology », 7, 1917, p. 319.

namenti di bacteri, frequenti a comparire quando si abbia a che fare con simili marciumi.

L'identificazione delle varie specie di *Phytophthora* descritte è sempre stata cosa di una certa difficoltà, e fino a qualche anno addietro pressochè impossibile, tanto che diversi autori si sono trovati costretti a descrivere i funghi che avevano in istudio come nuove specie, piuttosto che incorrere in un riferimento sistematico non esatto. L'importanza però che notoriamente rivestono i rappresentanti del genere *Phytophthora* ha fatto sì che su di esso si rivolgesse l'attenzione di numerosi studiosi, in modo che al momento attuale, dopo gli studi, per ricordare solo i principali, di Rosenbaum ⁽¹⁾, Leonian ⁽²⁾ e Tucker ⁽³⁾, specialmente, anche il lato tassonomico di questo genere si può ritenere sufficientemente chiarito. È stata abbandonata l'antica suddivisione nei gruppi *cactorum*, *phaseoli*, *faberi*, e sono stati soppressi alcuni generi vicini a *Phytophthora*, perchè l'una e gli altri basati su caratteri non sufficientemente distintivi. Per l'identificazione delle specie si prendono ora in esame caratteri ben costanti; quali la capacità di crescere in determinati substrati, la forma degli sporangî, il comportamento rispetto alla temperatura ecc. Si è riusciti in tal maniera a sopprimere numerosi sinonimi: nella monografia del Tucker infatti le specie di *Phytophthora* sono ridotte a 20.

Seguendo questo A., io ritengo che il parassita del pomodoro isolato nei pressi di Roma, sia la *Phytophthora parasitica* Dast. Non è il caso che io mi soffermi qui in una minuta descrizione del fungo, dato il carattere di brevità della presente Nota; riporto solo gli elementi indispensabili per giustificare il riferimento suddetto.

Le colonie del fungo hanno un aspetto fioccoso, dendroide; gli sporangî, che compaiono su tutti i tipi di substrati usati, sono distintamente papillati e misurano $27-46 \times 22-39 \mu$, per lo più $36 \times 28 \mu$, (queste dimensioni sono state ottenute dalla media delle misurazioni di moltissimi zoosporangî formatisi sopra substrati di diversa composizione). In diversi substrati compaiono dopo un certo tempo le clamidospore.

Ma ciò che non fa rimanere alcun dubbio sull'esattezza della identificazione, è il comportamento del fungo rispetto alla temperatura. Adoperando, come il Tucker, l'agar-farina di mais a pH = 6,11 (il Tucker 6,20), si ottengono dopo 96 ore di incubazione a 35°C. delle colonie di 25-30 mm. di diametro, e a 37,5° C., sempre dopo il medesimo tempo, di 3-8 mm. Secondo le ricerche del Tucker a 37° C. vivè e cresce unicamente la *Phyt.*

(1) J. ROSENBAUM, *Studies of the genus «Phytophthora»*. «Journ. Agric. Res.», 8, 1917, pp. 233-276.

(2) L. H. LEONIAN, *Physiological studies on the genus «Phytophthora»*. «Am. Journ. of Bot.», 12, 1925, pp. 444-498.

(3) C. M. TUCKER, *Taxonomy of the genus «Phytophthora»* de Bary. «Missouri Agric. Exper. Stat. Res., Bul. 153», 1931, p. 208.

parasitica e la sua varietà *nicotianae*; a 35° C. anche la *Phyt. capsici* e *drechsleri*. Dalle ultime due, però, la *Phytophthora* del pomodoro in esame è bene differenziata.

Ricordo che di questo fungo non ho potuto mai osservare la forma sessuata: quantunque lo abbia allevato nei substrati più diversi (ho sperimentato anche il liquido di Petri⁽¹⁾ agarizzato, che secondo Allain⁽²⁾ favorisce la formazione degli organi sessuali), e sottoposto, da un anno a questa parte, a varie condizioni di ambiente, nè le oospore, nè gli oogoni si sono mai differenziati. È noto però che la presenza o l'assenza delle oospore non può essere assunto come un carattere distintivo per le *Phytophthorae*. La *Phyt. parasitica*, poi, sembra abbia tendenza a simile irregolarità, poichè anche dei 57 isolamenti esaminati dal Tucker ben 21 produssero unicamente zoospore e clamidospore.

Mi pare interessante segnalare fin d'ora che una colonia di questa *Phytophthora* ha dato luogo ad una variazione sotto forma di settore: e tale variazione è rimasta stabile nei trapianti successivi. Il nuovo stipite differisce da quello originario nell'aspetto delle culture e in alcune particolarità del micelio, ma non, sembra, negli elementi morfologici caratteristici. Diverso è invece il suo comportamento fisiologico: non cresce infatti nè a 37° C., nè a 35° C.; a 32° C. dopo 96 ore la cultura è di pochi mm. di diametro. Ho in corso delle esperienze per stabilire se vi è disegualianza fra i due ceppi pure nelle capacità patogene.

Ho eseguito dei tentativi preliminari di riprodurre la malattia. Le piante inoculate erano mantenute in serra a temperatura di 20° C. Ho avuto come risultato che l'infezione aveva costantemente presa, senza però che la malattia si riproducesse: ciò è senza dubbio dovuto al fatto che la temperatura era troppo bassa. Che l'*optimum* per lo sviluppo del fungo debba essere di parecchio più elevato, appare evidente dalla rigogliosa crescita che, in cultura, fa a 35° C., ed anche se si pensa che il marciume in natura si è verificato su piante ancora in letto caldo, in un ambiente cioè in cui la temperatura è notevolmente maggiore di quella sperimentata.

La malattia è stata con successo combattuta con semplici somministrazioni di piccole quantità di solfato di rame sciolto nell'acqua di irrigazione. Ciò del resto concorda con la nozione, che sono sufficienti tracce di questo sale per arrestare la vitalità delle zoospore di simili funghi⁽³⁾.

(1) Ca (NO₃)₂ gr. 0,04 + KH₂ PO₄ gr. 0,015 + Mg SO₄ gr. 0,015 + K Cl gr. 0,006 + H₂O dist. gr. 100.

(2) H. ALLAIN, *Contribution à l'étude du « Phytophthora cambivora »*. Paris, Typ. Firmin-Didot, 1935, 127 pp.

(3) Anche ROSENBAUM è riuscito (*Infections experiments on tomatoes with « Phytophthora terrestris »* Sherb. and hot water treatment of the fruit. « Phytopathology », 10, 1920, pp. 101-105) ad impedire l'infezione dei pomodori da *Phyt. terrestris* (specie molto simile od addirittura identificabile con *Phyt. parasitica*) trattandoli con una soluzione all'1/5000 di solfato di rame.

Biologia. — *Esperienze eseguite con apici radicali isolati ed allevati in cultura.* Nota di LUISA MAROTTA, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. E. CARANO.

Precedentemente ho comunicato i risultati ottenuti da esperienze di culture « in vitro » eseguite su cellule vegetali isolate ⁽²⁾; in questa Nota mi propongo di illustrare le esperienze fatte con culture di apici radicali separati da piantine appena germinate di *V. faba*, *V. villosa*, *V. sativa*, *Lupinus albus*, *Zea mais*, *Helianthus annuus*, *Pisum sativum*.

Le esperienze sono state eseguite sia nell'inverno, sia in primavera (aprile-maggio). Durante l'inverno facevo germinare i semi in termostato alla temperatura di 27°, su segatura umida; durante la primavera alla temperatura ambiente. Quindi toglievo a questi semi germinanti gli apici radicali della lunghezza da 1 a 3 mm. e procedevo al loro trapianto in capsule Petri contenenti il substrato nutritizio costituito dalla soluzione di Knop a cui talora aggiungevo agar nelle proporzioni dell'1.5 %. Queste soluzioni erano adoperate pure o con l'aggiunta di glucosio o saccarosio nelle proporzioni dell'1-1.5 %.

Osservazioni. — In questa serie di esperienze ho notato costantemente un accrescimento degli apici radicali tolti a piantine germinanti e posti in cultura. Tale accrescimento, notato da altri autori ⁽³⁾ è dovuto alla regione meristematica che si trova al disotto della cuffia, lunga qualche millimetro e che permette all'apice amputato di raggiungere in tempo relativamente breve parecchie volte la sua lunghezza iniziale. La sopravvivenza e l'accrescimento non si verificavano quando isolavo gli apici ad una lunghezza non superiore ad 1 mm. Apici di *V. faba* messi sopra substrato solido zuccherato, già nella prima settimana della cultura quadruplicano e quintuplicano la loro lunghezza iniziale. Apici di *Helianthus annuus* si comportano similmente. Insieme con il rapido accrescimento longitudinale e trasversale dell'apice si sviluppano dopo qualche giorno numerosi peli radicali. L'accrescimento in spessore raggiunto nelle culture di queste radici amputate, specialmente nella regione prossima al taglio, è quasi sempre maggiore di quello

(1) Nella seduta del 5 aprile 1936.

(2) L. MAROTTA, *I risultati di alcune culture « in vitro » di cellule vegetali isolate.* « Rendiconti della R. Acc. Naz. dei Lincei », ser. 6^a, vol. XXI, 1° sem., fasc. III. Roma, febbraio 1935.

(3) R. I. GAUTHERET, *Sur la culture d'extrémités de racines.* « C. R. Soc. Biol. », to. CIX, N. 14, 1930.

che si ha nelle normali radici in sito. Negli apici di *Zea mais* l'accrescimento nei primi giorni si verifica già nello spazio di poche ore; ugualmente si comportano gli apici radicali di *Lupinus albus*, *V. sativa*, *V. villosa*. Cambiando quasi giornalmente il substrato nutritizio, per evitare inquinamenti della cultura, queste duravano fino a due mesi; però l'accrescimento si arrestava dopo una quindicina di giorni dall'inizio dell'esperienza. I substrati solidi si sono mostrati ottimi in ogni caso. Non sempre invece ho avuto buoni risultati adoperando substrati liquidi, a differenza di quanto avveniva per le cellule isolate ⁽¹⁾. Sopra i substrati solidi disponevo gli apici amputati o in posizione orizzontale oppure verticalmente impiantati con la base sulla gelatina. In questo secondo caso capovolgevo la capsula in modo da mettere la radice nella sua posizione geotropica normale.

Ho eseguito tutti questi esperimenti tenendo anche conto della temperatura sull'accrescimento degli apici radicali. Mentre i risultati finora descritti li ho ottenuti a temperatura ambiente invernale di 12°-13°, mettendo le culture in termostato a 27°-28° ho notato negli apici radicali un accrescimento più rapido. In termostato infatti apici radicali di *Zea mais* di 1 mm. di lunghezza si accrescono in un giorno di 18-20 mm. Nelle mie culture gli apici, pur mostrando un notevole accrescimento, non hanno mai prodotto radici laterali a differenza di quanto è stato indicato da altri Autori. Il Robbins da solo ⁽²⁾ e in collaborazione col Maneval ⁽³⁾ vide appunto formazione di radici laterali ed anzi ulteriori ramificazioni di queste.

*
* *

In una seconda serie di esperienze ho voluto osservare in apici radicali isolati il noto fenomeno della restituzione. A tale scopo praticavo sugli apici radicali della lunghezza di 2-3 mm. un taglio longitudinale di 1-2 mm. Dalle numerose osservazioni fatte risulta che se il taglio è fatto a meno di 1 mm. di altezza i due pezzi separati dall'apice dopo qualche giorno si risaldano e ad accrescimento in lunghezza quasi ultimato del pezzo messo in cultura si riforma un apice con un ingrossamento verso la parte saldata. Se però il taglio è fatto a più di 1 mm., allora in cultura ad accrescimento ultimato si hanno due apici al posto del primitivo. In modo interessante si sono comportati gli apici di *Zea mais* che, sezionati longitudinalmente per un tratto di 1 mm. hanno raggiunto un allungamento di 2 cm. e più, e al punto di biforcazione ingrossato hanno sviluppato 2 apici di grandezza normale al posto dell'apice unico primitivo. In genere tutti gli apici radicali da me operati e messi in cultura pura hanno presentato un simile com-

(1) Loc. cit.

(2) W. I. ROBBINS, « Bot. Gazette », vol. 73, 1922, p. 376.

(3) ROBBINS e MANEVAL, Ibid., vol. 76, 1923, p. 274.

portamento. Per osservare la conformazione dei tessuti che costituiscono questi apici sdoppiati ho imparaffinato e sezionato alcuni apici di *Lupinus albus* ad accrescimento ultimato. All'osservazione microscopica si sono mostrati due apici completi, ognuno con la propria cuffia e i propri meristemi.

*
* *

In un'ultima serie di esperienze ho voluto provare l'azione a distanza del piombo sull'accrescimento degli apici radicali amputati di piantine diverse. A tale scopo alcune capsule contenenti le culture con gli apici radicali della lunghezza da 1 a 3 mm. venivano poste in una cassetta di piombo lunga 20 cm., larga 12 cm. e dello spessore di 4 mm.; a scopo di controllo altre capsule ugualmente allestite venivano poste in una scatola di vetro di uguali dimensioni di quella di piombo e rivestita esternamente di carta nera.

Ho iniziato le esperienze con apici di *Vicia sativa*. Dopo un giorno ho osservato che l'accrescimento nelle culture di controllo era maggiore che in quelle sotto piombo. La stessa constatazione feci fino al sesto giorno, tanto che fui in un primo tempo condotta a credere che per gli apici radicali in questione il piombo esercitasse un'azione depressiva. Ma tale azione fu soltanto temporanea, giacchè in seguito l'accrescimento sotto schermo di piombo prese il sopravvento, come può rilevarsi dalla seguente tabella:

Apici radicali di <i>Vicia sativa</i> lunghi:	PIOMBO			CONTROLLO		
	3° giorno	6° giorno	11° giorno	3° giorno	6° giorno	11° giorno
1 mm.	3 mm.	4 mm.	12 mm.	4 mm.	8 mm.	10 mm.
2 »	6 »	6 1/2 »	16 »	7 »	9 »	12 »
3 »	9 »	9 1/2 »	18 »	10 »	10 »	17 »

Uguali risultati ottenni anche per gli apici radicali di *Lupinus albus* e di *Helianthus annuus*.

Fisiologia. — *Liberazione di una sostanza acetilcolino-simile dalla superficie di taglio del nervo durante l'eccitamento fisiologico* ⁽¹⁾. Nota di G. BERGAMI ⁽²⁾ presentata ⁽³⁾ dal Socio C. FOÀ.

Dale e collaboratori hanno in questi ultimi anni messo in evidenza che l'eccitamento delle fibre nervose colinergiche si accompagna con la liberazione di una sostanza acetilcolino-simile a livello delle terminazioni nervose e delle sinapsi, senza peraltro dare alcuna prova che tale liberazione avvenga anche lungo le fibre nervose. Anzi Feldberg e Vartiainen (« Journ. Physiol. », 83, 1935, p. 127), a questo proposito dicono « Impulses passing along the vagus fibres through its ganglion without synaptic interruption, liberate no acetylcholine, and antidromic impulses into the cells of the sympathetic ganglion are similarly ineffective. It is concluded that the liberation of acetylcholine by preganglionic impulses occurs at the synapses ».

Secondo Bacq (« Ergebnisse d. Physiol. », 37, 1935, p. 163) le osservazioni di Feldberg e collaboratori « réduisent à néant les observations assez étonnantes de Calabro » che nelle sue pubblicazioni del 1933 e 1935 sostiene la liberazione di un « quid » attivo dalle estremità tagliate dei nervi per effetto della stimolazione faradica.

Secondo le ricerche di Calabro, immergendo la superficie di taglio del nervo vago in semplice soluzione di Ringer, e stimolando ripetutamente il nervo a monte del taglio, si osserva la diffusione nel Ringer di una sostanza che esercita un'azione vagale sul cuore isolato, sulla pressione sanguigna e sull'ansa intestinale. Analoghi esperimenti eseguiti dal Calabro su nervi simpatici, dimostrerebbero la liberazione di una sostanza ad azione simpatico-simile.

La liberazione di queste sostanze sarebbe però condizionata in modo assoluto alla stimolazione faradica del nervo, essendo risultati inattivi i liquidi nei quali erano stati immersi fino a sei ore nervi non sottoposti alla stimolazione faradica.

Dai risultati di Calabro non si può pertanto stabilire se anche durante l'eccitamento fisiologico il nervo liberi una sostanza attiva e se questa sostanza sia, ad esempio nel caso del vago, una sostanza acetilcolino-simile, preservabile con eserina.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Milano.

(2) Hanno collaborato alla esecuzione delle ricerche gli studenti G. CANTONI e T. GUALTIEROTTI.

(3) Nella seduta del 5 aprile 1936.

D'altra parte Binet e collaboratori hanno dimostrato che estratti di nervi (ad esempio vago), triturati in Ringer eserinnizzato, contengono una sostanza acetilcolinosimile la cui quantità aumenta se il nervo è stato precedentemente stimolato. Stimolando artificialmente un frammento di nervo vago immerso in Ringer-Locke, Binet e Minz non hanno però potuto rilevare la diffusione di una sostanza acetilcolina simile, mentre risultò evidente la liberazione di una sostanza, termostabile e ossidabile che, come l'eserina, sensibilizza il muscolo dorsale di sanguisuga verso l'acetilcolina.

Questi risultati, tra loro contraddittori, mi hanno indotto ad indagare, in opportune condizioni sperimentali, se dalla superficie di taglio dei nervi si libera una sostanza ad azione acetilcolino-simile quando le fibre nervose sono percorse da stimoli fisiologici.

In questa comunicazione che ha carattere preliminare, mi limito a descrivere l'esperimento-tipo.

I. - MONCONE CEFALICO DEL NERVO FRENICO.

Cane in narcosi da cloralosio o da morfina. Tracheotomia e respirazione artificiale. Si apre ampiamente la gabbia toracica e si isola uno dei nervi frenici, tagliandolo in prossimità del diaframma. Si immerge l'estremità tagliata in un bicchierino contenente 12 cc. di liquido di Ringer⁽¹⁾ per anfibi, addizionato di solfato di eserina Sandoz (concentrazione 1:600.000).

Dopo due minuti primi di immersione, il liquido nel quale è stata immersa l'estremità tagliata del nervo, viene saggiato su un preparato di muscolo dorsale di sanguisuga, allestito con la tecnica conosciuta e la cui sensibilità per l'acetilcolina è stata precedentemente tarata.

Il preparato risponde con una contrazione acetilcolino-simile, tanto più forte quanto più evidenti erano state durante l'esperimento, le contrazioni dell'altra metà del diaframma.

2. - MONCONE CEFALICO E MONCONE DISTALE DEL NERVO VAGO.

Cane in narcosi da cloralosio e da morfina. Si isola un lungo pezzo di vago al collo, lo si seziona e si immergono i due monconi in due bicchierini contenenti il Ringer eserinnizzato. Dopo due minuti i due liquidi vengono saggiati nel preparato di sanguisuga; il muscolo si contrae.

Questi esperimenti dimostrano che quando un nervo, come il frenico ed il vago, è percorso da stimoli fisiologici, della superficie di taglio del

(1) La composizione del Ringer, che è risultata la più adatta per ottenere la massima sensibilità per l'acetilcolina del preparato di sanguisuga, è la seguente:

NaCl 0.65; KCl 0.014; CaCl₂ 0.006; NaHCO₃ 0.02; NaH₂PO₄ 0.001; H₂O 100.

Come si vede il contenuto in calcio deve essere mantenuto piuttosto basso; è consigliabile controllarlo analiticamente.

moncone congiunto coi distretti centrali o periferici donde trae origine lo stimolo, libera una sostanza ad azione acetilcolinica.

Era necessario provare se la liberazione di questa sostanza fosse strettamente legata all'attività fisiologica del nervo ed io ricercai se la sostanza ancora si liberasse oppure no dalla superficie di sezione del nervo quando la conduzione lunghezza fosse bloccata dal freddo, o cogliendo momenti nei quali fosse sospeso il lancio lungo il nervo di stimoli fisiologici.

I. — CONTROLLO COL BLOCCO DA FREDDO DELLA CONDUZIONE NERVOSA.

Si provoca un blocco da freddo dello stesso frenico, applicando un piccolo cubo di ghiaccio sulla parte più distale del nervo, verso il collo. Dopo 5-15 minuti, sempre mantenendo il ghiaccio sulla porzione distale del nervo, si immerge l'estremità periferica tagliata in un altro bicchierino contenente la stessa quantità di Ringer addizionata dalla stessa quantità di eserina.

Dopo due minuti primi di immersione, si torna a saggiare il liquido sul preparato di muscolo dorsale di sanguisuga.

Il preparato non presenta contrazione alcuna, oppure, se il blocco da freddo non è stato completo, una contrazione molto piccola.

Si toglie il blocco da freddo e si ripete tale e quale l'esperimento dopo 10-15 minuti. Il liquido nel quale viene mantenuta immersa per due minuti la superficie di taglio dello stesso frenico, ritorna ad essere attivo provocando una forte contrazione del muscolo di sanguisuga corrispondente a quella ottenuta nel primo esperimento.

II. — CONTROLLO DURANTE LA INATTIVITÀ FISIOLOGICA DEL NERVO FRENICO PROVOCATA DALL'APNEA.

Preparazione del cane come nell'altro tipo di esperimento. Taglio, in prossimità del diaframma, di un frenico e saggio, sul muscolo di sanguisuga, del liquido di immersione (due minuti) dell'estremità tagliata; risultato nettamente positivo; il muscolo si contrae.

Si intensifica la respirazione artificiale finchè non siano più visibili contrazioni dell'altra metà del diaframma.

Si ripete l'immersione dell'estremità tagliata del frenico per due minuti: risultato negativo o molto ridotto (il preparato dopo un piccolo inizio di contrazione, tende ad allungarsi anzichè ad accorciarsi).

Si interrompe la respirazione artificiale; quando l'altra metà del diaframma ricomincia a contrarsi nei conati respiratori asfittici, si immerge l'estremità del frenico per due minuti nel Ringer eserinizato.

Si saggia il liquido di immersione sul preparato di muscolo dorsale di sanguisuga; contrazione fortissima.

Prove di controllo eseguite sia con liquidi nei quali erano stati immersi per vari periodi di tempo nervi inattivi, sia con liquidi addizionati a sangue dello stesso animale, hanno sempre dato risultati negativi.

Sono in corso esperimenti *in vivo e in vitro*, anche con altri nervi, che mentre confermano la liberazione di una sostanza acetilcolino-simile dalla superficie di taglio del nervo durante l'eccitamento, sia spontaneo sia provocato da stimolo elettrico, ne mettono in luce un particolare comportamento rispetto al glucosio.

Fisiologia. — *Ossido-riduzioni nell'intestino tenue e nel fegato di ratto albino, durante l'assorbimento intestinale*⁽¹⁾. Nota di G. PERETTI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Il presente lavoro fa parte di una serie di ricerche che si vanno svolgendo in questo Laboratorio, sui rapporti tra attività funzionale e processi di ossido-riduzione nei tessuti.

Ricorderò solo alcuni primi tentativi di dimostrazione sperimentale di tali rapporti: Testa⁽³⁾ nei reni di conigli preventivamente trattati con sostanze diuretiche ha trovato aumento dei processi deidrogenativi; secondo Mitolo⁽⁴⁾ il potere riducente dell'asse cerebro-spinale di ratti e rospi, nei quali si induce un abnorme aumento della eccitabilità riflessa mediante stricnina o fenolo, è aumentato in confronto a quello dei neurassi di animali non trattati; e viceversa, negli animali in cui si deprime la eccitabilità riflessa mediante trattamento con bromuro di potassio, la capacità riducente è diminuita.

Se pertanto l'aumento dei processi di ossido-riduzione, riscontrato dagli AA. citati, si accompagna allo stato di attività funzionale dei tessuti, si dovrebbe dedurre che un tale rapporto sia possibile riscontrare anche per altri organi.

I presenti esperimenti rappresentano appunto un contributo sperimentale alla dimostrazione della ipotesi suaccennata.

A tale scopo ho eseguito due ordini di esperimenti, con l'intento di ricercare le eventuali modificazioni quantitative dei processi di ossido-riduzione in diversi organi per effetto dell'assorbimento intestinale.

Ho rivolto, in modo particolare, la mia attenzione al fegato e all'intestino, la cui attività è particolarmente impegnata durante l'assorbimento in-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Cagliari.

(2) Nella seduta del 5 aprile 1936.

(3) C. TESTA, «Riv. Pat. speriment.», V, n. s., 59, 1936.

(4) M. MITOLO, questi «Rendiconti», 1936 (in corso di stampa)

testinale; in via secondaria, nonchè a titolo di controllo, ai polmoni ed alla milza, organi che, almeno direttamente, non partecipano a detta funzione.

Le ricerche sono state eseguite su 30 ratti albinì del peso oscillante tra gr. 89 e gr. 177, divisi in tre lotti di 10 animali ciascuno. Gli animali del primo lotto servivano da controllo; a quelli del secondo lotto, si somministrava glucosio, ed a quelli del terzo, olio di oliva.

Dopo un digiuno di 24 ore, i ratti del primo lotto venivano sacrificati per dissanguamento, senza alcun previo trattamento; quelli del secondo lotto ricevevano, mediante sonda gastrica, una quantità di glucosio, in soluzione al 50 %, pari a gr. 1 per 100 gr. di animale, e quelli del terzo lotto, olio di oliva, in dosi oscillanti tra gr. 1 e gr. 1,4 per 100 gr. di ratto. Dopo tempi variabili dall'ingestione della sostanza, anche questi ratti venivano sacrificati per dissanguamento; quindi si prelevavano rapidamente il fegato, i polmoni, la milza e l'intestino tenue (questo veniva aperto e accuratamente privato del suo contenuto mediante lavaggio con acqua). Gli organi si pesavano, e, su parti aliquote di essi, si studiava quantitativamente il potere riducente col micrometodo di Birch, Harris e Ray ⁽¹⁾, basato sulla riduzione del 2:6-diclorofenoloindofenolo operata dall'estratto acido degli organi in esame. Detto indicatore non è affatto ridotto dalle due sostanze impiegate in queste ricerche, cioè l'olio di oliva e il glucosio. La titolazione si eseguiva in doppio impiegando un cc. di una soluzione 1:10.000 dell'indicatore.

I risultati sperimentali delle tre serie di ricerche sono riuniti nella Tab. I in cui, per ogni esperimento e per ogni organo, sono segnate le cifre medie ottenute dalle due determinazioni; oltre ai dati singoli, per ogni organo sono state segnate anche le medie delle 10 determinazioni, e le variazioni percentuali del potere riducente dei tessuti durante l'assorbimento.

L'esame delle cifre ottenute sui ratti normali (non trattati) dimostra l'esistenza di una capacità dei diversi organi di ridurre il 2:6-diclorofenoloindofenolo, in mezzo acido; vi sono differenze fra i vari organi di uno stesso ratto e, per uno stesso organo (specialmente la milza), da animale ad animale; tuttavia i valori ricavati per ciascun organo non si allontanano molto dalle cifre medie.

Il confronto tra i valori ottenuti nei ratti di controllo e quelli degli animali trattati con olio d'oliva mette in evidenza che, durante l'assorbimento del grasso, il potere ossido-riducente, mentre rimane pressochè invariato nella milza (aumento dell'1 %), va aumentando, nell'ordine, dai polmoni (aumento del 3,6 %) all'intestino tenue (aumento dell'8,7 %), per raggiungere le cifre più elevate nel fegato (aumento del 10 %).

Dopo somministrazione di glucosio appare che, mentre le cifre ottenute per i polmoni e la milza oscillano intorno a valori normali, il potere ridu-

(1) T. W. BIRCH, L. J. HARRIS and S. N. RAY, « Biochem. J. », XXVII, 590, 1933.

TABELLA I.

Trattamento	Ratto		Ore trascorse dalla ingestione	Fegato	Intestino tenue	Polmoni	Milza
	n.º	sexso, e peso in gr.		Sol. d'indicatore scolorato da 1 gr. di tessuto fresco			
				cm ³	cm ³	cm ³	cm ³
Controllo	1	♂ 104	—	7.14	4.42	5.98	16.21
	2	♂ 115	—	9.24	4.39	8.82	15.46
	3	♂+♀ 116	—	8.52	4.98	7.24	17.52
	4	♂ 119	—	8.64	4.85	6.89	15.81
	5	♂ 120	—	7.81	4.01	7.98	12.32
	6	♂ 128	—	8.26	4.39	7.29	13.06
	7	♂ 128	—	7.95	4.63	5.38	10.61
	8	♂ 134	—	8.86	3.76	7.74	19.80
	9	♂+♀ 145	—	7.85	4.48	—	17.39
	10	♂ 173	—	7.73	5.60	—	16.63
	Medie	—	—	8.20	4.55	7.13	15.48
Sommministrazione di olio di oliva	11	♂ 108	4	9.58	4.33	8.46	11.91
	12	♂ 128	5.30'	8.67	4.86	—	16.93
	13	♂ 108	6	8.60	5.02	7.62	17.71
	14	♂+♀ 114	6	7.53	6.10	7.59	21.40
	15	♂+♀ 120	6	8.16	4.57	7.68	16.36
	16	♂ 163	6	9.95	5.14	6.19	16.89
	17	♂ 177	6	8.88	4.55	6.22	17.36
	18	♂+♀ 149	6.30'	9.46	4.82	7.54	16.39
	19	♂ 122	7	9.56	5.56	7.32	14.21
	20	♂ 125	9	9.84	4.55	7.86	7.28
	Medie	—	—	9.02	4.95	7.39	15.64
	»	variazioni in %:		+ 10.0	+ 8.7	+ 3.6	+ 1.0
Sommministrazione di glucosio	21.	♂+♀ 115	1.30'	9.06	5.26	8.22	19.22
	22	♂+♀ 120	2	8.90	4.48	6.67	19.62
	23	♂+♀ 102	3	9.04	4.08	7.31	16.19
	24	♂ 125	4	10.99	4.18	6.88	10.04
	25	♂+♀ 130	4	10.15	4.11	5.69	—
	26	♂ 105	5	9.95	4.88	7.72	18.77
	27	♂ 110	5	11.58	4.86	8.30	17.41
	28	♂ 115	7.30'	9.86	5.88	8.22	11.73
	29	♂ 118	7.30'	9.20	4.58	7.22	8.22
	30	♂ 87	14	10.25	4.76	5.35	19.17
	Medie	—	—	9.90	4.71	7.22	15.59
	»	variazioni in %:		+ 20.7	+ 3.5	+ 0.9	+ 0.7

cente va crescendo per l'intestino (aumento del 3.5 %) e raggiunge per il fegato cifre molto elevate (aumento del 20.7 %).

Tanto dopo la somministrazione di olio di oliva che di glucosio, non ho notato differenze regolari e costanti nelle oscillazioni del potere riducente, che stiano in rapporto col tempo decorso dall'ingestione di dette sostanze.

Nel complesso, i risultati dei presenti esperimenti mi pare possano inquadrarsi assai bene con quanto è noto intorno ai fenomeni che, nei vari organi, accompagnano l'assorbimento intestinale delle sostanze da me studiate: infatti, l'aumento del potere riducente riscontrato nel fegato e nell'intestino si accorda con le nostre conoscenze intorno alla funzione di questi due organi durante l'assorbimento del grasso e del glucosio; tale rapporto (per quanto si riferisce all'assorbimento dei grassi) appare anche più evidente qualora si consideri la compartecipazione attiva al fenomeno dei fosfoaminolipidi costitutivi dell'intestino e del fegato, sostanze le quali potrebbero prender parte ai processi di ossido-riduzione del protoplasma (ARTOM ⁽¹⁾; ARTOM e PERETTI ⁽²⁾).

Fisiologia (Chimica biologica). — *Sul comportamento del glicogeno del cuore per azione dell'insulina* ⁽³⁾. Nota di V. ZAGAMI, presentata ⁽⁴⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Nel corso di nostre indagini, dirette a precisare il meccanismo delle convulsioni da insulina, e i cui risultati complessivi saranno pubblicati altrove ⁽⁵⁾, abbiamo avuto occasione di studiare comparativamente anche le variazioni indotte dalla stessa insulina nel contenuto in glicogeno del cuore e di muscoli scheletrici. E poichè da questo studio sono emersi fatti, a nostro parere, meritevoli di particolare considerazione, crediamo opportuno illustrarli nella presente Nota.

Riferisce Takahashi ⁽⁶⁾, che nei conigli per azione dell'insulina, mentre si ha nei muscoli marcata diminuzione del glicogeno e degli altri glicidi, nel cuore si ha invece lieve diminuzione del glicogeno ed aumento degli altri glicidi.

(1) C. ARTOM, « Arch. Fisiol. », XXXII, 57, 1935.

(2) C. ARTOM e G. PERETTI, « Arch. internat. Physiol. », XXXVI, 351, 1933; XLII, 61, 1935.

(3) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma.

(4) Nella seduta del 5 aprile 1936.

(5) V. ZAGAMI, *Sul comportamento del glicogeno di vari segmenti del sistema nervoso centrale e di vari organi toracici e addominali sotto l'azione dell'insulina*. « Arch. Fisiol. », in corso di stampa.

(6) K. TAKAHASHI, *Ueber experimentelle Kohlehydratstoffwechsel des Gehirns*. « Bioch. Zeitschrift. », 1924, 154, 444.

Le nostre indagini sono state condotte su conigli, su ratti e su colombi. Per ogni specie di animali sono state eseguite due serie di esperienze.

Con una prima serie, si sono assunti i valori normali, relativi al contenuto in glicogeno del cuore e a quello di vari gruppi muscolari scheletrici (m. femorali, m. pettorali, m. clavicolari); nei conigli si è assunto anche il valore del glicogeno del diaframma. A tale scopo gli animali, in condizioni perfettamente normali, sono stati sacrificati a digiuno da sedici ore circa; ciò perchè si potessero avere valori comparativi di maggiore credito, annullando il più possibile influenze, dovute alla qualità e quantità dell'ultimo alimento ingerito, e che, come abbiamo visto in una nostra precedente Nota, possono essere anche considerevoli.

Con una seconda serie, si sono studiate invece le modificazioni indotte dall'insulina nel contenuto in glicogeno parimenti del cuore, del diaframma e degli stessi altri muscoli prima studiati. A tale scopo gli animali, ugualmente a digiuno da sedici ore circa, e nelle condizioni il più possibile prossime (per età, stato di nutrizione ecc.) a quelle degli animali della prima

TABELLA I. — Conigli.

Numero dell'animale	Peso corporeo g	Insulina iniettata Un. Cl.		Tasso glicemico % al momento della morte g	Contenuto in glicogeno per cento grammi di sostanza fresca			
		comples- siva- mente	pro chilo		Cuore g	Muscoli pettorali g	Muscoli femorali g	Dia- framma g
1	700	—	—	0,1391	0,1578	0,0568	0,0882	0,1175
2	610	—	—	0,1048	0,2167	0,2807	0,3057	0,2400
3	630	—	—	0,1203	0,1260	0,1643	0,1217	0,3160
4	700	—	—	0,1025	0,1582	0,1468	0,1965	0,1928
Medie	660	—	—	0,1167	0,1647	0,1621	0,1780	0,2166
1	700	10	14,3	0,0164	0,4421	0,1087	0,1138	0,2298
2	580	10	17,2	0,0162	0,1874	0,0670	0,0376	0,3005
3	650	10	15,4	0,0250	0,1564	0,1168	0,0405	0,3029
4	570	10	17,6	0,0257	0,4191	—	0,1731	0,3511
Medie	625	10	16,1	0,0208	0,3012	0,0975	0,0912	0,2961
Variazioni percentuali . . .				— 81	+ 83	— 41	— 49	+ 27

serie, sono stati sottoposti a somministrazione di insulina Lilly, e sacrificati dopo 1-2 ore dall'iniezione, ma sempre prima della comparsa di fenomeni convulsivi.

La quantità di insulina somministrata ad ogni animale è indicata nelle annesse tabelle.

Gli animali, in ogni caso, sono stati sacrificati per dissanguamento. Subito dopo la morte, il più rapidamente possibile, si sono prelevati i campioni da sottoporre ad esame, e, seguendo le modalità di tecnica già in una nostra precedente Nota ⁽¹⁾ dettagliatamente descritte, si è determinato il con-

TABELLA II. — *Ratti.*

Numero dell'animale	Peso corporeo g	Insulina iniettata Un. Cl.		Tasso glicemico ‰ al momento della morte g	Contenuto in glicogeno per cento grammi di sostanza fresca	
		complessivamente	pro-chilo		Cuore g	Muscoli femorali g
1	180	—	—	0,0720	0,1057	0,2141
2	230	—	—	0,0974	0,1622	0,1594
3	240	—	—	0,0801	0,1131	0,1455
4	150	—	—	0,0965	0,2271	0,1873
5	140	—	—	0,1020	0,1891	0,1706
6	180	—	—	0,1221	0,2266	0,2003
<i>Medie</i>	187	—	—	0,0950	0,1706	0,1795
1	170	10	58,8	0,0168	0,1742	—
2	230	10	43,5	0,0241	0,1993	0,1260
3	250	20	80,0	0,0200	0,1483	0,1130
4	150	10	66,7	0,0270	0,1928	0,1724
5	130	10	76,9	0,0225	0,2679	0,1603
6	170	10	58,8	0,0254	0,1974	0,2438
7	170	20	117,6	0,0186	0,1698	0,0793
<i>Medie</i>	181	13	70,9	0,0222	0,1928	0,1491
<i>Variazioni percentuali</i>				— 76	+ 12	— 17

(1) V. ZAGAMI, *Sul contenuto in glicogeno di vari segmenti del sistema nervoso centrale e di vari organi toracici e addominali.* « Arch. Fisiol. », in corso di stampa.

tenuto in glicogeno, mercè il metodo di Pflüger, combinato con quello di Bang (pel dosaggio dello zucchero riducente ottenuto in seguito alla idrolisi).

Prima di sacrificare gli animali si è proceduto sempre alla determinazione del tasso glicemico.

I risultati delle nostre esperienze, esposti nelle Tabelle annesse, permettono di rilevare i fatti seguenti:

I conigli, sacrificati 1-2 ore dopo la somministrazione di 10 U. C. di insulina (16,1 U. C., in media, pro chilo), hanno presentato - rispetto a quelli di controllo, sacrificati in condizioni perfettamente normali - una di-

TABELLA III. — *Colombi.*

Numero dell'animale	Peso Corporeo g	Insulina iniettata		Tasso glicemico % al momento della morte g	Contenuto in glicogeno per cento grammi di sostanza fresca			
		complesivamente	pro chilo		Cuore g	Muscoli femorali g	Muscoli pettorali g	Diaframma g
1	285	—	—	0,2352	0,1187	—	1,3430	—
2	350	—	—	0,1732	0,1428	0,1724	—	—
3	350	—	—	0,1699	0,0605	0,0408	—	—
4	420	—	—	0,1535	0,0619	0,0331	—	0,3615
5	400	—	—	0,1710	0,0525	0,0227	0,5219	0,1400
6	350	—	—	0,1767	0,0519	0,0360	0,6802	0,2327
7	400	—	—	0,1807	0,0791	0,0474	1,0190	1,1770
<i>Medie</i>	365	—	—	0,1800	0,0810	0,0587	0,8910	0,4778
1	275	25	90,9	0,0962	0,2874	—	0,7170	—
2	315	40	127,0	0,0818	0,3758	0,0605	—	—
3	410	40	96,4	0,0386	0,2347	0,0677	—	—
4	450	40	88,9	0,0950	0,3531	0,0324	—	—
5	380	40	105,0	0,0636	0,1365	0,0195	—	0,0876
6	380	50	131,0	0,0485	0,2615	0,0351	0,4063	0,2542
7	350	30	85,7	0,0917	0,3426	0,0565	0,8072	0,2980
<i>Medie</i>	366	38	103,5	0,0736	0,2845	0,0453	0,6435	0,2133
<i>Variazioni percentuali . . .</i>				— 60	+ 251	— 22	— 27	— 55

minuzione media del tasso glicemico dell'81%, una diminuzione media del glicogeno del 41% nei muscoli pettorali, e del 49% nei muscoli femorali; ma invece un aumento medio del glicogeno dell'83% nel cuore e del 27% nel diaframma.

I ratti, sacrificati parimenti 1-2 ore dopo la somministrazione di 10-20 U. C. di insulina (70,9 U. C., in media, pro chilo), hanno presentato — sempre rispetto a quelli di controllo normali — una diminuzione media del tasso glicemico del 76%, una diminuzione media del glicogeno del 17% nei muscoli femorali; ma un aumento medio di esso del 12% nel cuore.

I colombi, sacrificati due ore dopo la somministrazione di 25-50 U. C. di insulina (103,5 U. C., in media, pro chilo) hanno presentato — al solito rispetto a quelli di controllo normali — una diminuzione media del tasso glicemico del 60%, una diminuzione media del glicogeno del 22% nei muscoli femorali, del 27% nei muscoli pettorali e del 55% nei muscoli clavicolari; ma un aumento medio di esso del 251% nel cuore.

Ricapitolando, quindi, mentre per azione dell'insulina nei vari gruppi scheletrici (femorali, pettorali, clavicolari) si è avuta una diminuzione più o meno marcata del glicogeno, nel cuore invece si è avuto sempre un aumento, che è stato nettissimo nei colombi, netto nei conigli e modico nei ratti. Un comportamento eguale al cuore, per un sensibile aumento del glicogeno sotto l'azione dell'insulina, ha dimostrato il diaframma.

Dare fin d'ora una interpretazione di questi fatti sarebbe certo prematuro. Comunque vale intanto il rilievo, che l'aumento del glicogeno è risultato precisamente per muscoli a funzione particolare e specifica. La differenza di comportamento di questi ultimi rispetto alla muscolatura scheletrica si delinea già di particolare importanza: ci siamo pertanto indotti a studiarla più esaurientemente con ricerche metodiche, di cui a suo tempo riferiremo i risultati.

Fisiologia. — *Contributo allo studio comparato dell'anafilassi.* Nota di A. GALAMINI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Le ricerche avevano lo scopo di studiare comparativamente il decorso dell'anfilassi in animali diversi, piccioni, cavie, ratti, ma i risultati dimostrarono che uno stato di vera anafilassi non fu raggiunto con la tecnica usata in nessuno degli animali in esperimento. Tuttavia alcune osservazioni fatte sembrano interessanti e si ritiene perciò opportuno darne comunicazione. Le ricerche furono eseguite somministrando in un primo tempo ad alcuni animali siero di bue per via endoperitoneale, 5. cc. In un secondo tempo praticando ad altri animali iniezioni di 2 cc. di latte per via endoperitoneale o sotto cute e rinnovando la iniezioni sotto cute alla distanza di 15-16 giorni. I primi animali, piccioni, cavie e ratti sopportarono male la iniezione endoperitoneale e in breve tempo, 24-48 ore, morirono. All'autopsia di N. 5 cavie, si osservò congestione del tubo gastro-enterico, congestione notevolissima dei surreni non congestione della tiroide nè edema polmonare. All'autopsia di N. 11 ratti si notò notevolissimo stato congestizio della tiroide, congestione del tubo gastroenterico, dei reni e della milza, non congestione dei surreni e del polmone. All'autopsia di N. 5 piccioni si notò invece notevolissimo edema polmonare non congestione dei surreni e delle tiroidi. Prima della morte gli animali emettevano dal becco liquido siero ematico. I diversi reperti dell'autopsia indicano il modo differente caratteristico di reagire di organismi differenti da porre in rapporto evidentemente con diversi equilibri funzionali degli organi. Gli animali, che ebbero iniezione di latte, ebbero tutti lievi disturbi consistenti in dispnea, abbattimento e talvolta prurito cutaneo. Mancando la possibilità di fissare diversamente il grado di reazione degli animali si tenne conto soprattutto delle variazioni della forma leucocitaria. I risultati furono i seguenti :

(1) Nella seduta del 1° marzo 1936.

TABELLA I.

Numero	Animale	Linfociti	Neutrofili %	Eosinofili %	Basofili %	Forme di passaggio	Monociti	OSSERVAZIONI
1	Ratti	30	65	4	—	1	—	Iniezione di 2 cc. di latte endoperitoneo: dopo 16 giorni si rinnova l'iniezione sotto cute. L'animale è abbattuto dispnoico.
		29	68	2	—	—	1	Dopo 4 h.
		55	41	3	—	—	1	2 cc. di latte sotto cute.
2	»	32	60	5	—	2	1	Dopo 16 giorni si rinnova l'iniezione. L'animale è dispnoico abbattuto.
		22	75	2	—	—	1	Dopo 2 h.
		30	69	1	—	—	—	Il giorno dopo.
3	»	51	45	2	—	—	2	2 cc. di latte sotto cute. Dopo 24 giorni si rinnova l'iniezione.
		44	47	8	—	—	1	Dopo 2 h.
		29	70	1	—	—	—	Dopo 5 h.
4	»	55	43	1	—	—	1	2 cc. di latte sotto cute.
		52	43	5	—	—	—	Dopo 15 giorni si rinnova l'iniezione. L'animale è molto abbattuto.
		43	56	—	—	—	—	Dopo 4 h.
5	»	64	35	1	—	—	—	2 cc. di latte endoperitoneo.
		—	—	—	—	—	—	Dopo 16 giorni 2 cc. latte sotto cute.
		50	42	8	—	—	—	Dopo 1 h.
6	»	46	50	1	—	—	3	» 3 h.
		80	16	1	—	—	3	2 cc. di latte sotto cute.
		34	56	10	—	—	—	Dopo 2 h.
7	»	70	30	—	—	—	—	5 cc. di siero di bue endoperitoneo.
		—	—	—	—	—	—	Dopo 20 giorni 2 cc. sotto cute.
		20	79	1	—	—	—	Dopo 5 h.
8	»	10	89	1	—	—	—	Dopo 5 h. 30'.
		56	42	2	—	—	—	5 cc. di siero endoperitoneo.
		28	72	—	—	—	—	Dopo 20 giorni 2 cc. di siero sotto cute.
1	Cavia	54	46	—	—	—	—	2 cc. di latte sotto cute.
		50	49	1	—	—	—	Dopo 15 giorni si rinnova l'iniezione. Prima.
		38	57	5	—	—	—	Dopo 3 h.

Segue TABELLA I.

Numero	Animale	Linfociti	Neutrofili %	Eosinofili %	Basofili %	Forme di passaggio	Monociti	OSSERVAZIONI
2	Cavia	25	75	—	—	—	—	2 cc. di latte sotto cute. Prima.
		34	66	—	—	—	—	Dopo 16 giorni si ripete. Dopo 40'.
		15	85	—	—	—	—	Dopo 3 h.
		31	66	—	—	—	3	2 cc. di latte sotto cute. Prima.
3	»	60	30	—	6	4	—	Dopo 15 giorni idem. Dopo 15'.
		13	70	9	—	7	1	Dopo 2 h.
		40	58	—	—	2	—	Dopo 24 h.
		40	59	1	—	—	—	Prima dell'iniezione di 2 cc. di latte sotto cute.
4	»	59	35	6	—	—	—	Dopo 2 h.
		64	36	—	—	—	—	Dopo 5 h.
		90	9	—	—	—	1	5 cc. di siero di bue endoperitoneo. Prima.
1	Piccione	—	—	—	—	—	—	Dopo 20 giorni 2 cc. endoperitoneo.
		58	20	22	—	—	—	Dopo 3 h.
		45	—	54	—	—	—	Dopo 6 h.
		49	51	—	—	—	—	2 cc. di latte sotto cute. Prima.
2	»	14	72	13	—	—	1	Dopo 15 giorni si rinnova. Dopo 20'.
		17	58	45	—	—	—	Dopo 2 h. l'animale è abbattuto dispoico.
		57	41	—	—	2	—	2 cc. di latte sotto cute.
3	»	72	28	—	—	—	—	Dopo 15 giorni nuova iniezione. Dopo 6'.
		62	23	12	—	3	—	Dopo 2 h.
		51	38	11	—	—	—	Prima dell'iniezione di 2 cc. di latte sotto cute.
4	»	88	11	1	—	—	—	Dopo 2 h.
		64	34	9	—	—	—	Dopo 5 h.

L'esame dei risultati conduce alle seguenti osservazioni:

La iniezione di latte nei ratti albiu provocò sempre aumento dei polinucleati neutrofili e degli eosinofili e diminuzione dei linfociti. Nelle cavie la prima iniezione di latte, determinò in primo tempo aumento dei linfociti, degli eosinofili e diminuzione dei polinucleati neutrofili. Un comportamento opposto, per quanto concerne i linfociti e i polinucleati si ebbe all'iniezione di latte fatta a distanza di tempo.

L'iniezione di latte in piccioni precedentemente sensibilizzata ha dato disturbi manifesti ma lievi, e variazioni del sangue consistenti in diminuzione dei linfociti aumento dei polinucleati neutrofil e degli eosinofili. Un fenomeno inverso si osservò alla prima iniezione.

Una osservazione importante verte sul contegno degli eosinofili. Nelle cavie e nei ratti la comparsa degli eosinofili si fece senza gradi di passaggio. Gli eosinofili delle cavie avevano il normale aspetto noto. Quelli dei ratti erano caratterizzati da un nucleo tipico a ciambella e da una eosinofilia diffusa del protoplasma e non limitata a grosse granulazioni. Nei piccioni si osservò un graduale passaggio dai polinucleati neutrofil agli eosinofili. Nel protoplasma dei polinucleati comparvero e aumentarono gradatamente granulazioni a forma di bastoncino, nettamente eosinofile, fino ad occupare tutto lo spazio cellulare e a dare alla cellula l'aspetto rigonfio caratteristico degli eosinofili.

Fisiologia. — *Anafilassi alimentare e vagotomia sottodiaframmatica.* Nota di A. GALAMINI⁽¹⁾ presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Si distinguono tre forme di anafilassi alimentare: da sensibilizzazione per via alimentare; da penetrazione in circolo attraverso il tubo gastroenterico di antigeni precedentemente introdotti per via parenterica; da sensibilizzazione e da introduzione scatenante di antigeni immessi per via parenterica. È noto che gli antigeni sono generalmente sostanze proteiche complesse che perdono il potere di sensibilizzare con la digestione peptica, da autolisi, ma più specialmente triptica (Wels).

Si conoscono ricerche che dimostrano la possibilità degli antigeni di superare la barriera del tubo gastroenterico (Ascoli, Belfanti, Viganò, Micheli, Lust). Il passaggio avviene generalmente nel caso di lesioni o di turbe funzionali gravi del tubo gastroenterico.

Con le presenti ricerche si è indagato se la sezione sottodiaframmatica del vago, eseguita al livello della parte inferiore dell'esofago, inducesse variazioni negli organi digestivi, tubo gastroenterico, fegato ecc. tali da consentire il passaggio in circolo di proteine eterogenee. Le ricerche furono fatte sui ratti albin che resistono bene all'intervento operatorio. L'analisi fu rivolta alle variazioni della formula ematica. Non essendosi in questo caso come in altri già riferiti, osservati in questi animali disturbi caratteristici anafilattici, il titolo di questa Nota è posto con riserva.

(1) Le ricerche furono eseguite nell'Istituto di Fisiologia umana della R. Università di Roma.

I risultati delle ricerche furono i seguenti: Dopo un pasto normale la formula leucocitaria dei ratti albi in un caso non subì modificazioni. In un altro si notò un aumento transitorio dei polinucleati neutrofili da 47 al 62 %. Dopo 8 ore gli eosinofili aumentarono dal 2 al 10 %.

A tre ratti si praticò una iniezione sottocutanea di 2 cc. di latte, senza precedente intervento operatorio. Aumentarono subito dopo i polinucleati neutrofili fino a raggiungere il massimo dopo nove ore dall'iniezione, dal 30 al 70 %. Nel giorno successivo la formula leucocitaria si normalizzò. In un caso gli eosinofili raggiunsero il 13-15 %. Una seconda iniezione di latte, fatta il giorno successivo dette gli stessi risultati. In un caso fu più evidente la eosinofilia, 25 %.

In un ratto operato che aveva avuto da tempo, 16 giorni, una iniezione di latte, la somministrazione di 20 cc. di latte per bocca provocò l'aumento dei polinucleati da 48 a 61 %. Dopo 8 ore dall'ingestione della sostanza, gli eosinofili aumentarono a 9 %. La sezione sottodiaframmatica bilaterale del vago provocò sempre aumento dei polinucleati neutrofili, diminuzione dei linfociti. In cinque casi rispettivamente da 36 a 46, da 22 a 63, da 58 a 71, da 55 a 54, da 40 a 60 %. In ratti operati ai quali si dette latte per bocca, per la prima volta, 20 cc., si osservò o lieve aumento dei polinucleati neutrofili o non variazione della formula leucocitaria. Gli stessi fatti si osservarono con somministrazione del latte per bocca, fatta nei giorni immediatamente successivi. Quando la somministrazione di latte per bocca fu fatta a distanza di tempo, 16-20 giorni dalla prima volta, non si osservò nemmeno variazione della forma leucocitaria, comparvero in circolo emazie granulo filamentose. Negli animali operati, cinque, nei quali si inoculò latte, 2 cc. sottocute, si provocò un forte aumento dei polinucleati neutrofili, rispettivamente da 39 a 64, da 47 a 85, da 60 a 78 % in tre casi, con contemporanea diminuzione dei linfociti. Una seconda iniezione provocò variazioni meno evidenti dei polinucleati con lieve tendenza all'eosinofilia, 8-10 %. Negli animali operati, tre, che ebbero latte sottocute, e più tardi latte per bocca, si notò aumento percentuale dei polinucleati neutrofili rispettivamente da 57 a 64, da 48 a 61, da 63 a 68, aumento tardivo, il giorno dopo, degli eosinofili, a 16, 9, 9 %. Poichè i risultati precedenti non dettero indicazioni tali da far pensare a veri e propri stati di anafilassi, sebbene indicassero una certa modificazione dell'organismo animale, tale da far sospettare il passaggio in circolo di proteine eterogenee, si estese la ricerca ad animali alimentati con riso brillante perchè, secondo alcuni Autori, la carenza del complesso vitaminico B rappresenta una condizione indispensabile per la sensibilizzazione dei ratti albi. La iniezione di 1 cc. di latte in ratti albi in accrescimento e in avitaminosi determinò aumento dei polinucleati neutrofili da 37 a 54 %; da 33 a 66, da 49 a 72, da 37 a 72 %. La ingestione a distanza di tempo di latte per bocca dopo alcune ore di digiuno, fece anche aumentare i polinucleati neutrofili, in due casi da 51 a 79, da 55 a 68 %.

Si osservò anche una lieve tendenza alla eosinofilia, del 5-10 %. Gli stessi risultati si ebbero nei ratti albinì adulti operati come quelli in accrescimento e come questi sottoposti ad una dieta carenzata B₁. Risultati analoghi infine si ebbero in animali operati alimentati con riso brillato cotto, ai quali si dette latte per bocca, 20-30 cc., e si ripeté la somministrazione a distanza di tempo.

Dal complesso dei fatti esposti sembra risultare che ratti operati di sezione bilaterale del vago sottodiaframmatica non si comportarono diversamente dai ratti normali, nemmeno quando furono alimentati con dieta carenzata di vitamina B₁, in seguito alla ingestione di proteine eterogenee per bocca, o alla inoculazione fatta per via sottocutanea. Le reazioni osservate dopo una prima somministrazione non furono differenti da quelle notate a distanza di tempo, quando presumibilmente si sarebbe dovuto determinare uno stato di sensibilizzazione; pertanto, con ogni probabilità, tale stato di sensibilizzazione non fu raggiunto o non fu posto in evidenza.

Patologia. — *Contributo alla conoscenza della fine struttura della fibra muscolare striata in condizioni normali e patologiche.* — Nota III. *I processi regressivi dei componenti la striatura trasversale* ⁽¹⁾. Nota di A. BASILE presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. C. CIACCIO.

Continuando lo studio della fine struttura della fibra muscolare striata, riferirò in questa Nota sul comportamento dei vari elementi della striatura trasversale in alcuni processi patologici.

Come è noto la scomparsa della striatura trasversale è considerata come uno dei primordiali e più importanti fenomeni regressivi della fibra muscolare. Ma lo studio di questo fenomeno non è stato approfondito per quanto riguarda le modalità di scomparsa dei singoli elementi della striatura e le fini alterazioni di essi.

Ho voluto perciò riprendere l'argomento applicando allo studio dei preparati patologici il metodo tricromico di Mallory, il quale, come ho esposto in altra Nota, è bene adatto alla dimostrazione dei vari elementi della striatura.

Tecnica. — Ho sperimentato su cavie, nelle seguenti condizioni sperimentali:

1° intossicazione con tossina difterica, per iniezione intramuscolare, esaminando sia i muscoli in corrispondenza dell'iniezione, sia vari altri;

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia generale della R. Università di Messina.

(2) Nella seduta del 5 aprile 1936.

2° setticemia da b. tifico; 3° intossicazione da fosforo; 4° intossicazione da arsenico; 5° atrofia da nevrectomia.

I muscoli sono stati fissati, in estensione, in liquido di Ciaccio e in acido tricloracetico 4‰, inclusi in paraffina e colorati con il metodo di Mallory e con l'ematossilina ferrica secondo Heidenhain.

Risultati. — Nelle prime quattro di queste condizioni si provocano nella fibra muscolare alterazioni più o meno gravi e più o meno diffuse ai vari muscoli.

Ma mi occuperò in questa Nota dei fenomeni regressivi che ho riscontrato nelle varie formazioni che contribuiscono alla striatura, premettendo, d'altra parte, che queste sono le prime lesioni, in ordine di tempo, che si verificano in tutta la fibra; per lo meno nelle condizioni da me studiate.

Fra i costituenti dell'incomma richiamano particolarmente l'attenzione il disco Q e la stria Z.

Seguendo il processo nei suoi vari gradi ecco, riassumendo, quanto si verifica.

Il primo stadio alterativo è riferibile ad un turbato metabolismo lipidico; e così, come ho già esposto in altra Nota⁽¹⁾, si osserva una prima fase che ho chiamata « imbibizione lipidica del disco Q », in cui questa formazione — la quale è la prima della fibra a risentire del processo patologico — appare come diffusamente imbibita da un lipide e per tanto si colora uniformemente in giallo pallido col Sudan. In una seconda fase, che ho chiamata « lipidosi trasversale » si ha la comparsa a livello del disco Q, di goccioline lipidiche, che si fanno via via più numerose e più grandi fino a mascherare completamente detta formazione.

A questo punto iniziano nel disco Q importanti modificazioni morfologiche che si mettono bene in evidenza nei preparati fissati e inclusi. Il disco Q, che nelle fibre normali fissate appare come una banda uniforme e a contorni netti attraversata dalla stria di Hensen, diminuisce sempre più di spessore, perde la primitiva affinità per i colori fino ad apparire come una semplice linea appena visibile, che poi finisce con lo scomparire. Altre volte si ha in una prima fase, una frammentazione del disco in piccoli blocchetti isolati, che poi vanno incontro ad un processo dissolutivo, in seguito a che il disco Q scompare come entità morfologica.

In questo stadio regressivo la stria Z non presenta apprezzabili alterazioni: colorando le sezioni col Mallory essa appare tinta in rosso, rimanendo così l'unico elemento dimostrabile della striatura; è interessante notare però che con il metodo di Heidenhain all'ematossilina ferrica la striatura trasversale sembra completamente scomparsa, ma ciò è dovuto al fatto che la stria Z, con questo metodo non è bene colorabile. È forse questa una ragione per la quale i numerosi AA., che hanno adoperato per lo studio del

(1) « Boll. Soc. Biol. Sperimentale », X, fasc. 4º, 1935.

tessuto muscolare patologico questo metodo, hanno sempre parlato di scomparsa della striatura trasversale, *in toto*.

La persistenza della stria Z dopo la scomparsa del disco Q si può constatare in tutti gli stati tossici e tossinfettivi da me sperimentati.

In uno stadio alterativo più avanzato si manifesta una netta fibrillatura longitudinale: fascetti di miofibrille si distaccano e si allontanano gli uni dagli altri, e nello stesso tempo si notano altre gravi alterazioni a carico della fibra, comparsa di vacuoli, alterazioni regressive nucleari ecc.

È in questo stadio che la stria Z presenta le prime alterazioni; difatti essa appare interrotta nella sua continuità, ed irregolare; perde la normale affinità per i colori; e finalmente non è più dimostrabile.

In un periodo più progredito si ha la scomparsa di ogni struttura e della fibra non resta che un ammasso informe.

Per quanto riguarda l'altra condizione patologica da me sperimentata e cioè l'atrofia da nevrectomia, ricordo solo che anche in questa il disco Q è la prima formazione della fibra che va incontro a processi regressivi, fino a scomparire: si arriva così ad uno stadio in cui della striatura rimane solo la stria Z ancora perfettamente integra, mentre in un secondo periodo anche essa scompare.

Conclusioni. — Dalle ricerche sinteticamente esposte due punti richiamano particolarmente l'attenzione. Primo: che il disco Q — o, per coloro che non ammettono come preesistente *in vivo* tale formazione, l'immagine equivalente che il disco Q rappresenta nei preparati fissati — si dimostra la parte più sensibile della striatura trasversale di fronte agli agenti morbosì: in esso infatti si verificano le alterazioni iniziali ed è il primo a scomparire. Questo fatto concorda con quanto da altri AA. è stato osservato in vari processi di istolisi. Devo ricordare, d'altra parte, che fibre, nelle quali non è più dimostrabile il disco Q, possono ugualmente contrarsi; ed astraendo per ora da eventuali modificazioni nella contrazione, che mi riservo d'indagare, resta per lo meno confermato quanto altri hanno già ammesso, e cioè che il disco Q non è indispensabile per la contrazione.

Il secondo punto riguarda la particolare resistenza della stria Z ai processi alterativi.

Ciò è in accordo in linea generale con quanto è stato notato da G. Ciaccio ⁽¹⁾ in altre condizioni sperimentali, come leggo in una recente pubblicazione venuta a mia conoscenza durante l'estensione di questa Nota.

Non risulta però dalle mie osservazioni che la stria Z persiste tanto a lungo come appare nelle ricerche di G. Ciaccio; o per lo meno con il metodo di Mallory, che, come ho già rilevato, nei mammiferi serve bene a dimostrare questa formazione, io non l'ho potuto più mettere in evidenza dopo la distruzione delle miofibrille.

Ciò potrebbe essere in rapporto o alle condizioni sperimentali differenti o ai metodi di indagine.

(1) « Atti » della R. Acc. Fisiocratici in Siena, 1935.

Fisiologia. — *Decorso dell'attività cardiaca durante l'asfissia.* Nota di A. GALAMINI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Curva alcoolemica e beriberi sperimentale.* Nota di A. GALAMINI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Sulla sopravvivenza del « Bufo vulgaris » alla pneumectomia bilaterale.* Nota di A. GALAMINI e E. SERIANNI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia (Chimica biologica). — *Sul comportamento dei corpi creatinici del solfo e del cloro urinarii nel digiuno e nella rialimentazione.* Nota di V. ZAGAMI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio BIANCHI presenta il volume VII delle « Opere di G. Schiaparelli », la sua Commemorazione dello Schiaparelli tenuta in occasione delle celebrazioni piemontesi, e alcune pubblicazioni della R. Specola di Brera con le seguenti parole:

« Mi onoro presentare in omaggio all'Accademia il volume VII delle « Opere di Giovanni Schiaparelli » edita a cura della R. Specola di Brera.

« Esso contiene le ricerche del grande astronomo nel campo dell'Astronomia stellare, stelle doppie escluse perchè già considerate nel precedente volume VI.

« Le due Memorie sulle distanze e sulla distribuzione apparente delle stelle dei vari ordini di splendore (separate nel tempo per ben ventisei anni di assoluto silenzio in merito a questi problemi), oltre il contributo di idee originali, denotano la crisi di pensiero attraversata dallo Schiaparelli circa la potenzialità concreta dell'alta astronomia di posizione a vincere il problema delle parallassi, ossia delle distanze stellari.

« Segue poi il Catalogo di 1119 stelle osservate da Schiaparelli e Celoria fra il 1860 e il 1872, al C. Meridiano di Starke; catalogo che ancor oggi merita di essere ricordato non tanto per il contributo concreto ch'esso può portare all'Astronomia stellare di posizione, quanto per lo sforzo di critica dei risultati con il quale lo Schiaparelli tentò di sopperire alle deficienze tecniche radicali dello strumento usato.

« Chiude il volume la grande Memoria (di circa mezzo secolo fa) con la quale lo Schiaparelli dettò le norme da seguire per una eventuale revisione e ricalcolazione del famoso *Catalogo stellare* del Piazzì. Memoria pur questa da dirsi ben degna della mente dello Schiaparelli, anche se oggi appaia indubbia la risposta da darsi alla domanda se una ricalcolazione del *Catalogo* del Piazzì debba ritenersi necessaria e consigliabile ai fini del progresso effettivo dell'Astronomia stellare.

« Per i volumi successivi (l'VIII è già in corso di preparazione), ci attendono i lavori di carattere matematico, quelli geodetici e quelli meteorologici; poi le piccole monografie o recensioni; infine le grandi ricerche dello Schiaparelli nel campo della Storia dell'Astronomia, ricerche alle quali, senza dubbio alcuno, è affidata la massima gloria del grande solitario di Brera.

« Anche alla preparazione di questo volume VII ha atteso con grande diligenza degna della più alta lode il mio collega prof. ing. Luigi Gabba ».

« Offro anche in omaggio all'Accademia la commemorazione di Giovanni Schiaparelli da me tenuta a Milano l'anno scorso in occasione del centenario della sua nascita, e in armonia con le "Celebrazioni Piemontesi" del 1935.

« Infine presento i « Contributi della R. Specola di Brera » nn. 29, 30, 31 e 32.

« I primi due dell'ing. Vocca trattano del rinforzo di alcune fotografie astronomiche e della conseguente nuova misurazione microfotometrica del diametro angolare della nebulosa di Andromeda.

« Il n. 31 è relativo a taluni calcoli d'orbita.

« Il n. 32 dà la descrizione del nuovo microfotometro che abbiamo costruito nell'officina meccanica dell'Osservatorio di Brera. Nei riguardi di questo strumento basterà accennare alla ricerca che ne determinò la costruzione, alle sue caratteristiche tecniche fondamentali ed ai risultati sino ad oggi con esso ottenuti.

« Dovendo utilizzare più che 5000 spettri di 1300 stelle allo scopo di dedurre le parallassi spettroscopiche, lo studio del problema mi convinse della possibilità di gravi errori quando si basi lo sfruttamento degli spettri sul metodo, alquanto semplicista, della stima ad occhio delle caratteristiche spettrali che stanno a fondamento della deduzione della parallasse; donde la necessità assoluta di associare ormai, in ricerche di questo genere, le anzidette caratteristiche a valutazioni numeriche, cioè quantitative, effettuabili solamente sopra microfotogrammi degli spettri in esame.

« Il nostro microfotometro, oltre tutte le peculiarità ben note dei migliori di questi strumenti, ha la possibilità di ridurre comunque minime (in altezza, cioè, ed in spessore) le dimensioni dell'elemento illuminato di lastra man mano agente sull'organo ricevente del microfotometro; la possibilità, poi, di seguire durante tutto il suo sviluppo la microfotometria in corso d'esecuzione; infine la possibilità di usare come organo ricevente tanto la termopila in vuoto, quanto cella fotoelettrica, senza bisogno, in questo secondo caso, di ricorrere ad amplificazione termoionica, ma col microgalvanometro derivato direttamente dalla cella fotoelettrica.

« Dei nostri 5000 spettri sopra accennati, più di 3000 sono già registrati con risultati ottimi, tanto che nutriamo fiducia di poter, come in generale si fa, scrivere anche le nostre parallassi stellari con tre cifre decimali del secondo d'arco (cioè al millesimo), senza però dover trepidare della seconda di esse (cioè del centesimo) ».

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta i libri giunti in omaggio segnalando gli « Atti della I Riunione dell'Associazione Ottica Italiana (Firenze 21-24 maggio 1934) »; il « Corso elementare di ottica » di V. Ronchi; « Gli scritti di Leonardo da Vinci sul volo » di R. Giacomelli, un volume della Carnegie Institution sulle « Sorgenti calde nel parco nazionale di Yellowstone in America ».

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio LEVI-CIVITA legge, anche a nome del Socio AMALDI, la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria di R. Einaudi: « Sulle singolarità isolate delle soluzioni dell'equazione delle ruote ».

L'Assemblea approva.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Il Socio ENRIQUES presenta per la inserzione nelle « Memorie » il lavoro di F. Conforto « Sui fasci d'Halphen i cui punti base appartengono a una cubicaellittica degenerare ».

Il Presidente MILLOSEVICH propone che a esaminare la Memoria presentata siano nominati i Soci ENRIQUES e CASTELNUOVO.

L'Assemblea approva.

Presentano Note per l'inserzione nei Rendiconti i Soci: AMALDI, ARMELLINI, BAGLIONI, BOMPIANI, BORDONI, CARANO, CASTELNUOVO, CROCCO, ENRIQUES, GIORGI, LEVI-CIVITA, SCORZA.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 5 aprile 1936

- ALLEN E. T. and DAY ARTHUR L. — Hot Springs of the Yellowstone national Park. Washington, 1935. 4°, pp. I-XVIII.
- Annuario dell'Associazione ottica italiana. Atti della Iª riunione dell'Associazione. Firenze, 21-24 maggio 1934. Firenze, 1935. 8°, pp. 1-518.
- BIANCHI E. — Giovanni Schiaparelli nel centenario della nascita. (Estr. dai « Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano ». Vol. IX). Milano, 1935. 8°, pp. 1-25.
- CLERICI CARLO. — Osservazioni sulla supposta espansione dell'Universo. (Estr. da « Urania ». N. 1, 1936). Torino, 1936. 8°, pp. 1-16.
- CORRAL JOSÉ ISAAC. — Brigadas de sustituciones. Parte II. Brigadas imperfectas. Toledo, 1935. 8°, pp. 129-356.
- COTTINI AGOSTINELLI GIACINTO. — L'Institut international d'Agriculture. Le développement intégral de son activité. Rome, 1933. 4°, pp. 1-80.
- DAY ARTHUR L. — Vedi ALLEN. E. T.
- DULAC H. — Curvas definidas por una ecuación diferencial de primer orden y de primer grado. Lecciones profesadas durante el curso de 1931-32. Madrid, 1933. 8° pp. 1-178.
- Ente Nazionale Serico. — Annuario Serico 1934. Notizie statistiche sulla produzione e sul commercio dei bozzoli della seta e delle seterie in Italia e all'estero. Milano, 1936. 8°, pp. 1-129.
- FACCIOLA LUIGI. — Nuovi organi nervosi scoperti nel *Macrurus coelorhynchus* Riss. (Estr. dagli « Atti della Soc. Ital. di Scienze Naturali ». Vol. LXIX, pp. 341-353). Milano, 1930. 8°.
- FUBINI G. — Principio de mínimo. Conferencias dadas en el Laboratorio Matematico de la Junta de ampliación de Estudios en la primavera de 1935. Madrid, 1935. 8°, pp. 1-22.
- GIACOMELLI R. — Gli scritti di Leonardo da Vinci sul volo. Prefazione del Ten. Generale Cristoforo Ferrari. Roma, Editore G. Bardi, 1936. 8°, pp. 1-306.
- HUMBERT PIERRE. — Potentiels et prépotentiels (Cahiers scientifiques. Fasc. XV). Paris, Editeur Gauthier Villars, 1936. 8°, pp. I-VIII, 1-80.
- LOMBARDI CESARE. — Orbita ellittica e perturbazioni del piccolo pianeta 1934 OB = (1334). (Estr. dalle « Memorie della Società Astronomica Italiana ». Vol. IX-2). Pavia, 1935. 8°. pp. 1-10.
- LONGO BIAGIO. — Relazione per l'anno 1935 sulla Stazione sperimentale per le piante officinali annesse al R. Orto Botanico di Napoli. (Estr. dal « Boll. dell'Orto Botanico della R. Università di Napoli ». Tomo XIII, pp. 59-69). Napoli, 1935. 8°.
- LONGO LUIGI. — Studio chimico mineralogico delle squamette delle foglie di *Saxifraga aizoides* Jacq. vivente sulla Dolomia. (Estr. dal « Boll. dell'Orto Botanico della R. Università di Napoli ». Tomo XIII, pp. 27-30). Napoli, 1936. 8°.
- LORIA GINO. — Contributi matematici dati dal d'Alembert all'« Encyclopédie Méthodique ». (Extr. du vol. « Actes conférences et commentations du III Congrès International d'Histoire des Sciences tenu au Portugal en 1934 ». Lisboa, 1935. 8°, pp. 1-15).
- LORIA GINO. — Lagrange nelle Accademie di Berlino e Parigi. (Estr. dal volume « Anton Maria Lorgna. Memorie pubblicate nel II Centenario della nascita »). Verona, 1935. 8°. pp. 1-10.
- LORIA GINO. — La préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire dans

- les divers pays. (Extr. de l'«Enseignement mathématique». N° 1-2, 1933). Paris, 1933. 8°.
- LORIA GINO. — Michel Chasles e la teoria delle sezioni coniche. (Reprinted from «Osiris». Vol. I, pp. 420-450). Bruges, 1936. 8°.
- RONCHI VASCO. — Corso elementare di ottica. (R. Istituto Nazionale di Ottica di Firenze). Firenze, 1935. 8°, pp. 1-371.
- SCHIAPARELLI G. V. — Le opere di G. V. Schiaparelli pubblicate per cura della R. Specola di Brera. Tomo VII. Milano, Editore Ulrico Hoepli, 1935. 4°. pp. 1-452.
- TAVANI F. — Light and Gravitation. (From the «Philosophical Magazine». Ser. VII, vol. XXI, pp. 564-572). London, 1936. 8°.
- VOCCA PAOLO. — Alcuni rinforzi di fotografie di comete. (Estr. dalle «Memorie della Società Astronomica Italiana». Vol. IX). Pavia, 1936. 8°, pp. 1-2.
- VOCCA PAOLO. — Il diametro della nebulosa di Andromeda. (Estr. dalle «Memorie della Società Astronomica Italiana». Vol. IX). Pavia, 1936. 8°, pp. 1-7, tav. I-III.
- VOCCA PAOLO. — Il nuovo microfotometro dell'Osservatorio di Milano-Merate. (Estr. dalle «Memorie della Società Astronomica Italiana». Vol. IX). Pavia, 1936. 8°, pp. 1-24.
- WINANTS MARCEL. — Chacun des deux problèmes (a_0 , III, 3'') et (a_0 , III, 2') peut être résolu par le moyen d'une équation intégrale ayant un nombre infini de termes. (Extr. du «Bulletin de l'Académie royale de Belgique». Classe des Sciences, Ser. 5^e; t. XXII). Bruxelles, 1936. 8°. pp. 1-25.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEL LINCESI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 19 aprile 1936 (anno XIV)

MEMOIE E NOTE DI SOCI

Biologia. — *Natura chimica, incremento, reversibilità del condrioma.* Nota^c del Socio A. Russo.

I *condriosomi*, messi in rilievo da C. Benda⁽²⁾ tra il 1898 ed il 1900, con un metodo microtecnico, che da lui prende il nome, furono osservati successivamente in quasi tutte le cellule dei *Metazoi* e dei *Metafiti*, e, nelle forme di più semplice struttura, i *Protozoi*. Tali elementi del citoplasma, essendosi osservati anche nel vivente, non è più dubbio siano entità reali; cosicchè alcuni li hanno identificati con altre formazioni granulari, come i *granuli di Altmann*, già molto tempo prima messi in evidenza con le *colorazioni vitali* e con vari metodi microtecnici.

Il Benda e successivamente la maggioranza degli autori ritennero i condriosomi parte essenziale e primitiva del citoplasma, un *istomero*, secondo Heidenhain, perciò immutabili come altri corpi protoplasmatici, quali i *centrioli* ed il *centrosoma*. Come questi, anche il granulo condriosomico potrebbe dividersi e moltiplicarsi, ciò che spiegherebbe, secondo Duesberg⁽³⁾, il loro aumento numerico nel successivo accrescimento della cellula.

(1) Presentata nella seduta del 19 aprile 1936.

(2) C. BENDA, *Die Mitochondria*. « *Ergebnisse d. Anat. u. Entwicklungsgeschichte* », Bd. XII, 1892.

(3) S. DUESBERG, *Plastosomen* « *Apparato reticolare interno und Chromidialapparat*. « *Ibidem* », Bd. XX, 1912.

Nel 1906⁽¹⁾, quando tali erano le conoscenze su la natura dei condriosomi, essi si trattarono l'argomento, attuando un nuovo metodo di ricerca, ed ottenendo primi risultati, che modificavano le vedute dei citologi. Iniettando, difatti, Fosfatide, la *Lecitina*, nota allora per l'azione prevalente nell'attivare la moltiplicazione cellulare e l'accrescimento, ottenni dentro il citoplasma degli elementi ovarici a carattere embrionale, gli oociti, ancora privi di prodotti secondari, un aumento numerico dei granuli condriosomici, riconoscibili per la loro colorabilità con i metodi specifici (*Benda-Heidenhain*). Sorse il dubbio, manifestato da qualche autore, potersi trattare di globuli di *deutolecite*, formatisi direttamente dalla lecitina iniettata, ma tale possibilità ha dovuto essere scartata, essendo i granuli, negli oociti delle Coniglie iniettate, simili a quelli, che, in minor numero, si osservavano negli oociti delle Coniglie tenute per controllo.

In queste prime ricerche, insieme ai granuli, nei soggetti lecitinati, si è osservato alla periferia degli oociti, alla base delle cellule follicolari, una sostanza amorfa con caratteri di colorabilità analoghi a quelli dei condriosomi.

Nel 1910⁽²⁾, per meglio constatare se tali elementi fossero immutabili, secondo l'opinione ancora corrente, sottoposi alcune Coniglie a conveniente digiuno, osservando che essi subivano notevoli alterazioni, senza scomparire del tutto, in quanto assumevano poco i coloranti specifici, mostrandosi con una tinta assai sbiadita, mentre si assottigliavano e si deformavano. Tali elementi riprendevano il carattere primitivo quando cessava il digiuno, mostrando di essere reversibili.

Nel 1912⁽³⁾, nel mettere in maggiore luce i fatti precedentemente accertati, relativi all'aumento ed alla reversibilità dei condriosomi, insisteva sul fatto che una sostanza omogenea, di analoga costituzione microchimica, si accumulava alla periferia dell'oocite. Tale sostanza ho denominata *mitocondrogena*, ritenendo che essa potesse direttamente o indirettamente influire su l'aumento del condrioma. Dopo le mie ricerche, tra il 1901 ed il 1910, vari autori, come *Regaud*, *Fauré-Fremiet*, *Policard*, *Mawas*, *Nagotte*, *Mayer*, *Rathery*, *Schaeffer* e successivamente *Parat* ed altri, dimostrarono che, nella costituzione dei condriosomi, entri un lipoide, associato ad una proteina, del tipo delle *lecito-albumine*, confermando la natura prevalentemente lipoidea dei

(1) A. RUSSO, *Prime ricerche dirette a determinare la permeabilità e la struttura istochimica della zona pellucida nei Mammiferi*. « Boll. Acc. Gioenia », Catania, 1906; *Id.*, *Differenti stati dei corpi cromatici nell'ooplasma dei Mammiferi e loro riproduzione spermatociale*. « *Ibidem* », 1906; *Sull'origine dei mitocondri e sulla formazione del deutoplasma nell'oocite di alcuni Mammiferi*. « Rend. R. Acc. Lincei ». Roma, 1907.

(2) A. RUSSO, *Sui mutamenti che subiscono i mitocondri ed i materiali deutoplasmatici dell'oocite di Coniglia in diversi periodi di inanizione*. « Arch. für Zellforschung », Bd. 5, 1910. Leipzig.

(3) A. RUSSO, *Aumento dei granuli protoplasmatici nell'oocite delle Coniglie iniettate con Lecitina, loro diminuzione nelle Coniglie digiunanti e loro natura lipoide e mitocondriale*. « *Ibidem* », Bd. 8, 1912.

granuli e della sostanza mitocondriogena, aumentati artificialmente con l'uso della lecitina.

Dulzetto nel 1921⁽¹⁾, applicando metodi microchimici diversi per il riconoscimento dei lipoidi cellulari e dei condriosomi, dimostrò che negli oociti degli Uccelli (*Fringilla*, *Gallus*, *Passer*), durante la loro evoluzione, attorno la vescicola germinativa, in un primo tempo, si forma una zona di sostanza lipoidea, dentro cui, in seguito, appaiono dei granuli con i caratteri di colorabilità dei condriosomi. Averdo seguito minutamente la *vitellogenesi*, ha potuto notare che da tali granuli, come nei Mammiferi, si formavano anche negli Uccelli i globuli di vitello.

Al riconoscimento di una costituzione lipo-proteica dei condriosomi, negli anni successivi furono aggiunte nuove conoscenze.

I progressi su lo stato colloidale della materia vivente (Bottazzi, 1923) e le nozioni su la natura lipo-proteica dei componenti le micelle citoplasmatiche hanno permesso, difatti, interpretare meglio i risultati delle pure indagini morfologiche.

Oggi è ammesso che il citoplasma è un sistema colloidale eterogeneo-polifasico, in cui i granuli o bastoncelli, che formano i condriosomi, rappresentano punti di gelificazione, costituenti una fase distinta dalla fase liquida, omogenea, fondamentale, dentro cui quelli si generano e si rigenerano.

Diversamente di quello che, per lungo tempo, si ritenne dai puri morfologi, cioè che i condriosomi fossero elementi immutabili del citoplasma, tali corpi non solo possono mutare di forma e riprendere dopo la forma primitiva, essendo reversibili, ma tra la fase liquida e quella gelificata, il condrioma, avviene un continuo scambio di sostanza. Condriosomi si dissolvono e si ricostituiscono di continuo. Questo spiega come la massa del condrioma di una stessa cellula possa diminuire ed aumentare entro limiti estesi. Nel protoplasma debbono prodursi dunque di continuo dei mutamenti di fase dei colloidi, altrimenti le variazioni quantitative in una determinata cellula delle unità condriosomiche, prodotti di gelificazione del colloide fluido, riuscirebbe inesplicabile (Levi, 1935).

(1) F. DULZETTO, Sulla distribuzione e sulla fisiologia dei lipoidi nell'oocite in accrescimento degli Uccelli, con alcune osservazioni su la struttura della granulosa. « Ricerche di Morfologia », vol. II. Roma, 1921-22.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Cinemotica integrale*. Nota di W. BLASCHKE, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. E. BOMPIANI.

Nel 1840 J. Steiner ⁽²⁾ ha trovata la formola seguente per il volume d'un corpo parallelo nella distanza h ad un corpo convesso

$$(1) \quad V(h) = V + A h + M h^2 + \frac{4\pi}{5} h^3.$$

Nel caso d'una superficie regolare A ed M significano l'area e l'integrale della curvatura media della superficie:

$$(2) \quad M = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dA.$$

Nel 1935 L. A. Santaló ⁽³⁾ ha data una formola più generale utilizzando la densità cinematica d'un corpo rigido nello spazio Euclideo secondo H. Poincaré ⁽⁴⁾.

Nella Nota seguente vorrei indicare una nuova generalizzazione delle formole di Steiner e di Santaló, che ha il vantaggio d'offrire una strana connessione fra la geometria metrica e la topologia.

Sia R_i una regione limitata di S_3 , la cui frontiera F_i sia formata d'un numero finito di poliedri. $K_i = K(R_i)$ sia la « curvatura integrale » di Gauss per F_i . Se per esempio la frontiera contiene soltanto una superficie chiusa, avremo

$$(3) \quad K_i = 4\pi(1 - p),$$

dove p è il « genere » della superficie considerata. Nel caso più generale si ottiene una somma di tali multipli di 4π .

La nostra formola è la seguente

$$(4) \quad \int K(R_0 \cdot R_1) \cdot R_1 = 8\pi^2 \{ V_0 K_1 + A_0 M_1 + M_0 A_1 + K_0 V_1 \}.$$

(1) Nella seduta del 5 aprile 1936.

(2) J. STEINER, « Berliner Akademieberichte », pp. 114-118, 1840.

(3) Il lavoro del SANTALÓ, *Ueber das kinematische Mass im Raum*, è uscito nella collezione « Actualités scientifiques... », n. 357. Parigi, 1936.

(4) Cfr. per esempio W. BLASCHKE nella collezione precedente, n. 252, 1935.

$R_0 \cdot R_1$ è l'intersezione delle regioni R_0 e R_1 , R_0 è la regione fissa, R_1 la regione che si muove come un corpo rigido e la sua densità cinematica. L'integrale si estende a tutte le posizioni di R_1 . D'altra parte V_i , A_i , M_i , K_i significano il volume, l'area, l'integrale della curvatura media e l'integrale della curvatura di Gauss per la frontiera della regione R_i .

La dimostrazione si può ridurre al caso semplice, che R_0 e R_1 siano tetraedri, segnando le R_i in pezzi ed osservando una certa additività delle formole (4) ed utilizzando per i funzionali V , A , M , K la proprietà seguente

$$(5) \quad F(R') + E(R'') = F(R' + R'') + F(R' \cdot R'').$$

Nel caso di due corpi convessi la formola (4) si riduce a quella di Santaló.

Nel corso di questa dimostrazione si trova una serie di formole analoghe, nelle quali entrano delle regioni, delle superficie e delle curve rigidamente mosse. Limitandoci al caso più semplice, che questi elementi siano semplicemente connessi, si ottiene per esempio

$$(6) \quad \int K(R_0 \cdot S_1) S_1 = 4\pi^2 \{ 8\pi V_0 + \pi A_0 C_1 + 4M_0 A_1 \},$$

se S_1 è una superficie mossa colla densità cinematica S_1 , di lunghezza C_1 dell'orlo e di area A_1 .

Nel caso di due superficie avremo analogamente

$$(7) \quad \int K(S_0 \cdot S_1) S_1 = 8\pi^3 (A_0 C_1 + C_0 A_1),$$

dove $K(S_0 \cdot S_1)$ è eguale a 4π volte il numero delle curve continue separate nella intersezione $S_0 \cdot S_1$, che non sono chiuse. Nel caso d'una curva mobile L_1 si trova il risultato

$$(8) \quad \int K(R_0 \cdot L_1) L_1 = 8\pi^3 (4V_0 + A_0 Z_1),$$

nel quale

$$\frac{1}{4\pi} K(R_0 \cdot L_1)$$

è il numero delle curve continue nell'intersezione $R_0 \cdot L_1$ e Z_1 la lunghezza della curva L_1 . Finalmente s'ottiene

$$(9) \quad \int K(S_0 \cdot L_1) \cdot L_1 = 16\pi^3 A_0 Z_1.$$

Tutte queste formole si possono estendere ai casi più generali delle regioni R non semplicemente connesse, di « complessi » di curve e di linee, che si considerano nella topologia in uno spazio Euclideo o non-Euclideo S_n . Particolari darò in un lavoro nella « Mathematische Zeitschrift » 1936.

Matematica (Geometria). — *Un'osservazione sui plurigeneri delle superficie ellittiche di genere $p_g = 0$.* Nota di L. CAMPEDELLI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio F. ENRIQUES.

1. Le superficie irregolari F di genere geometrico

$$p_g = 0,$$

non riferibili a rigate, hanno il genere numerico

$$p_a = -1,$$

e posseggono un fascio ellittico di curve K di genere $\pi \geq 1$, ed un fascio lineare di curve ellittiche C , n -secanti delle prime: il numero $n (\geq 2)$ dicendosi determinante della superficie. Per queste loro proprietà le F rientrano nella famiglia delle cosiddette *superficie ellittiche* ⁽²⁾.

Ogni superficie F ammette una rappresentazione caratteristica sopra un cilindro ellittico n -plo, con curva di diramazione composta da (almeno tre) sezioni piane normali alle generatrici, ciascuna delle quali rappresenta una curva del fascio C ridotta ad una componente multipla. Valendosi di questa rappresentazione, il prof. F. Enriques ⁽³⁾ è pervenuto a determinare i plurigeneri della superficie F , trovando che il plurigenere P_m , d'ordine m , è dato da:

$$(1) \quad P_m = m(t-2) + \sum_{i=1}^{i=t} \left[\frac{-m}{s_i} \right] + 1,$$

dove t designa il numero delle sezioni piane componenti la curva di diramazione sul cilindro multiplo; s_i l'ordine di molteplicità di diramazione delle singole componenti stesse, ed infine

$$\left[\frac{-m}{s_i} \right]$$

(1) Nella seduta del 5 aprile 1936.

(2) Per indicazioni bibliografiche e per uno studio particolareggiato delle superficie in discorso, cfr. F. ENRIQUES, *Sulla classificazione delle superficie algebriche particolarmente di genere zero*. Lezioni raccolte da L. CAMPEDELLI. (« Rendiconti del Seminario Matematico » della R. Università di Roma, 1934).

(3) Cfr. F. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero*. (« Rend. Circolo Matematico di Palermo », to. XX, 1905). Vedi anche le citate *Lezioni* dell'ENRIQUES, § 15.

rappresenta l'intero che immediatamente precede come grandezza algebrica, la frazione

$$-\frac{n}{s_i}.$$

Richiamiamo qui l'attenzione sopra il valore che la (1) fornisce per il plurigenere P_n d'ordine n uguale al determinante della superficie F . Si ha:

$$(2) \quad P_n = 2\pi - 1,$$

ed è interessante avvertire che - escluso il caso $\pi = 1$ (nel quale tutti i plurigeneri non nulli, sono eguali all'unità)⁽¹⁾ - risulta per $m < n$

$$(3) \quad P_m < P_n \quad (m < n, \pi > 1).$$

Cioè: tra le superficie ellittiche con i caratteri

$$p_a = -1, \quad p_g = 0,$$

e con determinante n , quelle che posseggono un fascio ellittico di curve di genere π , sono caratterizzate da

$$P_n = 2\pi - 1.$$

Ed inoltre: il determinante di una superficie ellittica con $p_a = -1$, $p_g = 0$, che possieda un fascio ellittico di curve di genere $\pi (> 1)$, è dato dall'ordine del primo dei plurigeneri che è uguale a $2\pi - 1$.

2. La (2) si deduce immediatamente dalla (1) quando si ricordi la relazione che lega il determinante n ai numeri s_i e al genere π delle curve del fascio ellittico (K):

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{i=t} \frac{n}{s_i} (s_i - 1) = 2n + 2\pi - 2,$$

altrettanti essendo i punti doppi della serie lineare g_n^1 segata dal fascio $|C|$ sulle curve K di genere π .

Più in generale, dalla (1) si ha per il plurigenere P_{hn} d'ordine hn , multiplo di n :

$$P_{hn} = 2h\pi - 2h + 1.$$

E, incidentalmente, possiamo notare i valori:

$$P_{n+1} = 2\pi - 3$$

od anche:

$$P_{hn+1} = 2h\pi - 2h - 1,$$

(1) Cfr. F. ENRIQUES, luoghi citati nella nota precedente.

mentre nell'espressione del plurigenere d'ordine $hn + 2$ appare il numero t delle componenti la curva di diramazione:

$$P_{hn+2} = 2h\pi - 2h + t - 3.$$

Per stabilire la (3) si ponga nella (1) $m = n - v$ ($v > 0$):

$$P_{n-v} = (n-v)(t-2) + \sum_{i=1}^{i=t} \left[-\frac{n-v}{s_i} \right] + 1,$$

dalla quale si deduce (tenendo presente che n è multiplo di ciascuna s_i):

$$P_{n-v} = P_n - v(t-2) + \sum_{i=1}^{i=t} r_i,$$

dove si è posto:

$$(5) \quad v = r_i s_i + h_i \quad (r_i \geq 0, 0 \leq h_i < s_i).$$

Dovremo dunque provare che è:

$$(6) \quad \sum_{i=1}^{i=t} r_i < v(t-2).$$

Supponendo, per fissare le idee:

$$(2 \leq) s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_t,$$

si ha:

$$r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_t,$$

e quindi

$$\sum_{i=1}^{i=t} r_i \leq tr_1,$$

cosicchè in luogo della (6) ci possiamo ridurre a dimostrare che

$$tr_1 < v(t-2).$$

Questa è immediata quando si abbia:

$$t \geq 4, s_1 > 2;$$

oppure:

$$t > 4, s_1 = 2.$$

Invero, in ambedue i casi si ha:

$$t < s_1(t-2),$$

onde è certamente:

$$tr_1 < r_1 s_1(t-2) \leq (r_1 s_1 + h_1)(t-2) = v(t-2).$$

Nel caso $t = 4$, $s_1 = 2$, dianzi escluso, la (6) diviene

$$(7) \quad r_1 + r_2 + r_3 + r_4 < 2v.$$

Ma dalla (5), per $i = 1$, si ha:

$$r_1 = \frac{v - h_1}{2},$$

e quindi la (7) si può scrivere:

$$r_2 + r_3 + r_4 < \frac{3v}{2} + \frac{h_1}{2},$$

e risulterà provata *a fortiori* quando si dimostri che

$$(8) \quad 2r_2 + 2r_3 + 2r_4 < 3v.$$

La (5) per $i = 2$, $i = 3$ e $i = 4$, dà:

$$r_2 s_2 + r_3 s_3 + r_4 s_4 \leq 3v:$$

pertanto, se almeno una delle s_i ($i = 2, 3, 4$) è maggiore di due, ne segue la (8).

In quanto all'ipotesi

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 2,$$

la (4) prova che, per $\pi > 1$, è incompatibile con l'altra: $t = 4$.

Passiamo ad analizzare il caso $t = 3$. Se $t = 3$ le s_i ($i = 1, 2, 3$) non possono essere tutte uguali a tre, perchè dalla (4) per $s_1 = s_2 = \dots = s_3 = 3$ si deduce che (per $\pi > 1$) è $t > 3$.

Allora se le s_i ($i = 1, 2, 3$) sono tutte maggiori di tre, si ha senz'altro la (6):

$$r_1 + r_2 + r_3 \leq 3r_1 < s_1 r_1 + h_1 = v,$$

e lo stesso accade per

$$s_3 \geq s_2 > s_1 = 3,$$

poichè se r_1, r_2 e r_3 non sono tutte uguali fra loro, è

$$r_1 + r_2 + r_3 < 3r_1 \leq 3r_1 + h_1 = v;$$

se invece

$$r_1 = r_2 = r_3,$$

risulta:

$$r_1 + r_2 + r_3 = 3r_1 < s_2 r_2 + h_2 = v.$$

Si avverta che non può aversi

$$s_3 > s_2 = s_1 = 3,$$

poichè, come è noto⁽¹⁾, « ciascuna delle s_i è un divisore del minimo comune multiplo delle rimanenti ».

Sempre supponendo $t = 3$, facciamo infine l'ipotesi

$$s_1 = 2, s_3 \geq s_2 > 4.$$

Avendo posto:

$$v = 2r_1 + b_1 = r_2s_2 + b_2 = r_3s_3 + b_3,$$

si ha:

$$r_1 = \frac{v - b_1}{2}, 4r_2 + 4r_3 < r_2s_2 + r_3s_3 \leq 2v,$$

e quindi:

$$r_1 + r_2 + r_3 < v - \frac{b_1}{2},$$

da cui la (6).

Con ciò la (6) stessa resta provata in ogni caso, dato che i vari sistemi di valori per le s_i e la t , dianzi analizzati, sono i soli che si possono presentare. Invero, se per $t = 3$ è $s_1 = 2$ e $s_2 = 4$, si ha anchè $s_3 = 4$, poichè — come sopra si è ricordato — la s_3 deve dividere il minimo comune multiplo di s_1 e s_2 : ma allora la (4) dà $\pi = 1$, contro la nostra ipotesi. Se poi è $s_1 = 2$ e $s_2 = 3$, si ha $s_3 = 6$ e la (4) porta nuovamente a $\pi = 1$. Lo stesso si dica per $t = 3$, $s_1 = s_2 = s_3 = 2$.

Così le proposizioni enunciate sono completamente stabilite.

(1) Cfr. F. ENRIQUES, *Lezioni citate*, § 14.

Matematica. — *Di una generalizzazione delle formule di Newton e di Waring.* Nota di G. PALAMÀ, presentata ⁽¹⁾ dal Socio U. AMALDI.

Vogliamo generalizzare le formule di Newton

$$(1) \quad \sum_{i=0}^{k-1} p_i s_{k-i} + k p_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, k),$$

relative alle somme delle potenze simili s_1, s_2, \dots, s_k delle radici dell'equazione

$$\sum_{i=0}^n p_i x^{n-i} = 0, \quad \text{con } p_0 = 1$$

e la relativa formula di Waring

$$(2) \quad s_k = k \sum \frac{(-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \cdot |\alpha_1 + \dots + \alpha_n - 1|}{|\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \dots |\alpha_n|} \cdot p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$$

con la \sum estesa a tutti i valori interi e positivi delle α che soddisfano alla

$$\sum_{i=1}^n i \alpha_i = k,$$

per il caso in cui in s_k ogni x_i^k venga sostituita con $x_i^{k|d_1, \dots, d_r}$. Si pone

$$(3) \quad b_1^{i|d_1, d_2, \dots, d_r} = b_1 \cdot b_2 \dots b_i,$$

essendo b_1, b_2, \dots, b_i i termini successivi di una progressione aritmetica dell' r^{mo} ordine, avente per primo termine della $1^a, 2^a, \dots, r^a$ progressione dedotte per differenza, rispettivamente, d_1, d_2, \dots, d_r . Il simbolo (3), generalizzazione del notissimo $b_i^{i|d}$ è stato da noi usato altrove ⁽²⁾.

(1) Nella seduta del 5 aprile 1936.

(2) G. PALAMÀ, *Su due nuove generalizzazioni del determinante di Vandermonde.* «Rend. Lincei», ser. 6°, vol. XXIII, 1936, pp. 28-35.

Generalizzeremo poi le (1) e (2) per il caso in cui in s_k ogni x_i^k venga sostituita con $x_i^{k/q_1, q_2, \dots, q_r}$, quando ci si serva del simbolo

$$b^{i/q_1, q_2, \dots, q_r} = b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_i,$$

con b_1, b_2, \dots, b_i termini successivi di una progressione geometrica dell' r^{mo} ordine, avente per 1^o termine della $1^a, 2^a, \dots, r^a$ progressione dedotte per quoziente rispettivamente q_1, q_2, \dots, q_r ⁽¹⁾.

Le due somme che da s_k si ottengono con le indicate generalizzazioni si indicheranno rispettivamente con S_k e σ_k .

1. Se poniamo

$$\sigma_{i_1, i_2, \dots, i_p}^{(k)} = \sum \binom{b_1}{i_1} \binom{b_2}{i_2} \dots \binom{b_p}{i_p},$$

ove la \sum sia estesa a tutte le disposizioni semplici b_1, b_2, \dots, b_p dei numeri $1, 2, \dots, k-1$, escludendo però quelle per le quali si hanno prodotti $\binom{b_1}{i_1} \binom{b_2}{i_2} \dots \binom{b_p}{i_p}$ nulli oppure uguali ad altri precedentemente ottenuti, e poniamo ancora

$$m_p^{(k-1)} = \sum \sigma_{i_1, i_2, \dots, i_p}^{(k)} \cdot d_{i_1} d_{i_2} \dots d_{i_p},$$

con la \sum estesa a tutte le $\binom{r+p-1}{p}$ combinazioni con ripetizione i_1, i_2, \dots, i_p dei numeri $1, 2, \dots, r$, ho dimostrato recentemente ⁽²⁾ che

$$(4) \quad x_i^{k/d_1, d_2, \dots, d_r} = \sum_{i=0}^{k-r} m_d^{(k-1)} x_i^{k-i}, \quad (m_0 = 1).$$

Poichè

$$S_k = \sum_{i=1}^n x_i^{k/d_1, \dots, d_r},$$

per la (4) si ha

$$S_k = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{k-1} m_i^{(k-1)} x_j^{k-i},$$

ossia

$$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} m_i^{(k-1)} s_{k-i} \quad (k = 1, 2, \dots, k).$$

(1) Cfr. loc. cit.

(2) Cfr. una mia Nota in corso di pubblicazione nei « Rend. del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere ».

Dalle (5), con metodo ricorrente si può determinare s_1, s_2, \dots, s_k , i cui valori sostituiti nelle (1) danno le formule che generalizzano, nel caso considerato, quelle di Newton.

Però, in una prossima Nota, darò il valore di s_k in forma esplicita e in funzione di S_k e di $m_i^{(k-1)}$, utilizzando delle formule trovate dal Mambriani ⁽¹⁾.

2. Un caso particolare interessante, si ha quando $d_1 = d_2 = \dots = d_r = d$. Allora ricavandosi direttamente e successivamente dalle (5) s_1, s_2, \dots , si vede facilmente che il valore di s_k è dato (come si desume dalle formule precedenti) da

$$(7) \quad s_k = \sum_{i=0}^{k-1} f_{k-i,i} (-1)^i \cdot d^i S_{k-i} \quad (f_{k,0} = 1),$$

in cui $f_{k-r,r}$ indica la funzione « aleph » dei numeri $\binom{1}{1}, \binom{2}{1} \dots \binom{k-r}{1}$ di grado s .

Sostituendo i valori di s_k dati dalle (7) nelle (1) si ha,

$$\sum_{r=0}^{k-1} \left(\sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} f_{k-r,r-i} p_i d^{r-i} \right) S_{k-r} + k p_k = 0.$$

3. Per determinare la formula che generalizza quella di Waring nel primo dei due casi detti nella introduzione, sostituiamo nella (5) al posto di s_{k-i} il valore che si ottiene a mezzo della (2). Si ha quindi

$$(8) \quad S_k = \sum_{i=0}^{k-1} m_i^{(k-1)} (k-i) \sum \frac{(-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} |\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n - 1|}{|\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \dots |\alpha_n|} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$$

in cui la seconda \sum è estesa a tutti i valori positivi e interi delle α che soddisfano alla

$$\sum_{j=1}^n j \alpha_j = k - i.$$

La (8) è la formula che generalizza quella di Waring nel caso in esame.

(1) Cfr. A. MAMBRIANI, *Sulla risoluzione delle equazioni differenziali ecc.* in « Boll. dell'U. M. I. », anno IX, n. 5, 1930, la formula (6) e le due successive che danno il valore di $A_{r,s}$ sotto due forme diverse. Incidentalmente rileviamo che la form. (4) di D'Ocagne cit. dal BROGGI nella sua Nota *Sulla risoluzione delle equazioni ricorrenti* in « Boll. dell'U. M. I. », anno XIII, n. 3, era già stata trovata dal TRUDI, che la cita in « Giorn. del Batt. », vol. 3, 1864: *Intorno ad un det. più generale di quello delle radici ecc.*, p. 183; e in questo lavoro è contenuta l'osservazione con cui il Broggi stesso comincia il suo lavoro citato.

4. Se invece in s_k si sostituisce x_i^k con

$$x_i^k / q_1, q_2, \dots, q_r,$$

essendo

$$x_i^k / q_1, q_2, \dots, q_r = x_i^k \prod_{j=1}^r q_j^{\binom{k}{j+1}},$$

risulta

$$(9) \quad \sigma_k = \sum_{i=1}^n x_i^k / q_1, q_2, \dots, q_r = \sum_{i=1}^n x_i^k \cdot \prod_{j=1}^r q_j^{\binom{k}{j+1}};$$

quindi, per la (2), è

$$\sigma_k = \prod_{j=1}^r q_j^{\binom{k}{j+1}} \cdot \sum \frac{(-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \cdot |\alpha_1 + \dots + \alpha_n - 1|}{|\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdot \dots \cdot |\alpha_n|} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$$

essendo la \sum estesa a tutte le soluzioni intere e positive di

$$\sum_{i=1}^n i \alpha_i = k.$$

Da (9) si ricava anche

$$s_k = \sigma_k \cdot \prod_{j=1}^r q_j^{-\binom{k}{j+1}}$$

e quindi in questo caso le formule di Newton diventano

$$k p_k + \sum_{i=0}^{k-1} \sigma_{k-i} \prod_{j=1}^r q_j^{\binom{k-i}{j+1}} = 0.$$

Matematica. — *A proposito di un teorema di Caccioppoli sulla rappresentazione conforme delle superficie.* Nota di G. SCORZA DRAGONI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. G. SCORZA.

In una Nota recentissima⁽²⁾ Caccioppoli ha dato un teorema che estende quello di Osgood-Carathéodory⁽³⁾ relativo alla possibilità di prolungare una corrispondenza biunivoca, continua e conforme di due campi⁽⁴⁾ piani semplicemente connessi in una corrispondenza biunivoca e continua che verta anche sulle frontiere, quando queste siano curve di Jordan.

Il teorema di Caccioppoli riguarda il problema generale della rappresentabilità conforme di due superficie.

Caccioppoli riesce però a stabilire la biunivocità della corrispondenza anche sui contorni solo sotto condizioni opportune, che non si riducono all'essere questi delle curve di Jordan e che sono sempre soddisfatte nel caso delle superficie piane delimitate da curve di Jordan.

E in questa Nota indicherò appunto un esempio che mostra come di condizioni suppletive non si possa fare a meno.

Secondo quanto lo stesso Caccioppoli ha già osservato, la necessità di queste condizioni suppletive è provata non appena si riesca a costruire una superficie immagine topologica di un cerchio, regolare nei punti interni⁽⁵⁾ e di area finita, tale che in prossimità di un punto O del bordo siano inferiormente limitate da una quantità positiva le lunghezze delle curve tracciate sulla superficie e congiungenti, senza passare per O , due punti del bordo situati da parti opposte di O .

Il nostro scopo sarà quindi di costruire una superficie siffatta.

1. In un piano σ fissiamo un sistema di coordinate polari (ρ, ϑ) di polo in un punto O e consideriamo il semicerchio C dei punti di σ per i quali $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$.

(1) Nella seduta del 5 aprile 1936.

(2) R. CACCIOPOLI, *Sulla rappresentazione conforme delle superficie*. Questi « Rendiconti », questo volume, seduta del 1° marzo.

(3) C. CARATHÉODORY, *Über der gegenseitige Beziehung der Ränder bei der konformen Abbildung des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis*. « Mathematische Annalen », vol. 73 (1913), pp. 305-320.

(4) Campo=insieme aperto e semplicemente connesso.

(5) Regolare nel senso usato da CACCIOPOLI nella Nota citata, alla quale rimando.

Allora, se n è un numero naturale e k un numero naturale minore di 2^n e dispari, il segmento $s_{n,k}$ di estremi $P'_{n,k} \equiv \left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{k\pi}{2^n} \right)$ e $P''_{n,k} \equiv \left(\frac{3}{2^{n+1}}, \frac{k\pi}{n} \right)$ è sempre interno a C ; e la superficie S , ottenuta da C adattando su $s_{n,k}$ un quadrato $q_{n,k}$ normale a σ ed i cui punti, eccezion fatta per $P'_{n,k}$, $P''_{n,k}$ e per quelli dei lati di $q_{n,k}$ diversi da $s_{n,k}$, sono tutti da considerarsi come doppi per S , questa superficie, dico, ha un'area evidentemente finita.

Nel seguito porremo $\vartheta_{n,k} = \frac{k\pi}{2^n}$, $\rho'_{n,k} = \frac{1}{2^{n+1}}$, $\rho''_{n,k} = \frac{3}{2^{n+1}}$.

2. Una volta dimostrato che, se $P_0 \equiv (\rho, 0)$ e $P_1 \equiv (\rho', \pi)$ sono due punti del bordo di S distinti da O , ogni curva tracciata su S che unisca P_0 a P_1 senza passare per O ha una lunghezza inferiormente limitata da una quantità positiva indipendente da P_0 e P_1 e dalla curva, allora sarà facile dedurre da S una superficie immagine topologica di un cerchio (e quindi a punti tutti semplici), regolare nei punti interni per la quale siano soddisfatte le proprietà indicate alla fine delle righe introduttive.

Basterà infatti associare ad ogni $s_{n,k}$ due ellissi omofocali $e_{n,k}$, $E_{n,k}$, interne a C , aventi i fuochi in $s_{n,k}$, tali che $e_{n,k}$ sia interna ad $E_{n,k}$ ed abbia gli estremi di $s_{n,k}$ come vertici e che le $E_{n,k}$ siano a due a due l'una esterna all'altra; e definire, ciò che è ovviamente possibile, una funzione $f(\rho, \vartheta)$ continua in C insieme con le sue derivate parziali prime e seconde, nulla nei punti di C esterni a tutte le $E_{n,k}$, uguale a $\frac{1}{2^{n_0}}$ nei punti delle $e_{n,k}$ per cui $n = n_0$.

Allora, introdotto un asse delle χ normale a σ e assunte χ, ρ, ϑ come coordinate di un punto dello spazio, la superficie $\chi = f(\rho, \vartheta)$ gode, come è ovvio (infatti ad ogni curva tracciata su di essa avente gli estremi in P_0 e P_1 si può sempre far corrispondere una curva tracciata su S la cui lunghezza non superi il doppio di quella della curva a cui essa è associata), di tutte le proprietà desiderate, se si fa in modo ch'essa risulti anche d'area finita.

3. Consideriamo dunque una curva l tracciata su S che abbia come estremi P_0 e P_1 e non passi per O .

Poichè l non passa per O , il modulo di un punto che descriva l ha un minimo positivo ρ_0 ; indi l incontra al più un numero finito dei quadrati $q_{n,k}$.

Diciamo q_1, q_2, \dots, q_p quelli di questi quadrati $q_{n,k}$ che contengono punti per cui $\rho_0 \leq \rho$, ordinandoli in maniera che $\vartheta_1 < \vartheta_2 < \dots < \vartheta_p$,

se ϑ_i è l'anomalia comune a tutti i punti del lato s_i di q_i contenuto in σ ($i = 1, \dots, p$; $0 < \vartheta_i < \pi$).

Diciamo R'_1 il primo, R''_1 l'ultimo a partire da P_0 dei punti di l di anomalia ϑ_1 . E poniamo $R_1 = R'_1$, se R'_1 non appartiene a s_1 , oppure $R_1 = R''_1$, se R'_1 appartiene a s_1 ma non gli appartiene R''_1 ; se nessuna delle due alternative precedenti è verificata, diciamo R_1 quello dei due estremi di s_1 tale che la somma delle sue distanze da R'_1 e R''_1 sia minima (allora la lunghezza dell'arco di l compreso fra R'_1 e R''_1 è certo non minore ⁽¹⁾ di $\overline{R_1 R'_1} + \overline{R_1 R''_1}$).

Diciamo R'_2 ed R''_2 il primo e l'ultimo dei punti di l successivi a R'_1 che abbiano un'anomalia uguale a ϑ_2 ; e definiamo R_2 in maniera analoga a quella tenuta per R_1 ecc.

Così proseguendo si definiscono i punti R_1, R_2, \dots, R_p e si riconosce che la lunghezza della linea l è certo non minore di quella della spezzata $P_0 R_1 + R_1 R_2 + \dots + R_p P_1$.

4. Questa spezzata è suscettibile di una rappresentazione del tipo

$$(1) \quad \rho = \rho(\vartheta),$$

il minimo $\bar{\rho}$ della funzione $\rho(\vartheta)$ essendo un numero positivo (eventualmente minore di ρ_0), e non contiene nessun punto interno ad uno degli $s_{n,k}$.

Accanto ad essa consideriamo tutte le curve di σ che da essa si possano ottenere per deformazione continua senza passare per punti interni a qualche $s_{n,k}$, che siano suscettibili di una rappresentazione della forma della (1) con $\rho(\vartheta) \geq \bar{\rho}$, che abbiano P_0 e P_1 come estremi e che siano contenute in C .

Fra queste ve ne è almeno una di lunghezza minima ⁽²⁾; diciamo c una di queste curve minimizzanti la lunghezza.

Allora c non contiene nessun punto interno a qualche $s_{n,k}$; inoltre poichè è rappresentata da un'equazione quale la (1) con $\rho(\vartheta) \geq \bar{\rho}$ essa incontra solo un numero finito dei segmenti $s_{n,k}$. Inoltre c è evidentemente una poligonale e se Q e Q' sono due punti di c tali che nessun punto

(1) Si rammenti che i quadrati $q_{n,k}$ vanno considerati come delle protuberanze di spessore infinitesimo che l deve o sormontare o aggirare.

(2) Indichiamo con $\{F\}$ la famiglia delle curve in discorso, resa completa aggiungendovi le curve che per quelle in discorso sono d'accumulazione. L'esistenza di una curva c di lunghezza minima in $\{F\}$ è allora conseguenza immediata di teoremi classici. Questa curva deve potersi rappresentare con un'equazione quale la (1) perchè altrimenti non realizzerebbe il minimo desiderato.

Del resto non deve essere difficile costruire in maniera elementare a partire dalla poligonale $P_0 R_1 + R_1 R_2 + \dots + R_p P_1$ una poligonale di lunghezza non maggiore che goda di tutte quelle proprietà che per la c sono conseguenze della condizione di minimo, cui la c soddisfa, e che sono le sole ad essere essenziali per i ragionamenti che si svolgeranno.

interno all'arco di c da essi individuato appartenga a qualche $s_{n,k}$ allora questo arco si riduce al segmento QQ' — perchè altrimenti c non sarebbe una curva di lunghezza minima nell'insieme di curve dato —; in particolare, gli eventuali vertici di c sono da cercarsi tutti fra gli estremi dei segmenti $s_{n,k}$; nel seguito anzi converremo di chiamare vertice di c ogni punto di c che sia estremo di uno di questi segmenti; il numero dei vertici di c è allora sempre finito.

5. In questo numero indicheremo qualche proprietà dei punti $P'_{n,k}$ e $P''_{n,k}$ di dimostrazione immediata.

Il segmento di estremi $A = P''_{n+1, 2k-1}$, $B = P''_{n+1, 2k+1}$ incontra in un punto interno il segmento $s_{n,k}$, dove n e k sono soggetti alle solite limitazioni ($n = 1, 2, \dots$; $k = 1, 3, \dots, 2^n - 1$).

Infatti il punto comune al segmento AB ed alla semiretta di anomalia $\frac{k\pi}{2^n}$ coincide con la proiezione ortogonale su questa semiretta dei punti A e B , mentre da $\sqrt{8} < 3$ segue

$$\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{3}{2^{n+2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2^{n+2}} \cos \frac{\pi}{2^2} \leq \frac{3}{2^{n+2}} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} < \frac{3}{2^{n+1}}.$$

Se $A = P'_{n,k}$, $B = P''_{n+1, 2k+1}$, n e k essendo soggetti alle solite limitazioni, l'angolo \widehat{OAB} è ottuso e, dettane γ la misura (in radianti), è $\gamma \cong \frac{\pi}{2} + \gamma_0$ dove γ_0 è una costante positiva opportuna.

Infatti la normale nel punto A alla retta OA incontra la retta OB in un punto il cui modulo (per il teorema di Pitagora e per il fatto che l'angolo \widehat{AOB} ha una misura $\leq \frac{\pi}{4}$) non supera $2^{-n} - \frac{1}{2} < 3 \cdot 2^{-n-2}$.

L'angolo \widehat{OAB} è quindi ottuso.

La seconda delle affermazioni fatte si giustifica subito osservando che basta dimostrarla per n sufficientemente grande e che da

$$\sin \widehat{OBA} = \frac{\overline{AO}}{\overline{AB}} \sin \widehat{AOB} < 2 \sin \widehat{AOB}$$

segue, per $n \rightarrow +\infty$, che $\sin \widehat{OBA}$ tende verso lo zero al pari di $\sin \widehat{AOB}$ e quindi che tende verso π la misura di \widehat{OAB} .

Con ragionamenti del tutto analoghi si dimostra che:

Se $A = P''_{n+1, 2k-1}$, $B = P'_{n,k}$, l'angolo \widehat{OAB} è ottuso e per la sua misura γ riesce $\gamma \cong \frac{\pi}{2} + \gamma_0$, dove γ_0 è una opportuna costante positiva.

Questi tre lemmi saranno di uso costante per raggiungere quello cui si è ridotto il nostro scopo, per dimostrare cioè che *la lunghezza di c è inferiormente limitata da una costante positiva.*

6. Nel seguito diremo $P_{n,k}$ il punto di c di anomalia $\vartheta_{n,k}$; $\rho_{n,k}$ sarà il modulo di $P_{n,k}$.

Ciò posto, il settore $\rho \leq 1, 0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{8}$ non contenga nessun vertice di c [cose perfettamente analoghe a quelle che stiamo per dire valendo, se è il settore $\rho \leq 1, \frac{7}{8}\pi < \vartheta \leq \pi$ a non contenere vertici di c]; e si rammenti che $0 \leq \rho_{3,1} \leq \frac{3}{2^4}$, $0 \leq \rho_{3,1} \leq \frac{1}{2^4}$.

Nel primo caso la lunghezza di $P_0 P_{3,1}$, che non è minore della distanza di $P_{3,1}$ dalla semiretta $\vartheta = 0$, non è minore di $\frac{3}{2^4} \cos \frac{\pi}{2^3}$; lo stesso vale quindi per la lunghezza di c .

Nel secondo caso sfrutteremo la circostanza che, nelle ipotesi poste, l'arco di c compreso fra P_0 e $P_{3,1}$ coincide col segmento $P_0 P_{3,1}$ per far vedere che in tal caso $\rho_{4,1} > \frac{3}{2^5}$, di guisa che sarà $P_0 P_{4,1} > \frac{3}{2^5} \cos \frac{\pi}{2^4}$ e la lunghezza di c sarà ancora maggiore di una costante positiva.

E infatti, se $\rho_{4,1} < \frac{3}{2^5}$ allora è anche $\rho_{4,1} < \frac{1}{2^5}$, perchè $P_{4,1}$ non appartiene a $s_{4,1}$, dato che non è un vertice di c .

Dette r_0, r_1, r_n, k le semirette di anomalie rispettive $\vartheta = 0, \vartheta = \pi, \vartheta = \vartheta_{n,k}$, consideriamo ora i punti di c contenuti nelle semirette $r_{5,3}, r_{6,7}, \dots$ rispettivamente bisettrici degli angoli formati da $r_{3,1}$ e $r_{4,2}$, da $r_{3,1}$ e $r_{5,3}, \dots$; dovrà allora essere soddisfatta una almeno delle seguenti disuguaglianze $\rho_{5,3} > \rho''_{5,3}, \rho_{6,7} > \rho''_{6,7}, \dots$ perchè altrimenti c conterebbe punti di modulo (infinitesimo e quindi) minore di $\bar{\rho}$.

Tanto per fissare le idee supponiamo che sia $\rho_{5,3} > \rho''_{5,3}$.

In tal caso dal primo lemma del n. 5 segue subito che $\rho_{5,1} < \rho''_{5,1}$, e quindi che $\rho_{5,1} < \rho'_{5,1}$, dato che $P_{5,1}$ non è un vertice di c e quindi non appartiene a $s_{5,1}$.

Dovrà allora essere soddisfatta una almeno delle seguenti disuguaglianze $\rho_{6,1} > \rho''_{6,1}, \rho_{7,1} > \rho''_{7,1}, \dots$ (la $r_{6,1}$ è la bisettrice dell'angolo formato da r_0 e $r_{5,1}, \dots$).

Tanto per fissare le idee supponiamo che sia $\rho_{6,1} < \rho''_{6,1}$ (e quindi $\rho_{6,1} < \rho'_{6,1}$), $\rho_{7,1} > \rho''_{7,1}$, in maniera da esaminare un caso leggermente diverso dal precedente.

Di qui e dal primo lemma del n. 5 si deduce subito che $\rho_{7,3} < \rho''_{7,3}$ e quindi che $\rho_{7,3} < \rho'_{7,3}$.

Dovrà allora essere soddisfatta una almeno delle seguenti disuguaglianze $\rho_{8,7} > \rho''_{8,7}$, $\rho_{9,15} > \rho''_{9,15}$... (la semiretta $\rho_{8,7}$ è la bisettrice dell'angolo formato da $r_{5,1}$ e $r_{7,3}$, la $r_{9,15}$ è la bisettrice dell'angolo formato da $r_{5,1}$ e $r_{8,7}$, ...) ecc.

Così proseguendo si riconosce che, nell'ipotesi fatta circa il modulo di $P_{4,1}$, c ha punti di modulo piccolo a piacere.

Ma questo è assurdo; indi è, come volevamo, $\rho_{4,1} > \frac{3}{2^5}$.

7. Nel seguito, per dimostrare che la lunghezza di c è inferiormente limitata da una costante positiva, potremo quindi supporre minore di $\frac{\pi}{2^3}$ l'anomalia del primo vertice di c e maggiore di $\frac{7\pi}{2^3}$ quella dell'ultimo, convenendo di percorrere c del verso che da P_0 porta a P_1 .

Non solo, ma possiamo evidentemente supporre anche maggiore di $\frac{6\pi}{2^3}$ l'anomalia del penultimo vertice di c ; perchè altrimenti nelle ipotesi poste il settore $\rho \leq 1$, $\frac{6\pi}{2^3} < \vartheta \leq \frac{7\pi}{2^3}$ non conterrebbe vertici di c , e quindi si potrebbero ripetere considerazioni analoghe a quelle svolte nel numero precedente e riconoscere che anche in tal caso la lunghezza di c non può scendere al di sotto di un certo numero positivo.

In queste ipotesi il nostro scopo sarà quindi raggiunto non appena avremo visto che:

Se H è un vertice di c di anomalia minore di $\frac{\pi}{4}$, fra i vertici ad esso seguenti ve ne è uno H' tale che, detta λ la lunghezza dell'arco di c compreso fra H e H' e α la misura dell'angolo $\widehat{HOH'}$, si abbia

$$\lambda \geq h \cdot \alpha,$$

con $h = \cos t > 0$.

Per dimostrare quanto precede, se $\vartheta_{n,k} = \frac{k\pi}{2^n} < \frac{\pi}{4}$ ($n \geq 3$, k essendo soggetto alle solite limitazioni) è l'anomalia di H , di guisa che H non è nè l'ultimo nè il penultimo vertice di c , distingueremo due alternative a seconda che $H = P'_{n,k}$ oppure $H = P''_{n,k}$.

8. Poniamo sia $H = P'_{n,k}$; e in questa alternativa distinguiamo due casi:

I) se il vertice H' immediatamente successivo ad H ha un'anomalia minore di $\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}$ (di guisa che il modulo di H' non potrà superare $\frac{3}{2^{n+3}}$), allora il segmento HH' ha una lunghezza maggiore di $\frac{1}{2^{n+1}}$

$-\frac{3}{2^{n+3}} = \frac{1}{2^{n+3}}$, mentre se α ha il significato chiarito è $\alpha < \frac{\pi}{2^{n+1}}$, di guisa che $\lambda > \frac{\alpha}{4\pi}$;

II) se invece l'anomalia di H' non è minore di $\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}$, allora:

a) o il modulo $\rho_{n+1, 2k+1}$ di $B = P_{n+1, 2k+1}$ non supera quello $\frac{1}{2^{n+2}}$ di $P'_{n+1, 2k+1}$;

b) o il modulo di B non è minore di quello $\frac{3}{2^{n+2}}$ di $P''_{n+1, 2k+1}$;

nell'alternativa a) si riconosce subito, mediante ragionamenti analoghi a quelli svolti nel n. 6, che l'anomalia di H' non può superare $\frac{(k+1)\pi}{2^n}$, cioè che $\alpha \leq \frac{\pi}{2^n}$, mentre è d'altra parte $\lambda > \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{2^{n+2}}$; di guisa che $\lambda > \frac{\alpha}{4\pi}$;

nell'alternativa b) invece l'angolo \widehat{OHB} ha una misura $\gamma \geq \frac{\pi}{2} + \gamma_0$, con $\gamma_0 = \cos > 0$, per il secondo dei lemmi del n. 5; inoltre, se α_1, β e β_1 sono rispettivamente le misure degli angoli $\widehat{HOB}, \widehat{OH'H}, \widehat{OBH}$ e se $\lambda_1 = \overline{HB}, \mu = \mu_1 = \overline{OH}$ mentre α e $\lambda = \overline{HH'}$ conservano il loro significato, si trova $\beta \leq \beta_1, \lambda_1 > \frac{3}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}, \alpha_1 = \frac{\pi}{2^{n+1}}$ e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\alpha} &= \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\lambda}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\mu}{\sin \beta} \geq \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\mu_1}{\sin \beta_1} = \frac{\alpha}{\sin \alpha} \frac{\lambda_1}{\sin \alpha_1} = \\ &= \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\alpha_1}{\sin \alpha_1} \frac{\lambda_1}{\alpha_1} \geq \sigma \frac{\lambda_1}{\alpha_1} > \frac{\sigma}{2\pi}, \end{aligned}$$

dove σ è una opportuna costante, positiva perchè $\frac{\sin \vartheta}{\vartheta}$ è sempre positivo nell'intervallo $0 < \vartheta \leq \frac{\pi}{2} - \gamma_0$ e tende all'unità se $\vartheta \rightarrow 0$ mentre $0 < \alpha_1 \leq \leq \alpha < \frac{\pi}{2} - \gamma_0$ (data la $\gamma \geq \frac{\pi}{2} + \gamma_0$).

Nel caso $H = P'_{n,k}$ l'affermazione fatta alla fine del numero precedente è quindi esatta.

9. Poniamo ora che sia $H = P''_{n,k}$.

Consideriamo la retta di anomalia $\frac{(k+1)\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2}$ (perchè $\frac{k\pi}{2^n} < \frac{\pi}{4}$).

Se $k + 1$ non è un multiplo di 4, allora l'anomalia in discorso si può porre nella forma $\frac{k' \pi}{2^{n+1}}$ con k' numero dispari; e si riconosce subito che questo caso si esaurisce in maniera analoga a quella tenuta nel numero precedente. Infatti:

se il vertice H' immediatamente successivo ad H ha un'anomalia non superiore a $\frac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}$ si procederà come nell'alternativa I) del n. 8;

se ciò non accade e se il modulo di $P_{n-1, k'}$ non supera quello di $P'_{n-1, k'}$, uguale a $\frac{1}{2^n}$, si riconoscerà con ragionamenti analoghi a quelli svolti nel n. 6 che il vertice H' immediatamente successivo ad H ha un'anomalia non superiore a $\frac{(k+3)\pi^{(1)}}{2^n}$, di guisa che $\alpha < \frac{\pi}{2^{n-2}}$ mentre da $\lambda > \frac{3}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$ segue allora $\lambda > \frac{\alpha}{8\pi}$;

se l'anomalia di H' non è minore di $\frac{k' \pi}{2^{n-1}}$ e se il modulo di $P_{n-1, k'}$ non è minore di quello di $P'_{n-1, k'}$ si procederà come nel caso b) dell'alternativa II) considerata nel numero precedente (si dovrà sostituire il secondo del lemmi del n. 5 col terzo).

Supponiamo ora che $k + 1$ sia un multiplo di 4.

Questo caso è quello che presenta il maggior numero di alternative.

Prima di procedere oltre osserviamo senz'altro che da $\frac{k \pi}{2^n} < \frac{\pi}{4}$ e $k + 1$ multiplo di 4 segue subito $n \geq 4$.

Premesso questo, se il vertice immediatamente successivo ad H ha un'anomalia uguale a $\frac{(k+1)\pi}{2^n}$ il suo modulo non è minore di $\frac{1}{2^{n-1}}$ (perchè $k + 1$ è multiplo di 4) e quindi, se si indica con H' questo vertice immediatamente successivo ad H , l'affermazione della fine del n. 7 è esatta perchè riesce $\lambda > \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{3}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$ ed $\alpha = \frac{\pi}{2^n}$;

se il vertice immediatamente successivo ad H ha un'anomalia compresa fra $\frac{k \pi}{2^n}$ e $\frac{(k+2)\pi}{2^n}$ ma diversa dagli estremi e da $\frac{(k+1)\pi}{2^n}$, allora si proceda in maniera analoga a quella tenuta nel caso precedente e nell'alternativa I) del n. 8: si troverà $\lambda > \frac{3}{2^{n+1}} - \frac{3}{2^{n+2}} = \frac{3}{2^{n+2}}$, $\alpha < \frac{\pi}{2^{n-1}}$, $\lambda > \frac{3\alpha}{8\pi}$;

(1) Non saprei se si può porre 2 al posto di 3. Si noti che se l'anomalia di H' supera $\frac{(k+2)\pi}{2^n}$, allora $\rho_{n, k+2} < \rho'_{n, k+2}$.

se non è verificata nessuna delle due alternative precedenti e se il punto $P_{n, k+2}$ ha un modulo non superiore di quello di $P'_{n, k+2}$, allora si riconosce con ragionamenti analoghi a quelli svolti nel n. 6 che il vertice H' immediatamente successivo ad H ha un'anomalia non superiore a $\frac{(k+3)\pi}{2^n}$

e quindi da $\lambda > \frac{3}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$, $\alpha \leq \frac{3\pi}{2^n}$ si trae $\lambda > \frac{\alpha}{3\pi}$; se invece il modulo di $P_{n, k+2}$ non è minore di quello di $P''_{n, k+2}$ allora bisogna distinguere due casi:

a) sia $P_{n, k+2} = P''_{n, k+2}$ ($P_{n, k+2}$ è il vertice successivo ad H e non si può certo porre $H' = P_{n, k+2}$); sia allora H' il vertice immediatamente successivo a $P_{n, k+2}$ (il quale $P_{n, k+2}$ nelle ipotesi poste non è certo l'ultimo vertice di c); allora, tenendo conto del fatto che $k+3$ non è un multiplo di 4 (perchè multiplo di 4 è $k+1$) e riprendendo l'analisi svolta per $k+1$ multiplo di 2 e non di 4, si riconosce subito che essa è ancora sufficiente a stabilire la validità della $\lambda > \alpha h$ con $h = \cos > 0$;

b) se il modulo di $P_{n, k+2}$ è maggiore di quello di $P'_{n, k+2}$, allora quello di $P_{n-1, k'}$, dove $k' = \frac{k+3}{2}$, non è minore di quello di $P''_{n-1, k'}$ (perchè altrimenti c avrebbe un vertice sulla $r_{n, k+2}$ e quindi $P_{n, k+2} = P''_{n, k+2}$); in tal caso (poichè $\rho_{n-1, k'} = \frac{3}{2^n}$, $n \geq 4$ e quindi $\cos \frac{3\pi}{2^n} > \frac{1}{\sqrt{2}}$) il mo-

dulo della proiezione ortogonale di $P_{n-1, k'}$ sulla $r_{n, k}$ è maggiore di $\frac{3}{2^{n+1}}$;

l'angolo $\widehat{OP_{n, k}P_{n-1, k'}}$ è quindi ottuso e $\geq \frac{\pi}{2} + \gamma_0$ con $\gamma_0 = \cos > 0$

(come si riconosce subito in maniera analoga a quella tenuta nel n. 5); indi un ragionamento già noto dimostra che anche in tal caso l'affermazione fatta nel n. 7 è sempre valida.

Meccanica. — *Effetto di tremolio nelle ali.* Nota di G. ANDREOLI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. A. CROCCO.

1. Osservazioni da me ripetutamente eseguite sul volo librato dei colombi, mi hanno fatto rilevare quanto segue. Il Colombo scende in volo librato sino ad una certa quota dal suolo, approssimativamente al luogo dove vuole atterrare; mantiene ali, corpo, coda nello stesso assetto ed inizia un tremolio delle ali (oscillazioni rapide, ma non tanto da non essere percepite ad occhio, attorno alla posizione media); allora la pendenza della traiettoria che precedentemente seguiva si accentua, sempre restando anche in questo secondo tratto rettilinea: quasi una brusca deflessione, dovuta ovviamente al tremolio stesso.

In questa breve Nota ci proponiamo di renderci conto del fenomeno stesso (sino alle abituali approssimazioni della teoria dell'ala finita, trascurando concause da tener presenti in una più precisa analisi) e nello stesso tempo di dedurne indicazioni utili alla tecnica costruttiva.

2. Schematizziamo il fenomeno. Un'ala portante di superficie S (eventualmente un velivolo completo) si muova di moto uniforme orizzontale, cui sia costretto, sotto l'incidenza α , alla velocità V , in un mezzo incompressibile di densità ρ . La portanza così ottenuta sarà data da

$$P = \int_{-1}^{+1} C(\sigma) d\sigma \cdot l \cdot V \cdot \rho$$

e la resistenza dalla resistenza di profilo e da quella indotta, cioè

$$R = R_0 + R_i = K_0 \cdot S \cdot V^2 + l \cdot V \cdot \rho \cdot \int_{-1}^{+1} C(\sigma) w(\sigma) d\sigma,$$

essendo R_0 la resistenza di profilo, l la semiapertura alare, $C(\sigma)$ la circolazione nella sezione (σ) ; $w(\sigma)$ il rapporto in (σ) fra velocità indotta in (σ) e velocità V . Si intende che le incidenze vanno calcolate a partire da quella di portanza nulla; e per fissare le idee e per semplicità di sviluppo, l'ala sia ellittica, sì da avere incidenza effettiva costante lungo tutta l'ala.

Le formole dianzi scritte, con la già detta teoria, si possono trascrivere diversamente esplicitando α , poichè (entro i soliti limiti) $C(\sigma) \sim \gamma(\sigma) \cdot \alpha \cdot V$; $w(\sigma) \sim \lambda(\sigma) \cdot \alpha$, con γ indipendente da α .

(1) Nella seduta del 5 aprile 1936.

3. L'ala entri ora in tremolio: oscilli cioè attorno all'incidenza α , in un tempo 2τ , periodicamente, e passi crescendo da $\alpha + \beta$ ad $\alpha - \beta$ e da questo di nuovo ad $\alpha + \beta$, decrescendo. Questo in modo che la media delle posizioni sia, in un periodo, quella α . Questo tremolio avvenga attorno all'asse focale: ciò presuppone che l'ala sia costituita in pianta da due semi-ellissi affini nel rapporto 1 a 3, e che quindi i fuochi delle sezioni sieno allineati. Ove ciò non fosse, vi sarebbe il fatto che ogni generica sezione non ruota attorno al proprio fuoco, presentandosi una retta focale complessiva dell'ala ed una curva focale, luogo dei fuochi delle sezioni. In tal guisa si presenterebbe un effetto di secondo ordine che, comunque, trascuriamo nel caso generale ora detto. Così pure trascuriamo il fatto che, a causa del movimento oscillante dell'ala, non si presenta più un movimento vorticoso a strato piano infinitamente sottile a partire dal bordo d'uscita, ma sibbene uno strato dotato di un certo spessore (quello dovuto alle due posizioni estreme) non più uniforme istantaneamente, ma uniforme solo in media, e di cui l'effetto (di secondo ordine) sulla velocità e resistenza indotta deve essere calcolato in media.

In ogni istante di un periodo si presentano due fatti: 1° una variazione dell'incidenza, 2° una velocità istantanea di rotazione attorno all'asse focale.

L'ulteriore ipotesi semplificatrice che faremo, è che tale rotazione diminuisca (e rispettivamente aumenti) la circuitazione per incidenza crescente (o calante) proporzionalmente alla velocità angolare, con coefficiente μ ⁽¹⁾.

Esso μ sarebbe zero se l'ala fosse rigorosamente assimilabile ad un tubo a sezione circolare infinitamente sottile; crescerebbe col raggio del tubo; ma in realtà la circuitazione aggiunta che si presenta dipende dalla forma dell'ala, dalla velocità di rotazione, di traslazione ecc.

Inoltre se l'oscillazione è abbastanza rapida, sì che le velocità lineari raggiunte dai punti dell'ala siano paragonabili a quella V della corrente d'immersione, si presenta lungo tutto il contorno della sezione un campo di velocità che modifica in modo completo la circuitazione: Quindi noi *escluderemo tali oscillazioni troppo rapide*.

A tale proposito, trattandosi di approssimare un fenomeno abbastanza complesso, queste rappresentano solo ipotesi approssimative in primo stadio. S. E. Crocco ed il prof. Pistolesi hanno fatte delle osservazioni al riguardo di cui l'effetto sulle formule medie sarà calcolato in fondo alla Nota stessa.

Reciprocamente, se il velivolo non è *costretto* a muoversi rettilineamente con velocità uniforme, il tremolio dell'ala non deve essere troppo lento: in tal caso si avrebbe una traiettoria ondulata, con incidenza ulteriormente variata da ciò.

Quindi l'effetto di tremolio avrà la sua giustificazione solo entro certi

(1) Risulterà poi, dal calcolo, che nel computo definitivo, tale fatto non dà contributo; e risulta così giustificata l'ipotesi empirica consistente nel trascurarlo.

limiti di vibrazioni: non troppo rapide, nè troppo lente; ed in tale ambito sono lecite le semplificazioni adottate.

4. Mantenendo *sempre* la velocità V , ne segue che in ogni periodo 2τ si ha come *valor medio* della portanza, nelle ipotesi anzidette, il valore

$$P^* = \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} dt \int_{-1}^{+1} \{\gamma(\sigma) - \mu\beta\tilde{\omega}'(t)\} \{\alpha + \beta\tilde{\omega}(t)\} d\sigma \cdot V_0^2$$

essendo $\tilde{\omega}(t)$ la funzione periodica che oscillando da $+1$ a -1 e da -1 a $+1$ nel modo già indicato, moltiplicata per β dà l'angolo di tremolio: con valore medio nullo, dovendo essere α l'incidenza media. Fatti i calcoli e tenuta presente la periodicità di $\tilde{\omega}$, di $\tilde{\omega}'$, si trae (come vedremo subito):

$$P^* = P.$$

Passando ai coefficienti di portanza, si deduce che in media, in un periodo completo, e quindi approssimativamente in un intervallo qualunque di tempo è:

$$C_p^*(\alpha) = C_p(\alpha)$$

con approssimazione tanto più forte quanto maggiore è l'intervallo di tempo.

Se invece si passa a calcolare, in media, la resistenza indotta si trova

$$R_i^* = \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} dt \int_{-1}^{+1} \lambda(\sigma) \{\gamma(\sigma) - \mu\beta\tilde{\omega}'(t)\} \{\alpha + \beta\tilde{\omega}(t)\}^2 d\sigma \cdot V_0^2.$$

Effettuati i calcoli si trova che

$$R_i^* = R_i \left(1 + \kappa \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right)$$

essendo κ , positivo minore di 1, il valor medio di $\tilde{\omega}^2(t)$.

5. Infatti, per la portanza, nell'integrazione rispetto a t , dividendo poi per 2τ , si trovano oltre il termine che da P , termini in:

$$\frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \tilde{\omega}'(t) dt \quad ; \quad \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \tilde{\omega}(t) dt \quad ; \quad \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \tilde{\omega}'(t) \tilde{\omega}(t) dt.$$

cioè in

$$\frac{1}{2\tau} [\tilde{\omega}(2\tau) - \tilde{\omega}(0)] \quad ; \quad \frac{1}{2\tau} [\Omega(2\tau) - \Omega(0)] \quad ; \quad \frac{1}{2\tau} \left[\frac{\tilde{\omega}^2(2\tau) - \tilde{\omega}^2(0)}{2} \right].$$

Il primo e l'ultimo sono nulli a causa della prescritta periodicità; il secondo è nullo essendo nulla, per ipotesi, la media (la posizione media è quella d'incidenza α).

Per la resistenza, invece, si hanno — oltre il termine che dà R_i — termini in

$$\frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \tilde{\omega}'(t) dt ; \quad \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \tilde{\omega}^2(t) dt ; \quad \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \tilde{\omega}'(t) \tilde{\omega}^2(t) dt ;$$

$$\frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \tilde{\omega}(t) dt ; \quad \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} \tilde{\omega}'(t) \tilde{\omega}(t) dt .$$

Alcuni di essi sono i precedenti; il terzo vale $\frac{1}{2\tau} \left[\frac{\tilde{\omega}^3(2\tau) - \tilde{\omega}^3(0)}{3} \right]$

ed è anch'esso nullo per la supposta periodicità; resta soltanto il secondo non nullo; esso corrisponde, come si vede sviluppando, ad R_i ove α^2 sia sostituita da $\kappa\beta^2$, κ essendo precisamente il valor medio di $\tilde{\omega}^2$.

Restano dunque giustificate le formule; e si vede che, in sostanza, il contributo recato dalla variata circuitazione sparisce. Cioè si perviene allo stesso risultato che si avrebbe conservando la circuitazione originaria (cioè che in effetti si esegui empiricamente, in pratica).

Anche qui si ha un valor medio in un periodo completo: se si prende il valor medio rispetto ad un intervallo qualunque di tempo, esso si avvicina sempre più a quello trovato, all'aumentare dell'intervallo.

Se la legge di tremolio è espressa ad esempio, da $\alpha + \beta - \varphi t$ nell'intervallo $(0, \tau)$ con $\varphi\tau = 2\beta$; e da $\alpha - \beta + \varphi(t - \tau)$ nell'intervallo $\tau, 2\tau$; e quindi con $\tilde{\omega}' = 1$ nel primo, -1 nel secondo intervallo, si trova $\kappa = \frac{1}{3}$;

se invece la legge di tremolio è data da legge armonica si trova $\kappa = \frac{1}{2}$; e così via.

6. Si osservi dunque che la resistenza indotta aggiunta dipende *soltanto* dall'ampiezza dell'oscillazione di tremolio e dalla forma di questa; *non* dipende affatto dalla durata del periodo di tremolio: ma si intende bene che ciò è vero solo nei limiti esplicitamente accennati nella formulazione (nello stesso ordine non dipende nemmeno dalla posizione dell'asse di tremolio; posizione che influisce invece attraverso la distribuzione dei vortici, ove di questa si tenga conto).

Abbiamo dunque trovato che per effetto del tremolio la portanza resta invariata, mentre la resistenza aumenta per un termine addizionale e proporzionale alla resistenza indotta.

Se l'apparecchio è in volo librato, l'aumento di resistenza implica una diminuzione di velocità; questa una diminuzione di portanza ed in definitiva si ha proprio la già notata deflessione della traiettoria.

Si osservi ancora che se il volo librato avveniva all'incidenza critica, la deflessione della traiettoria fa aumentare l'incidenza ed allora invece di compensare la perdita di portanza avviene che più la traiettoria si deflette e più si defletterà; quindi una delle tipiche cadute.

Ciò spiega anche perchè l'entrata in vibrazione torsionale dell'ala può produrre delle cadute: basta che tale vibrazione, assimilata a tremolio, produca tale una deflessione della traiettoria che, fermo restando l'assetto, l'incidenza raggiunga o superi quella critica.

Si rilevi infine che per ottenere l'effetto di tremolio non occorre estenderlo a tutta l'ala. A causa della legge delle « isocline » enunciata da S. E. Crocco, basta la presenza di alettoni in tremolio per avere un effetto ridotto, ma proporzionale ad uno di tremolio dell'ala completa.

Concludendo: l'effetto di tremolio induce un'azione frenante atta a deflettere verso il basso la traiettoria percorsa. Tale azione frenante si presenta come una resistenza addizionale, proporzionale a quella indotta dalla stessa ala ed espressa da un termine corrispondente all'ala ridotta proporzionalmente e muovendosi ad incidenza pari all'angolo di tremolio. Il coefficiente — sempre positivo e minore dell'unità — dipende dalla forma di legge di tremolio, ma non dal periodo, nè dalla velocità nè dall'asse.

Produce instabilità dinamica se nel tremolio si raggiunge o si sorpassa l'incidenza critica.

7. L'osservazione, cui accennavamo dianzi, dovuta al prof. Pistolesi riguarda due punti: 1° l'effetto della rotazione sulla circuitazione, effetto che dovrebbe essere assimilato ad una variazione dell'incidenza effettiva; 2° la stessa legge (o quasi) del moto permanente è troppo semplice per il moto oscillatorio.

La prima parte induce ad aggiungere un termine $v \cdot \beta \tilde{\omega}'(t)$ ad $\alpha + \beta \tilde{\omega}(t)$ anziché a sottrarre $\mu \cdot \beta \cdot \tilde{\omega}'(t)$ a $\gamma(\sigma)$.

Sta di fatto però che tale aggiunzione non modifica per nulla la portanza e modifica solo di termini di ordine ancora superiore la resistenza. Per essere più completi ci sembra vada fatta e l'una e l'altra cosa assieme; quindi aggiungere a $\gamma(\sigma)$, $\mu \beta \tilde{\omega}'(t)$ perchè una rotazione sovrapposta (linearmente) ad un campo di velocità modifica la circuitazione; aggiungere $v \cdot \beta \cdot \tilde{\omega}'(t)$ ad $\alpha + \beta \tilde{\omega}(t)$ per l'osservazione indicata.

Per la portanza vi è variazione solo se sono presenti ambedue i termini. In tale ipotesi è:

$$P^* = \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\tau} dt \int_0^{+1} \{ \gamma(\sigma) - \mu \cdot \beta \cdot \tilde{\omega}'(t) \} \{ \alpha + \beta \tilde{\omega}(t) + v \cdot \beta \cdot \tilde{\omega}'(t) \} d\sigma \cdot S \cdot V_0^2.$$

Essendo la $\tilde{\omega}$ periodica, a valor medio nullo, computando i termini come al n. 5, si vede che resta solo:

$$P^* = P - \mu \cdot v \cdot \beta^2 \{ \tilde{\omega}'(t)^2 \}^* \cdot S \cdot V^2 \cdot \rho$$

e quindi se μ o ν sono nulli, si ritrova $P^* = P$; altrimenti supposto μ e ν , piccoli assieme a β , e mantenendosi nel campo di oscillazioni *non* molto rapide (si da non far prevalere il $\max \cdot |\dot{\omega}'(t)|$), nella portanza si presenta un termine correttivo di secondo ordine.

Invece per la resistenza, quel termine aggiuntivo dovuto all'osservazione precipitata, si ritrova sotto quadrato.

Conducendo i calcoli in modo analogo al predetto n. 5, si vede che le condizioni imposte a $\tilde{\omega}$ di essere periodica, a valor medio nullo, riducono tutti i termini ai soli

$$R_i^* = R_i \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \theta \right)$$

ove θ rappresenta la somma di termini corrispondenti a valori medi di

$$\tilde{\omega}^2 ; \tilde{\omega}'^2 ; \tilde{\omega} \cdot \tilde{\omega}'^2 ; \tilde{\omega}'^3 ;$$

e quelli in $\tilde{\omega}'^2$ sono due distinti. Se valgono i motivi per trascurare nella portanza il termine in $[\omega'^2]^*$, essi a maggior ragione portano a trascurare questi nella resistenza, e quindi tutti i successivi.

Con questa più completa impostazione può accadere che sieno trascurabili (causa rapida vibrazione) gli altri termini e che predomini $[\tilde{\omega}'^2]^*$; ed allora l'analisi cambierebbe aspetto al fenomeno, avendosi variazione di portanza assieme ad una di resistenza.

Notiamo che se μ fosse nullo e non fosse nullo ν (quello dovuto all'osservazione ora fatta), sparirebbero i due ultimi termini e resterebbero solo i primi; sicchè in ogni caso allora la resistenza aumenterebbe con due termini aggiuntivi e la portanza con nessuno.

8. Quanto alla seconda osservazione, il calcolo della velocità indotta è stato da noi effettivamente perseguito come se in ogni istante valesse la fascia di vortici uniformi dovuti al moto stazionario; si tratta cioè di aver considerato un primo termine dello sviluppo.

Sta di fatto questo: i vortici si allontanano pulsando, sicchè invece di calcolare la velocità indotta come dovuta a vortici uniformi staccantisi dal bordo di uscita, occorre tener conto di questa pulsazione; e la forma e costituzione della fascia dipende dalla posizione dell'asse di oscillazione, oltre che dalla legge di tremolio.

Ma se, in prima approssimazione, si prende il valor medio nel tempo di tale fascia pulsante come eguale a quello originario non perturbato, si spiega la semplificazione da noi introdotta.

A causa della pulsazione sorgono ulteriori termini correttivi: ed un procedimento alternato permetterebbe di rendersi conto della entità di questi termini.

Il procedimento consiste appunto nel partire dall'ipotesi da noi fatta; tener conto dell'intensità dei vortici così ottenuti in funzione del tempo; calcolare l'effetto istantaneo e quello medio ad essi dovuto; tener conto delle modifiche che in tal guisa si ha nella circuitazione; e riprendere il ciclo di approssimazioni da tale punto.

Resta aperta la quistione di una più completa analisi in tale senso; e ringrazio vivamente S. E. Crocco ed il prof. Pistolesi che con le loro osservazioni mi hanno permesso di delineare meglio lo schema.

Meccanica. — *Le vibrazioni di un sistema elastico con vincoli inerti ed elastici.* Nota di A. GALLI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. A. SIGNORINI.

§ 1. — Il problema delle vibrazioni longitudinali e trasversali di aste, di cui le dimensioni trasversali sono piccole rispetto a quelle longitudinali, è notoriamente risoluto per le più varie condizioni di vincoli agli estremi, per tutti i gradi dell'incastro, da quello perfetto allo snodo a cerniera.

Qui ci proponiamo di portare un contributo alle ricerche in merito considerando i vincoli quali effettivamente sono nella realtà, quando le aste schematizzano le travi da ponte: corpi rigidi (le pile) immersi in un mezzo praticamente trattabile come elastico ⁽²⁾ (il terreno di fondazione) cioè sistemi non solo dotati di proprietà elastiche ma anche di proprietà inerziali.

Sperimentalmente, l'influenza dei vincoli considerati sotto questo più generale aspetto pare accertata ⁽³⁾. Nostro specifico intento sarà di istituire l'equazione delle frequenze (equazione secolare) per il sistema « asta solidale con le pile » la solidarietà essendo ottenuta attraverso quelle condizioni che si vogliono (incastro, cerniera, carrello).

Come sarà agevole constatare, il criterio che esponiamo non è privo di generalità e, sotto certi aspetti, interessante anche dal punto di vista analitico in quanto presenta un *problema al contorno* per equazioni alle derivate parziali in cui i valori della *soluzione* debbono soddisfare a delle equazioni alle derivate ordinarie. Faremo anche vedere come codesta equazione possa, in taluni casi, essere effettivamente affrontata con successo, indi ragguaglieremo i risultati ottenuti con quelli offerti dai procedimenti di approssimazione ordinari presso i tecnici.

(1) Nella seduta del 5 aprile 1936.

(2) G. KRALL, *Vibrazioni di un corpo rigido in sospensione elastica*. « Annali di Matematica », 1926; ID., *Problemi statici delle costruzioni marittime*. « Memorie Reale Accademia d'Italia », vol. V, 1934, estratto n. 2; A. GALLI, *Su di una applicazione dinamica dell'ellisse di elasticità*. « Ricerche di Ingegneria », anno II, n. 3, 1934.

(3) G. ALBENGA, *Lezioni di ponti*, vol. II, p. 137.

Tratterremo il suolo di fondazione come vincolo elastico atto a reagire a due generi di spostamenti locali: il primo misurato in direzione della normale all'elemento giacente sulla superficie che limita il blocco di fondazione ed il secondo nella direzione tangente allo stesso elemento superficiale e giacente nel piano della normale e dello spostamento totale del centro dell'elemento.

Gli spostamenti longitudinali e trasversali della sezione dell'asta vibrante sono retti da due equazioni differenziali alle derivate parziali. Le equazioni dei moti oscillatori dei blocchi rigidi di fondazione costituiscono dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie caratteristiche per le piccole oscillazioni attorno ad una configurazione naturale o di equilibrio stabile. Poichè qui si tratta di vibrazioni libere in assenza, almeno per ipotesi, di cause dissipatrici di energia (non solo dovute a fenomeni interni di isteresi, all'attrito dei vincoli e delle cerniere se si tratta di un sistema reticolare, ma, principalmente alla dispersione nel mezzo che circonda la pila) lo spostamento di un qualunque punto del sistema, trave-blocco, che qui si considera deriva dalla sovrapposizione di oscillazioni armoniche le cui frequenze formano, come si è detto, l'oggetto del nostro studio.

§ 2. — QUALCHE RICHIAMO.

Lo spostamento trasversale libero w_1 di qualsiasi sezione dell'asta si lascia rappresentare da:

$$(I) \quad w_1 = (k_1 \sin \alpha x + k_2 \sinh \alpha x + k_3 \cos \alpha x + k_4 \cosh \alpha x) \cos (\lambda t + \varepsilon)$$

le 4 costanti k_1, \dots, k_4 dovendosi determinare così che le condizioni agli estremi siano soddisfatte; la relazione intercedente fra λ ed α è:

$$\alpha^4 = \frac{\lambda^2 F \gamma}{EI g}$$

in cui F rappresenta l'area della sezione trasversale dell'asta, I il suo momento d'inerzia rispetto all'asse neutro, γ il peso specifico del materiale, E il suo modulo di elasticità, g l'accelerazione di gravità.

Lo spostamento longitudinale w_2 di una qualsiasi sezione trasversale dell'asta durante la vibrazione è:

$$(2) \quad w_2 = \left(k_5 \sin \frac{\lambda x}{a} + k_6 \cos \frac{\lambda x}{a} \right) \cos (\lambda t + \varepsilon)$$

le due costanti k_5 e k_6 dovendosi determinare con riflesso alle condizioni agli estremi, a è definito da:

$$a^2 = \frac{E g}{\gamma}$$

(a è la velocità di propagazione dell'onda lungo l'asta).

Nelle (1) e (2) λ è legata alla frequenza ν dalla: $\nu = \frac{\lambda}{2\pi}$.

Ciò posto, rivolgiamo la nostra attenzione ai moti vibratorii dei blocchi nel piano parallelo a quello contenente gli spostamenti w_1 e w_2 .

Per caratterizzarli occorre, in primo luogo, definire le caratteristiche elastiche della sospensione di codesti corpi che tratteremo come rigidi. Ciò riesce agevolmente attraverso la così detta ellisse di elasticità longitudinale relativa al blocco stesso che, per la premessa rigidità, si può riguardare come elemento terminale della sospensione stessa. Determinata tale ellisse (la citata Nota di Krall riporta formule definitive per vari tipi di sagome e riseghe dei blocchi), è noto che una forza applicata al blocco provoca una rotazione del blocco stesso intorno all'antipolo della linea di azione della forza. Tale rotazione è eguale al prodotto della forza per il momento statico del peso elastico (definito come rapporto fra la rotazione del blocco intorno al cosiddetto baricentro elastico ed il momento necessario a produrla) rispetto alla linea di azione della forza. Il potenziale elastico, espresso mediante gli elementi forniti dall'ellisse di elasticità del mezzo elastico, assume la forma:

$$-W = \frac{u^2}{2\mathcal{G}i_v^2} + \frac{v^2}{2\mathcal{G}i_u^2} + \frac{\omega^2}{2\mathcal{G}} \frac{d'}{d} + \frac{v_0}{\mathcal{G}i_v^2} u\omega - \frac{u_0}{\mathcal{G}i_u^2} v\omega$$

in cui \mathcal{G} è il peso elastico, i_v ed i_u i semiassi dell'ellisse di elasticità, u_0 e v_0 le coordinate del baricentro elastico, d e d' le distanze dell'antipolare di G (rispetto all'ellisse di elasticità) dal baricentro elastico e dal baricentro, e, di più, si siano scelti come assi di riferimento meccanico quelli passanti per il baricentro G delle masse inerti del blocco e paralleli agli assi dell'ellisse di elasticità e come parametri del blocco le due traslazioni u e v (vedi figura) del baricentro G e la rotazione ω intorno all'asse, per G, normale al piano uv .

L'energia cinetica del blocco, per il riferimento assunto, si esprime allora concisamente:

$$T = \frac{1}{2} M (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + \frac{1}{2} \mathcal{J} \dot{\omega}^2$$

essendo M la massa totale del blocco, \mathcal{J} il momento d'inerzia dello stesso rispetto all'asse, per G, normale ad uv .

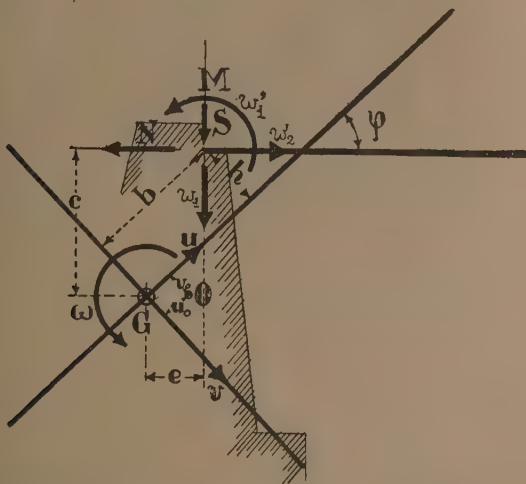
§ 3. — ISTITUZIONE DELL'EQUAZIONE DELLE FREQUENZE O SECOLARE.

Attesa l'espressione di W e di T , possiamo, come è ben ovvio del resto, affermare che i parametri u, v, ω saranno espressioni del tipo riflettente oscillazioni attorno la configurazione stabile $u = v = \omega = 0$, di cui

le frequenze sono eguali a quelle, da determinarsi, dell'asta. Se con $\bar{u}, \bar{v}, \bar{\omega}$ indichiamo una terna di determinazioni di u, v, ω indipendenti da t , sarà:

$$(3) \quad u = \bar{u} \cos(\lambda t + \varepsilon) \quad v = \bar{v} \cos(\lambda t + \varepsilon) \quad \omega = \bar{\omega} \cos(\lambda t + \varepsilon).$$

Le espressioni (1), (2) e (3) di w_1, w_2, u, v, ω , contengono 9 costanti che, con le $\bar{u}', \bar{v}', \bar{\omega}'$ che appariscono nelle equazioni, analoghe alle (3), relative al blocco di destra, formano 12 costanti alla determinazione delle quali occorrono altrettante equazioni; codeste equazioni omogenee ammetteranno soluzioni distinte da quelle triviali, identicamente nulle, solo quando si annullerà il suo discriminante fondamentale $D(\lambda)$ con rispetto all'unico parametro di cui in esso si può disporre, la frequenza λ . $D(\lambda) = 0$ costituisce l'equazione secolare cercata.



Occorre pertanto procurarsi le 12 equazioni indipendenti nelle 12 incognite; esse sono fornite: 6 dall'eguaglianza degli spostamenti degli estremi dell'asta e delle facce d'attacco del blocco se la solidarietà è perfetta, altre 6 esprimendo che i binomi lagrangiani

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial W}{\partial q}$$

in cui la coordinata q sta a rappresentare una delle $u, v, \omega, u', v', \omega'$, e calcolati per le suddette coordinate attraverso le (3), eguagliano le componenti lagrangiane ridotte ai parametri u, v, \dots, ω' , delle azioni esercitate dall'asta, azioni che si sanno esprimere in funzione di w_1 e w_2 ricordando le relazioni che legano lo sforzo assiale a w_2 , il momento ed il taglio a w_1 , precisamente:

$$N = EF \frac{\partial w_2}{\partial x} \quad M = -EI \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \quad S = -EI \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}.$$

Esprimiamo i parametri u, v, ω del blocco di sinistra in funzione delle caratteristiche del moto della sezione di estremità di sinistra della trave. Ricordando che la rotazione della stessa sezione è:

$$w'_1(0|t) = \left| \frac{\partial w_1(x|t)}{\partial x} \right|_{x=0}$$

potremo scrivere, con gli elementi che si rilevano dalla figura:

$$u(t) = -w_1(0|t) \sin \varphi + w_2(0|t) \cos \varphi - w'_1(0|t) b$$

$$v(t) = w_1(0|t) \cos \varphi + w_2(0|t) \sin \varphi - w'_1(0|t) b$$

$$\omega(t) = -\frac{w_1(0|t)}{e} - \frac{w_2(0|t)}{c} - w'_1(0|t)$$

(il simbolo $w(0|t)$ rappresenta il valore di w nel punto $x=0$ al variare del tempo). Sostituendo i valori di $w_1(0|t)$, $w_2(0|t)$ e $w'_1(0|t)$ otteniamo

$$(4) \quad \begin{cases} \bar{u} = -k_3 \sin \varphi - k_4 \sin \varphi + k_5 \cos \varphi - k_1 \alpha b - k_2 \alpha b \\ \bar{v} = k_3 \cos \varphi + k_4 \cos \varphi + k_5 \sin \varphi - k_1 \alpha b - k_2 \alpha b \\ \bar{\omega} = -\frac{k_3}{e} - \frac{k_4}{e} - \frac{k_6}{c} - k_1 \alpha - k_2 \alpha \end{cases}$$

e tre analoghe per il blocco di destra.

Così, passando ai binomi lagrangiani, cioè ad esprimere in luogo dell'eguaglianza degli spostamenti l'eguaglianza delle azioni mutue tra blocco e trave otteniamo:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial W}{\partial u} = -N \cos \varphi - S \sin \varphi \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial W}{\partial v} = -N \sin \varphi + S \cos \varphi \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\omega}} \right) - \frac{\partial W}{\partial \omega} = Nc + Se + M \end{cases}$$

e tre analoghe per il blocco di destra, le u, v, ω ; u', v', ω' essendo espresse pel tramite delle (3).

Concettualmente il nostro problema è risoluto.

§ 4. - CASI PARTICOLARI. ESEMPIO CONCRETO.

Rileviamo che se, in luogo dell'attacco perfetto della faccia terminale dell'asta al blocco, si avesse uno snodo, al posto delle prime due delle (4) si avrebbero:

$$\bar{u} = -k_3 \sin \varphi - k_4 \sin \varphi + k_5 \cos \varphi$$

$$\bar{v} = k_3 \cos \varphi + k_4 \cos \varphi + k_5 \sin \varphi$$

ed al posto della terza la condizione che è nullo il momento

$$-EI \left| \frac{\partial^2 \omega_1(x|t)}{\partial x^2} \right|_{x=0}.$$

Infine, se in luogo dello snodo a cerniera si avesse un carrello, la prima delle (4) diventerebbe:

$$\bar{u} = -k_3 \sin \varphi - k_4 \sin \varphi$$

ed in luogo delle due ultime:

$$EI \left| \frac{\partial^2 \omega_1(x|t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{ed} \quad EF \left| \frac{\partial \omega_2(x|t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0.$$

L'equazione delle frequenze che, per brevità, non abbiamo trascritto nella forma generale, si lascia esprimere in forma semplice in casi particolari: così accade per la trave semplicemente appoggiata sui blocchi quando le reazioni degli appoggi passano per i baricentri dei relativi blocchi ed hanno linee di azioni coincidenti con uno degli assi delle relative ellissi di elasticità. Per $x = 0$ il momento è nullo ed è $\omega_2 = u$: ciò comporta, come facilmente si rileva dalla (1), che $k_3 = k_4$ ed $\bar{u} = 2k_3$. Le analoghe condizioni per $x = l$ si traducono in:

$$-k_1 \sin \alpha l + k_2 \sinh \alpha l - k_3 (\cos \alpha l - \cosh \alpha l) = 0$$

$$k_1 \sin \alpha l + k_2 \sinh \alpha l + k_3 (\cos \alpha l + \cosh \alpha l) = u'.$$

Le (5) scritte per i due blocchi si riducono alle:

$$-M\lambda^2 \bar{u} + \frac{\bar{u}}{\mathfrak{G} i_u^2} = -EI\alpha^3 (-k_1 + k_2)$$

$$-M'\lambda^2 \bar{u}' + \frac{\bar{u}'}{\mathfrak{G} i_s^2} = EI\alpha^3 [-k_1 \cos \alpha l + k_2 \cosh \alpha l + k_3 (\sin \alpha l + \sinh \alpha l)].$$

Le 6 equazioni precedenti fra le 6 costanti n, k_1, \dots, k_4, n' forniscono col discriminante posto eguale a zero l'equazione delle frequenze. Se i blocchi sono eguali, diventa:

$$(6) \quad (EI\alpha^3)^2 (-1 + \cos \alpha l \cosh \alpha l) + 2 EI\alpha^3 \xi (-\sin \alpha l \cosh \alpha l + \cos \alpha l \sinh \alpha l) = 2 \xi^2 \sin \alpha l \sinh \alpha l$$

nella quale $\xi = M\lambda^2 - \frac{1}{\mathfrak{G} l_n^2}$.

In corrispondenza di configurazioni simmetriche della linea elastica, in luogo della (6), avvalendoci delle condizioni che si verificano nella mezzeria della trave (per $x = \frac{l}{2}$, $\frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} = 0$), l'equazione delle frequenze si semplifica ancora in:

$$(7) \quad EI\alpha^3 \left(\cos \frac{\alpha l}{2} \sinh \frac{\alpha l}{2} + \sin \frac{\alpha l}{2} \cosh \frac{\alpha l}{2} \right) = -2\xi \cos \frac{\alpha l}{2} \cosh \frac{\alpha l}{2}.$$

Analogamente per configurazioni dissimmetriche si ottiene:

$$(8) \quad EI\alpha^3 \left(\cos \frac{\alpha l}{2} \sinh \frac{\alpha l}{2} - \sin \frac{\alpha l}{2} \cosh \frac{\alpha l}{2} \right) = 2\xi \sin \frac{\alpha l}{2} \sinh \frac{\alpha l}{2}.$$

Per agevolare la risoluzione numerica della equazione (7), o nei casi in cui non interessa una grande esattezza, può essere opportuna la determinazione approssimata della frequenza fondamentale mediante la seguente applicazione del metodo di Lord Reyleigh: assunte come coordinate lagrangiane l'abbassamento x_1 della pila e l'abbassamento totale x_2 della mezzeria della trave, l'energia cinetica del sistema può scriversi:

$$T = M \dot{x}_1^2 + \frac{M_1}{2} \dot{x}_2^2$$

in cui M_1 è la massa ridotta della trave, cioè $\frac{17}{35} \frac{ql}{g}$ in cui q è il peso a ml. di trave.

L'energia potenziale è:

$$-W = k_1 x_1^2 + k_2 \frac{(x_2 - x_1)^2}{2}$$

in cui $k_1 = \frac{I}{\mathfrak{G} l_n^2}$ e $k_2 = 48 \frac{EI}{l^3}$. Le equazioni lagrangiane dei moti del blocco e della trave sono:

$$2 M \ddot{x}_1 + 2 k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) = 0$$

$$M_1 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) = 0.$$

Da queste si ha la seguente equazione delle frequenze:

$$(9) \quad (2k_1 + k_2 - 2\lambda^2 M)(k_2 - M_1 \lambda^2) - k_2^2 = 0.$$

Riferiamoci al caso concreto di una trave per la quale: $l = 10\text{ m}$, $E = 2 \times 10^5 \text{ kg. cm}^{-2}$, $\gamma = 0.0024 \text{ kg. cm}^{-3}$, $F = 40 \text{ cm.} \times 40 \text{ cm.}$ poggiata su due blocchi di massa specifica $\frac{0.0022}{g}$ (con $g = 981 \text{ cm. sec}^{-2}$) alti 500 cm. con sezione trasversale $100 \text{ cm.} \times 200 \text{ cm.}$ immersi in terreno elastico per il quale la costante elastica per spostamenti normali alla superficie del blocco è 2 kg. cm^{-3} . Risulta la frequenza fondamentale per appoggi rigidi:

$$\frac{\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EIg}{F\gamma}} = 12.95 \text{ sec}^{-1}.$$

Per il blocco di fondazione considerato svincolato dalla trave la frequenza delle oscillazioni verticali è:

$$(2\pi \sqrt{Mg_{lu}})^{-1} = 6.28 \text{ sec}^{-1}.$$

L'equazione (9) fornisce le seguenti radici:

$$\lambda_1^2 = 7836.38 \quad \text{e} \quad \lambda_2^2 = 1573.49$$

cui corrispondono le frequenze del sistema ottenuto con accoppiamento dei due considerati or ora distintamente,

$$\nu_1 = 14.09 \quad \text{e} \quad \nu_2 = 6.31 \text{ sec}^{-1}.$$

La (7) è, invece, soddisfatta dai valori 14.29 e 5.98 delle frequenze le quali corrispondono per α rispettivamente 0.003299 cm^{-1} e $0.0021322 \text{ cm}^{-1}$. Gli stessi valori di α verificano la (5). La (8) e la (6) sono soddisfatte per $\nu = 53.00$ cui corrisponde $\alpha = 0.006353$: è questa la prima frequenza per configurazioni dissimmetriche.

Sullo stesso esempio abbiamo verificata l'attendibilità della ipotesi da noi introdotta sulla rigidità dei blocchi: abbiamo immaginato rigido il terreno, ed attribuito ai blocchi un modulo di elasticità $E = 10^5 \text{ kg. cm}^{-2}$.

Lo spostamento assiale della sezione generica $x = \text{cost.}$ del blocco è dato, con riflesso alla (2), da:

$$w_b = k_{1b} \sin \frac{\lambda x_b}{a_b} \cos (\lambda t + \varepsilon)$$

(l'indice b sta ad indicare che le grandezze si riferiscono al blocco).

Eguagliando gli abbassamenti delle sezioni estreme della trave a quelli delle sommità delle pile, le forze di taglio nelle prime a quelle normali

nelle seconde, si sono ottenute due equazioni che, con le condizioni in mezzeria per configurazioni simmetriche della linea elastica, danno:

$$EI\alpha^3 \left(\cos \frac{\alpha l}{2} \sinh \frac{\alpha l}{2} + \sinh \frac{\alpha l}{2} \cosh \frac{\alpha l}{2} \right) = -2 \frac{F_b E_b \lambda}{a_b \operatorname{tg} \frac{a_b}{a_b}} \cos \frac{\alpha l}{2} \cosh \frac{\alpha l}{2}$$

che è soddisfatta da un valore di α quasi identico a quello corrispondente all'ipotesi dell'appoggio rigido.

Meccanica. — *Sulle omografie vettoriali con applicazioni cinematiche negli spazi S_n .* — II. *Sulle omografie prodotto di due assiali.*
Nota di M. MANARINI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. P. BURGATTI.

4. Supponiamo ora che h sia radice reale multipla di ordine c dell'equazione $I_n(\alpha - x) = 0$, con $\alpha = \gamma_1 \gamma_2$ prodotto delle due assiali γ_1 e γ_2 anche non degeneri, nel qual caso bisogna supporre necessariamente pari le dimensioni dello spazio S_n in cui si opera.

Ne consegue che l'omografia

$$\beta = \gamma_1 \gamma_2 - h$$

ha per caratteristica $c \neq 0$ e che le direzioni nulle per β sono direzioni unite per $\gamma_1 \gamma_2$, e viceversa.

Per essere β omografia degenerare, esisterà almeno un versore a_1 direzione nulla di β , cioè:

$$\beta a_1 = 0.$$

Supposto $c \geq 2$, risulta $I_{n-1}\beta = 0$; onde, ripetendo la prima parte del ragionamento fatto per l'assiale γ al n. 1, deduciamo che esiste un vettore a_2 non nullo e linearmente indipendente da a_1 per il quale si ha

$$\beta a_2 = c_1 a_1.$$

Dico che anche in questo caso è $c_1 = 0$.

Invero, la precedente si può scrivere

$$\gamma_1 \gamma_2 a = h a_2 + c_1 a_1,$$

la quale, moltiplicata scalarmente per $\gamma_2 a_2$ (necessariamente diverso dallo zero) e tenendo conto che per essere γ_1 e γ_2 assiali si ha

$$\gamma_1 \gamma_2 a_2 \times \gamma_2 a_2 = 0 \quad , \quad \gamma_2 a_2 \times a_2 = 0,$$

(1) Nella seduta del 5 aprile 1936.

diviene

$$c_1 \mathbf{a}_1 \times \gamma_2 \mathbf{a}_2 = 0;$$

il che comporta $c_1 = 0$, data l'arbitrarietà con cui può essere scelto \mathbf{a}_2 linearmente indipendente da \mathbf{a}_1 .

Concludiamo dunque che in corrispondenza della radice reale multipla h , per $c \geq 2$ esistono due direzioni nulle linearmente indipendenti $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ per l'omografia β ; queste sono direzioni unite per $\gamma_1 \gamma_2$, tali che per esse risulta

$$\gamma_1 \gamma_2 \mathbf{a}_1 = h \mathbf{a}_1, \quad \gamma_1 \gamma_2 \mathbf{a}_2 = h \mathbf{a}_2.$$

Ancora, se si suppone $c \geq 3$ onde risulta necessariamente $I_{n-2} \beta = 0$, scrivendo la relazione, analoga alla (2), che definisce l' $I_{n-2} \beta$ servendoci di una n -pla di vettori linearmente indipendenti $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \dots, \mathbf{b}_n$, deduciamo che è:

$$V(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \beta \mathbf{b}_3, \beta \mathbf{b}_4, \dots, \beta \mathbf{b}_n) = 0.$$

Quindi esisteranno i numeri reali c'_1, c'_2, \dots, c'_n non tutti nulli per i quali si ha:

$$c'_1 \mathbf{a}_1 + c'_2 \mathbf{a}_2 + c'_3 \beta \mathbf{b}_3 + \dots + c'_n \beta \mathbf{b}_n = 0,$$

e posto

$$\mathbf{a}_3 = -(c'_3 \mathbf{b}_3 + \dots + c'_n \mathbf{b}_n),$$

che risulta necessariamente non nullo e linearmente indipendente da $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, otteniamo:

$$\beta \mathbf{a}_3 = c'_1 \mathbf{a}_1 + c'_2 \mathbf{a}_2.$$

Dico che deve essere $c'_1 = c'_2 = 0$. Invero la precedente si può scrivere

$$\gamma_1 \gamma_2 \mathbf{a}_3 = c'_1 \mathbf{a}_1 + c'_2 \mathbf{a}_2 + h \mathbf{a}_3,$$

dalla quale, moltiplicando scalarmente per $\gamma_2 \mathbf{a}_3$, necessariamente non nullo, ed avendosi:

$$\gamma_1 \gamma_2 \mathbf{a}_3 \times \gamma_2 \mathbf{a}_3 = 0, \quad \gamma_2 \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_3 = 0$$

per essere γ_1 e γ_2 omografie assiali, otteniamo:

$$(c'_1 \mathbf{a}_1 + c'_2 \mathbf{a}_2) \times \gamma_2 \mathbf{a}_3 = 0;$$

data l'arbitrarietà di \mathbf{a}_3 rispetto ad $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ dovrà essere:

$$c'_1 \mathbf{a}_1 + c'_2 \mathbf{a}_2 = 0,$$

ed infine $c'_1 = c'_2 = 0$ per la lineare indipendenza di α_1 con α_2 . Pertanto possiamo scrivere

$$\beta \alpha_3 = 0,$$

e concludiamo che nella ipotesi di h radice multipla di ordine $c \geq 3$ esiste uno spazio S_3 di direzioni nulle α per β che risulta spazio di direzioni unite per $\gamma_1 \gamma_2$:

$$\gamma_1 \gamma_2 \alpha = h \alpha.$$

Così seguitando fino a considerare il valore c dell'ordine di molteplicità in corrispondenza della radice multipla h , essendo $I_{n-c+1} \beta = 0$, possiamo costruire uno spazio S_c , a c dimensioni, di direzioni nulle α per β , che risulta spazio di direzioni unite per $\gamma_1 \gamma_2$ e per le quali si ha

$$\gamma_1 \gamma_2 \alpha = h \alpha.$$

Essendo poi $I_{n-c} \beta \neq 0$, per il fatto di avere β caratteristica c , consegue che non vi potrà essere uno spazio di direzioni nulle per β con dimensione maggiore di c . Invero, se ciò fosse, scrivendo con la solita regola l'espressione di $I_{n-c} \beta$ mediante una n -pla di vettori linearmente indipendenti contenente $c+1$ vettori dello spazio S_{c+1} di direzioni nulle, questo invariante risulterebbe nullo, contro l'ipotesi.

Possiamo pertanto concludere che per l'omografia $\beta = \gamma_1 \gamma_2 - h$ la caratteristica è uguale al rango e che per l'omografia $\alpha = \gamma_1 \gamma_2$ prodotto di due assiali, anche non degeneri (caso che a noi particolarmente interesserà più avanti), se h è radice reale multipla dell'ordine c dell'equazione $I_n(\alpha - x) = 0$, esiste in corrispondenza uno spazio S_c (con dimensione c e non con dimensione maggiore), di direzioni unite α per $\gamma_1 \gamma_2$, per le quali è:

$$\gamma_1 \gamma_2 \alpha = h \alpha.$$

Sé si considera, ad es., lo spazio ordinario S_3 e in esso le due omografie assiali $\gamma_1 = u\Lambda$, $\gamma_2 = v\Lambda$, si può verificare che l'equazione

$$I_3(\gamma_1 \gamma_2 - x) = 0$$

ammette una radice nulla e la radice reale doppia $-u \times v$; cosicchè l'omografia $\gamma_1 \gamma_2 = u\Lambda \cdot v\Lambda$, in generale degenera di rango 1, ammetterà un piano di direzioni unite α tali che

$$\gamma_1 \gamma_2 \alpha = -(u \times v) \cdot \alpha.$$

Detto piano è manifestamente il piano normale al vettore u , come si nota, riflettendo che si può scrivere:

$$u\Lambda \cdot v\Lambda = H(u, v) - u \times v.$$

5. A noi interessa per le applicazioni anche il caso in cui h sia una radice complessa dell'ordine c di molteplicità per l'equazione $I_n(\alpha - x) = 0$, con α uguale al prodotto di due assiali γ_1, γ_2 non degeneri, per la qual cosa bisognerà supporre S_n con dimensione necessariamente pari.

Se si pone $h = p + iq$, otteniamo che l'omografia $\beta = (\alpha - p)^2 + q^2$ risulta con caratteristica $2c$ ⁽¹⁾. Dico che esiste uno spazio S_{2c} con dimensioni $2c$, di direzioni nulle per β e non uno spazio di dimensione maggiore.

Per essere necessariamente $I_n\beta = 0$ l'omografia β è degenera ed esisterà almeno un vettore a_1 tale che

$$\beta a_1 = 0.$$

Per essere la caratteristica di β non inferiore a 2, risulta $I_{n-1}\beta = 0$, onde ragionando al solito modo come nella prima parte del n. 1 possiamo dimostrare l'esistenza del vettore a_2 necessariamente non nullo e linearmente indipendente da a_1 tale che risulta:

$$\beta a_2 = c_1 a_1.$$

Ma dico che anche qui risulta $c_1 = 0$. Invero, la precedente si può scrivere

$$(\gamma_1 \gamma_2 - p)^2 a_2 = -q^2 a_2 + c_1 a_1,$$

e moltiplicando per $\gamma_1^{-1} a_2$, tenendo conto che $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1^{-1}$ sono assiali, ricaviamo

$$c_1 a_1 \times \gamma_1^{-1} a_2 = 0,$$

da cui consegue $c_1 = 0$, data l'arbitrarietà con cui può essere scelto a_2 linearmente indipendente da a_1 .

Concludiamo intanto che per c non nullo, in corrispondenza della predetta radice h , esiste almeno uno spazio S_2 di direzioni nulle per β .

Supponiamo ora che sia c maggiore di uno, per la qual cosa risulta necessariamente anche $I_{n-2}\beta = 0$, cosicchè ricorrendo alla definizione di $I_{n-2}\beta$, servendoci di una n -pla di vettori linearmente indipendenti $a_1, a_2, b_3, b_4, \dots, b_n$, otteniamo

$$V(a_1, a_2, \beta b_3, \dots, \beta b_n) = 0.$$

(1) Cfr. B. DE FINETTI, *Studio delle omografie vettoriali in relazione alla radici di* $I_n(\alpha - x) = 0$. «Atti della Pont. Acc. delle Scienze, Nuovi Lincei», anno LXXXII, 1929, p. 412.

Di qui, come al solito, ricaviamo l'esistenza di un vettore \mathbf{a}_3 non nullo, linearmente dipendente da $\mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_n$ e linearmente indipendente da $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ per il quale risulta

$$\beta \mathbf{a}_3 = c'_1 \mathbf{a}_1 + c'_2 \mathbf{a}_2.$$

Ma dico che dovrà essere $c'_1 = c'_2 = 0$. La precedente invero si può scrivere

$$(\gamma_1 \gamma_2 - p)^2 \mathbf{a}_3 = c'_1 \mathbf{a}_1 + c'_2 \mathbf{a}_2 - q^2 \mathbf{a}_3,$$

e moltiplicando scalarmente per $\gamma_1^{-1} \mathbf{a}_3$, ricordando al solito che $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1^{-1}$ sono assiali, si ricava

$$(c'_1 \mathbf{a}_1 + c'_2 \mathbf{a}_2) \times \gamma_1^{-1} \mathbf{a}_3 = 0,$$

da cui, data l'arbitrarietà con la quale può essere scelto \mathbf{a}_3 linearmente indipendente da $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ risulta

$$c'_1 \mathbf{a}_1 + c'_2 \mathbf{a}_2 = 0$$

e di conseguenza $c'_1 = c'_2 = 0$ per essere $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ linearmente indipendenti.

Pertanto si può scrivere

$$\beta \mathbf{a}_3 = 0.$$

Così seguitando nel caso di c generico si arriva a concludere che risultando $I_{n-2c+1} \beta = 0$ si può determinare in corrispondenza della predetta radice complessa b uno spazio S_{2c} di direzioni nulle \mathbf{a} per l'omografia β .

Se poi $2c$ è proprio la caratteristica di β , essendo $I_{n-2c} \beta \neq 0$, ne consegue, ragionando al modo solito, che le dimensioni dello spazio di direzioni nulle \mathbf{a} per β non possono essere superiori a $2c$.

Se \mathbf{u} è un versore direzione nulla per β , posto col Burgatti ⁽¹⁾

$$(\gamma_1 \gamma_2 - p) \mathbf{u} = -q \mathbf{v},$$

risulta

$$(\gamma_1 \gamma_2 - p) \mathbf{v} = q \mathbf{u},$$

da cui

$$(\gamma_1 \gamma_2 - p)^2 \mathbf{v} + q^2 \mathbf{v} = 0,$$

ossia

$$\beta \mathbf{v} = 0.$$

Cosicchè \mathbf{v} , che per quanto mostrò il Burgatti è direzione unitaria, risulta pure un versore direzione nulla per β .

(1) Cfr. P. BURGATTI, « Boll. Un. Mat. It. », anno VII, 1928, p. 67.

Pertanto i $2c$ versori linearmente indipendenti che determinano l' S_{2c} di direzioni nulle per β , si presentano a coppie u, v per le quali si ha:

$$(4) \quad \begin{cases} \gamma_1 \gamma_2 u = pu - qv \\ \gamma_1 \gamma_2 v = pv + qu. \end{cases}$$

Del resto, con altro ragionamento, la dimostrazione precedente permette di affermare che la caratteristica $2c$ per β in corrispondenza della radice complessa $p + iq$, multipla di ordine c per $I_n(\gamma_1 \gamma_2 - x) = 0$, coincide con il rango dell'omografia degenerare $\beta = (\gamma_1 \gamma_2 - p)^2 + q^2$ ed allora applicando le definizioni e la conclusione della discussione di De Finetti⁽¹⁾, possiamo affermare che le direzioni primitive di β sono semplici. Ne consegue perciò ancora l'esistenza dei $2c$ vettori linearmente indipendenti che si presentano a coppie q_1, q_2 per i quali si ha:

$$\begin{aligned} \gamma_1 \gamma_2 q_1 &= p q_1 + q q_2 \\ \gamma_1 \gamma_2 q_2 &= p q_2 - q q_1, \end{aligned}$$

che coincidono con le relazioni scritte sopra, posto $q_1 = v$ e $q_2 = u$.

Meccanica. — *Sul problema dell'ala rotante.* Nota di E. PISTOLESI, presentata⁽²⁾ dal Socio G. A. CROCCO.

Il problema dell'ala rotante (problema piano) è stato preso in considerazione da vari autori, ma non risulta che ne sia stata data la soluzione in modo generale, supposta nota la funzione trasformatrice mediante la quale il profilo è dedotto dal cerchio per rappresentazione conforme. La presente Nota indica succintamente come si possa pervenire a tale soluzione, estendendola al caso più generale in un moto vario qualunque, purchè non si abbia variazione nella circolazione. È noto infatti che al variare della circolazione si ha un corrispondente distacco di vortici, la cui presenza complica notevolmente il problema.

1. Considerato adunque il profilo dato come trasformato del cerchio di raggio 1, determineremo al contorno di questo una distribuzione opportuna di sorgenti, in guisa da aversi al contorno del profilo una velocità normale uguale a quella proveniente dalla rotazione. Supporremo dapprima che la rotazione avvenga intorno al centro del profilo, giacchè se la rota-

(1) Cfr. loc. cit. in questa Nota, p. 414.

(2) Nella seduta del 5 aprile 1936.

zione avviene attorno ad un punto diverso è sufficiente aggiungere una traslazione.

Indichiamo con $z = x + iy$ il piano del profilo, con $\zeta = \xi + i\eta$ il piano del cerchio e sia:

$$(1) \quad z = \zeta + \sum_1^{\infty} \frac{a_n + ib_n}{\zeta^n}$$

la funzione trasformatrice. Supporremo cioè che questa sia sviluppabile nella serie (1) convergente in tutto il campo esterno al cerchio e sulla stessa circonferenza di raggio 1. Si ammette pure che tutti gli zeri della $dz/d\zeta$ siano interni al cerchio, salvo uno che si suppone sulla circonferenza nel punto corrispondente alla cuspidale del profilo.

La rotazione con velocità angolare Ω (positiva nel senso xy) produce in un punto x, y del profilo la velocità normale (positiva verso l'esterno):

$$v_n = \Omega x \cos(ny) - \Omega y \cos(nx)$$

ossia:

$$(2) \quad v_n = \Omega \left(-x \frac{dx}{ds} - y \frac{dy}{ds} \right) = -\frac{1}{2} \Omega \frac{d}{ds} (x^2 + y^2).$$

La velocità normale corrispondente sul cerchio sarà:

$$v'_n = v_n \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|.$$

Ora, posto $\zeta = e^{i\theta}$, si può scrivere:

$$\frac{d}{ds} = \frac{d}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds}$$

ma $\frac{d\theta}{ds} = \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|$, perciò:

$$(3) \quad v'_n = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} (x^2 + y^2).$$

Ora dalla (1), con calcoli che omettiamo, si deduce:

$$(4) \quad -\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} (x^2 + y^2) = \sum \alpha_r \sin r\theta + \sum \beta_r \cos r\theta$$

dove:

$$\alpha_r = r a_{r-1} + r \sum_n (a_n a_{n+r} + b_n b_{n+r})$$

$$\beta_r = -r b_{r-1} - r \sum_n (a_n b_{n+r} - b_n a_{n+r}).$$

Sostituendo nella (3) si ha:

$$(5) \quad v'_n = \Omega \left(\sum \alpha_r \sin r\theta + \sum \beta_r \cos r\theta \right).$$

Ora è noto che la velocità v'_n si ottiene disponendo al contorno del cerchio una distribuzione di sorgenti $\varepsilon(\theta)$ tale che:

$$\varepsilon = 2v'_n.$$

La velocità da esse indotta nel piano del cerchio, sia w'_2 , sarà ($w = v_x - iv_y$):

$$w'_2 = \frac{\Omega}{\pi} \sum \left\{ \alpha_r \int_0^{2\pi} \frac{\sin r\theta}{\zeta - e^{i\theta}} d\theta + \beta_r \int_0^{2\pi} \frac{\cos r\theta}{\zeta - e^{i\theta}} d\theta \right\}$$

da cui:

$$(6) \quad w'_2 = i\Omega \sum \frac{\alpha_r - i\beta_r}{\zeta^{r+1}}.$$

La velocità nel piano del profilo sarà data da:

$$(7) \quad w_2 = i\Omega \sum \frac{\alpha_r - i\beta_r}{\zeta^{r+1}} \cdot \frac{d\zeta}{d\chi}.$$

Supponiamo ora che il profilo ruoti intorno al punto $Z = X + iY = Re^{i\Delta}$.

Il moto del profilo si otterrà componendo una rotazione con velocità angolare Ω intorno al centro, che dà luogo alla velocità w_2 , con una traslazione di velocità $R\Omega$ e inclinazione $\Delta - \frac{\pi}{2}$. La velocità (assoluta) derivante da tale traslazione è data da:

$$(8) \quad w_1 = -iR\Omega \left(e^{-i\Delta} + \frac{e^{i\Delta}}{\zeta^2} \right) \frac{d\zeta}{d\chi} + iR\Omega e^{-i\Delta}.$$

Infine supponiamo attorno al profilo una corrente circolatoria con circuitazione Γ ; avremo allora da aggiungere anche una velocità w_3 :

$$(9) \quad w_3 = -\frac{i\Gamma}{2\pi\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\chi}.$$

In definitiva la velocità nel piano del profilo sarà:

$$(10) \quad w = w_1 + w_2 + w_3 = \left\{ -iR\Omega \left(e^{-i\Delta} + \frac{e^{i\Delta}}{\zeta^2} \right) + \right. \\ \left. + i\Omega \sum \frac{\alpha_r - i\beta_r}{\zeta^{r+1}} - i \frac{\Gamma}{2\pi\zeta} \right\} \frac{d\zeta}{d\chi} + iR\Omega e^{-i\Delta}.$$

La circuitazione Γ può essere determinata col criterio di Joukowski, che la velocità si mantenga finita allo spigolo. Se supponiamo che questo corrisponda al punto $\zeta = 1$ del cerchio, la suddetta condizione porta ad annullare l'espressione che nella (11) moltiplica $\frac{d\zeta}{d\chi}$ e ciò per $\zeta = 1$. Tenuto presente che nell'ipotesi fatta $\sum \beta_r = 0$, si trova facilmente:

$$(11) \quad \Gamma = -4\pi R\Omega \cos \Delta + 2\pi\Omega \sum \alpha_r$$

dove il primo termine rappresenta la circuitazione Γ_0 dovuta alla traslazione e il secondo il supplemento Γ_r proveniente dalla rotazione. Si vede cioè che nel calcolo della circuitazione occorre considerare come « velocità del profilo » quella del punto dell'asse x di ascissa $\frac{1}{2} \sum \alpha_r$.

Nel caso di profilo sottile piano o poco curvato $\frac{1}{2} \sum \alpha_r = \sim 1$ (punto ad $1/4 l$ dal bordo posteriore dell'ala). Si ha esattamente 1 per la lastra piana.

2. Per determinare le azioni dinamiche si può ricordare che in un moto permanente rispetto ad assi uniformemente rotanti vale la relazione:

$$\dot{p} = \text{cost.} - \frac{1}{2} \rho v_r^2 + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2$$

dove v_r indica la velocità relativa. Applicando tale relazione, si ha:

$$F_x + iF_y = \frac{1}{2} \rho \int_c (v_r^2 - \Omega^2 r^2) (dy - i dx).$$

Tenuto conto che il contorno c è linea di corrente per la v_r , con passaggi che per brevità omettiamo, si ottiene la seguente formula, dimostrata già dal Masotti (1):

$$(12) \quad F_x + iF_y = -\rho \Omega^2 (M_Y + iM_X) - \rho \Omega \int_c w \chi d\chi + \rho Z \Omega \int_c w d\chi$$

dove M_X e M_Y indicano i momenti statici della superficie racchiusa dal profilo rispetto ad assi paralleli all'asse x e all'asse y rispettivamente, condotti per il centro di rotazione Z .

(1) A. MASOTTI, *Una estensione delle formule di Blasius*. Questi « Rendiconti », aprile 1926. Il Masotti pone l'origine delle coordinate nel centro di rotazione; perciò per passare dalla formula di Masotti alla (12) occorre porre in quella $\chi - Z$ in luogo di χ .

Applicando la (12), tenendo pure conto delle relazioni seguenti, nelle quali M_{x_0} e M_{y_0} indicano i momenti statici rispetto agli assi x ed y per l'origine ed S l'area del profilo:

$$M_X = M_{x_0} - SY$$

$$M_Y = M_{y_0} - SX$$

$$M_{x_0} = -\pi \left\{ \sum \alpha_n b_n + \sum \beta_n \alpha_n + \beta_1 \right\}$$

$$M_{y_0} = \pi \left\{ -\sum \alpha_n a_n + \sum \beta_n b_n + \alpha_1 \right\}$$

$$S = \pi \left\{ 1 - \sum n (a_n^2 + b_n^2) \right\}$$

si ottiene:

$$(13) \quad F_x = \rho X \Omega \Gamma - \rho \Omega^2 M_Y + 2 \pi \rho \Omega^2 \left\{ -X (1 + a_1) - Y b_1 + \right. \\ \left. + \sum (a_n a_{n+1} + b_n b_{n+1}) \right\}$$

$$(14) \quad F_y = \rho Y \Omega \Gamma - \rho \Omega^2 M_X + 2 \pi \rho \Omega^2 \left\{ -X b_1 - Y (1 - a_1) + \right. \\ \left. + \sum (a_n b_{n+1} - b_n a_{n+1}) \right\}.$$

In queste espressioni il primo termine fornisce la portanza di Kutta-Joukowski relativa alla traslazione, il secondo rappresenta una forza centripeta, che potrebbe chiamarsi « archimedeo », gli altri termini esprimono il contributo proprio della rotazione.

Il momento M_0 rispetto al centro del profilo si trova facilmente pensando che, per considerazioni energetiche, la F passa per il centro di rotazione. Si ha perciò:

$$(15) \quad M_0 = -F_x Y + F_y X = \rho \Omega^2 [M_Y Y - M_X X + 4 a_1 X Y + \\ + 2 b_1 (Y^2 - X^2) - 2 \alpha_1 Y - 2 \beta_1 X].$$

3. Un risultato più generale di quello espresso dalle (13) e (14) può ottenersi calcolando l'azione dinamica come derivata rispetto al tempo della quantità di moto, quest'ultima ottenendosi a sua volta come integrale esteso al contorno del profilo del vettore $\rho \varphi n$, essendo φ il potenziale ed n il versore diretto normalmente al contorno stesso (verso l'esterno). Nella espressione di φ è noto che occorre astrarre dalla corrente circolatoria, l'effetto della quale si aggiunge infine in base al teorema di Kutta-Joukowski.

Sia la condizione di moto dell'ala caratterizzata dalle componenti v_x e v_y della velocità del centro del profilo e dalla velocità angolare Ω della rotazione attorno al centro stesso. Si ha:

$$(16) \quad \varphi = -2 v_x \cos \theta - 2 v_y \sin \theta - \Omega \left\{ \sum \frac{\alpha_r}{r} \sin r \theta + \sum \frac{\beta_r}{r} \cos r \theta \right\} + \\ + v_x x + v_y y.$$

Le componenti I_x ed I_y dell'impulso si calcolano facilmente:

$$I_x = \rho \int \varphi dy = \rho \int_0^{2\pi} \varphi \frac{dy}{d\theta} d\theta$$

$$I_y = -\rho \int \varphi dx = -\rho \int_0^{2\pi} \varphi \frac{dx}{d\theta} d\theta$$

e si ottiene:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} I_x &= \pi \rho v_x [2a_1 - 1 - \sum n(a_n^2 + b_n^2)] + 2\pi \rho b_1 v_y - \\ &\quad - \rho \Omega [\beta_1 - \sum \alpha_n b_n - \sum \beta_n a_n] \\ I_y &= 2\pi \rho b_1 v_x + \pi \rho v_y [-2a_1 - 1 - \sum n(a_n^2 + b_n^2)] - \\ &\quad - \rho \Omega [\alpha_1 + \sum \alpha_n a_n - \sum \beta_n b_n]. \end{aligned} \right.$$

Per avere l'azione dinamica $F_x + iF_y$ occorre effettuare la derivata dell'impulso $I = I_x + iI_y$ rispetto al tempo, tenendo conto, sia delle accelerazioni $a_x = dv_x/dt$, $a_y = dv_y/dt$ del moto traslatorio, sia della velocità angolare Ω e dell'accelerazione $\Omega' = d\Omega/dt$.

Ora mentre i termini provenienti dalle accelerazioni si ottengono semplicemente ponendo a_x , a_y e Ω' al posto di v_x , v_y e Ω rispettivamente, i termini provenienti dalla rotazione si ottengono osservando che la derivata di un vettore $A + iB$ fisso al profilo rotante è $i\Omega(A + iB)$ e che la derivata dal vettore $v_x(A + iB)$ deve tener conto della variazione di v_x , considerato l'asse x come fisso al profilo, ossia è: $iv_x\Omega(A + iB) + \Omega \frac{dv_x}{d\theta}(A + iB)$, dove, poichè generale $v_x = v_{x_0} \cos \theta + v_{y_0} \sin \theta$, si ha: $\frac{dv_x}{d\theta} = v_{y_0}$ (l'indice 0 indica la posizione iniziale per $\theta = 0$). In definitiva:

$$\Omega [-v_y A - v_x B + i(v_x A + v_y B)].$$

Analogamente dal vettore $v_y(A + iB)$ deriva $\Omega [-v_x A - v_y B + + i(v_y A - v_x B)]$.

Applicando tali concetti e aggiungendo i termini relativi alla circolazione, si ottiene:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} F_x &= -\rho v_y \Gamma + \rho a_x [2\pi(a_1 - 1) + S] + 2\pi \rho b_1 a_y + 4\pi \rho \Omega(a_1 v_y - b_1 v_x) \\ &\quad - \rho \Omega^2 (M_{y_0} - 2\pi \alpha_1) - \rho \Omega' (M_{x_0} + 2\pi \beta_1) \end{aligned} \right.$$

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} F_y &= \rho v_x \Gamma + 2\pi \rho b_1 a_x + \rho a_y [-2\pi(a_1 + 1) + S] + 4\pi \rho \Omega(a_1 v_x + b_1 v_y) \\ &\quad - \rho \Omega^2 (M_{x_0} + 2\pi \beta_1) + \rho \Omega' (M_{y_0} - 2\pi \alpha_1). \end{aligned} \right.$$

Queste formule sono applicabili al moto *comunque vario, purchè senza cambiamento nella circolazione*.

Si passa al caso della rotazione uniforme intorno al punto $X + iY$ ponendo $v_x = \Omega Y$, $v_y = -\Omega X$, $a_x = \Omega^2 X$, $a_y = \Omega^2 Y$ e si ottengono naturalmente la (13) e la (14).

Il metodo può essere esteso al caso in cui il profilo ruoti in presenza di vortici o sorgenti: in particolare di una sorgente o di una sorgente-vortice posta nel centro di rotazione, problema interessante le turbo-macchine a palettatura radiale.

Meccanica. — *Sugli archi elastici piani.* — II. *Direttrice rettilinea.* Nota di E. VOLTERRA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nella Nota precedente ⁽²⁾ ho stabilito le equazioni differenziali dell'equilibrio elastico vincolato per archi piani a curvatura qualsiasi. Giova discutere anzitutto il caso più semplice di travi a direttrice rettilinea, tanto più che, come mostrerò prossimamente, il caso generale di curvatura qualsiasi si può fare utilmente dipendere dalle formule risolutive del caso di direttrice rettilinea. Riferiamoci pertanto a tale caso, ponendo nelle equazioni generali delle deformazioni in assenza di forze esterne (equazioni [8] della Nota precedente) $c = 0$. Il sistema che definisce le quattro funzioni fondamentali $\lambda_x, \lambda_y, v_x, v_y$ si scinde nei due gruppi seguenti:

$$(1) \quad \begin{cases} k\lambda_x - 2(L + 2k)\rho \frac{d\rho}{dx} \frac{d\lambda_x}{dx} - (L + 2k)\rho^2 \frac{d^2\lambda_x}{dx^2} + k \frac{dv_y}{dx} = 0, \\ \frac{d\lambda_x}{dx} + \frac{d^2v_y}{dx^2} = 0; \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} (L + 2k)\lambda_y - 2\rho k \frac{d\rho}{dx} \frac{d\lambda_y}{dx} - k\rho^2 \frac{d^2\lambda_y}{dx^2} + L \frac{dv_x}{dx} = 0, \\ L \frac{d\lambda_y}{dx} + (L + 2k) \frac{d^2v_x}{dx^2} = 0 \end{cases}$$

dei quali il primo contiene soltanto λ_x, v_y il secondo λ_y, v_x .

Ricordiamo che le componenti dello spostamento sono nel nostro caso:

$$(3) \quad u_x = u_\lambda = \lambda_x y + v_x, \quad u_y = u_y = \lambda_y y + v_y,$$

(1) Nella seduta del 5 aprile 1936.

(2) Ved. «Rendiconti Lincei» della seduta del 15 marzo 1936.

e gli sforzi globali:

$$(4) \quad \begin{cases} N = A \left[L \lambda_y + (L + 2k) \frac{d\lambda_x}{dx} \right], \\ T = kA \left[\lambda_x + \frac{d\lambda_y}{dx} \right], \\ M = A (L + 2k) \rho^2 \frac{d\lambda_x}{dx}. \end{cases}$$

Se supponiamo un carico (ripartito) normale alla fibra media della trave, di intensità $q = q(x)$, le λ_y, v_x sono identicamente nulle; e le equazioni corrispondenti alle (1) contengono in più il termine proveniente dalle forze esterne. Per fissare le idee sul caso più comune supponiamo in primo luogo lo spessore costante. Abbiamo allora

$$(1') \quad \begin{cases} k\lambda_x - (L + 2k) \rho^2 \frac{d^2\lambda_x}{dx^2} + k \frac{d\lambda_y}{dx} = 0, \\ \frac{d\lambda_x}{dx} + \frac{d^2v_y}{dx^2} = -\frac{q(x)}{kA}. \end{cases}$$

Integrando queste equazioni (lineari, a coefficienti costanti, di cui una a secondo membro variabile) col metodo delle variazioni delle costanti arbitrarie, otteniamo

$$\begin{aligned} \lambda_x &= \frac{kA_1}{2(L + 2k)\rho^2} x^2 + \frac{A_2}{\rho^2} x + A_3, \\ v_y &= -\frac{kA_1}{6(L + 2k)\rho^2} x^3 - \frac{A_2}{2\rho^2} x^2 - A_3 x + A_4 x + A_4, \end{aligned}$$

essendo:

$$(5) \quad \begin{cases} A_1 = -\frac{I}{kA} \int_0^x q(x) dx + C_1, \\ A_2 = \frac{I}{(L + 2k)A} \int_0^x xq(x) dx + C_2, \\ A_3 = -\frac{I}{2(L + 2k)I} \int_0^x x^2 q(x) dx + C_3, \\ A_4 = -\frac{I}{6(L + 2k)I} \int_0^x x^3 q(x) dx + \frac{I}{kA} \int_0^x xq(x) dx + C_4, \end{cases}$$

e C_1, C_2, C_3, C_4 le quattro costanti arbitrarie d'integrazione i cui valori vanno determinati in base alle condizioni agli estremi della trave. Nel tradurre in formule queste condizioni, indicheremo con 2λ la lunghezza della trave, con I il momento d'inerzia della sezione, per ipotesi costante, assumendo l'origine in mezzzeria. Supponiamo dapprima un carico ripartito sulla trave: $q = \text{cost.}$ Dalle (5) discendono immediatamente le

$$A_1 = -\frac{qx}{kA} + C_1, \quad A_2 = \frac{qx^2}{2(L+2k)A} + C_2,$$

$$A_3 = -\frac{qx^3}{6(L+2k)I} + C_3, \quad A_4 = -\frac{qx^4}{24(L+2k)I} + \frac{qx^2}{2kA} + C_4.$$

Se la trave è incastrata da ambedue le estremità, con che deve essere, per $x = \pm \lambda$, $\lambda_x = v_y = 0$, abbiamo

$$C_1 = C_3 = 0, \quad C_2 = \frac{q\lambda^2}{6(L+2k)A}, \quad C_4 = \frac{q\lambda^4}{24(L+2k)I} + \frac{q\lambda^2}{2kA}.$$

Le componenti dello spostamento saranno, in base alle (3):

$$(6) \quad \begin{cases} U_\xi = -y \left[\frac{qx^3}{6(L+2k)I} - \frac{qx\lambda^2}{6(L+2k)I} \right] \\ U_\eta = \frac{qx^4}{24(L+2k)I} - \frac{qx^2\lambda^2}{12(L+2k)I} + \frac{q\lambda^4}{24(L+2k)I} - \frac{qx^2}{2kA} + \frac{q\lambda^2}{2kA} \end{cases}$$

donde la freccia massima:

$$Y_{(x=0)} = \frac{q\lambda^4}{24(L+2k)I} + \frac{q\lambda^2}{2kA} = \frac{ql^4}{384(L+2k)I} + \frac{ql^2}{8kA}$$

($l = 2\lambda$ lunghezza della trave).

Le (4) forniscono per gli sforzi globali

$$N = 0, \quad M = \frac{ql^2}{24} - \frac{qx^2}{2}, \quad T = -qx,$$

mentre gli sforzi locali sono:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I}, \quad \tau_{xy} = \frac{T}{A}.$$

Per passare dal caso testè trattato di un carico ripartito, al caso di un carico concentrato in una sezione $x = \chi$ della trave, basta supporre $q(x) = 0$, tranne che in un piccolo intorno 2τ del punto χ , passando poi al limite

in modo ben noto. Ove si indichi con Q l'intensità del carico concentrato, si trova:

per $x < \chi$:

$$A_1 = \bar{C}_1,$$

$$A_2 = C_2,$$

$$A_3 = C_3,$$

$$A_4 = C_4.$$

per $x > \chi$:

$$A_1 = -\frac{Q}{kA} + C_1,$$

$$A_2 = \frac{Q\chi}{(L+2k)A} + C_2,$$

$$A_3 = -\frac{Q\chi^2}{2(L+2k)I} + C_3,$$

$$A_4 = -\frac{Q\chi^3}{6(L+2k)I} + \frac{Q\chi}{kA} + C_4.$$

Saranno perciò le funzioni λ_x e v_y :

per $x < \chi$:

$$\lambda_x = \frac{kC_1}{2(L+2k)\rho^2}x^2 + \frac{C_2}{\rho^2}x + C_3,$$

$$v_y = -\frac{kC_1}{6(L+2k)\rho^2}x^3 - \frac{C_2}{2\rho^2}x^2 - C_3x + C_1x + C_4;$$

per $x > \chi$:

$$\lambda_x = \frac{kC_1}{2(L+2k)\rho^2}x^2 + \frac{C_2}{\rho^2}x + C_3 - \frac{Q}{2(L+2k)I}x^2 + \frac{Q\chi x}{(L+2k)I} - \frac{Q\chi^2}{2(L+2k)I},$$

$$v_y = -\frac{kC_1}{6(L+2k)\rho^2}x^3 - \frac{C_2}{2\rho^2}x^2 - C_3x + C_1x + C_4 + \frac{Q}{6(L+2k)I}x^3 - \\ - \frac{Q\chi}{2(L+2k)I}x^2 + \frac{Q\chi^2}{2(L+2k)I}x - \frac{Q\chi^3}{6(L+2k)I} - \frac{Qx}{kA} + \frac{Q\chi}{kA}.$$

Seguitando a supporre la trave incastrata ad ambedue le estremità, otteniamo per le quattro costanti i valori seguenti:

$$C_1 = \frac{3(L+2k)\rho^2}{2k\lambda^2 + 6(L+2k)\rho^2} \left[\frac{Q\lambda^2}{3(L+2k)I} - \frac{Q\lambda\chi}{2(L+2k)I} + \frac{Q\chi^3}{6(L+2k)I} + \frac{Q}{kA} - \frac{Q\chi}{kA\lambda} \right],$$

$$C_2 = \frac{Q\lambda}{4(L+2k)A} - \frac{Q\chi}{2(L+2k)A} + \frac{Q\chi^2}{4(L+2k)A\lambda},$$

$$C_3 = \frac{Q\lambda^2}{4(L+2k)I} - \frac{Q\chi\lambda}{2(L+2k)I} + \frac{Q\chi^2}{4(L+2k)I} -$$

$$- \frac{3k\lambda}{4k\lambda^2 + 12(L+2k)\rho^2} \left[\frac{Q\lambda^3}{3(L+2k)I} - \frac{Q\chi\lambda^2}{2(L+2k)I} + \frac{Q\chi^3}{6(L+2k)I} + \frac{Q\lambda}{kA} - \frac{Q\chi}{kA} \right],$$

$$C_4 = \frac{Q\lambda^3}{24(L+2k)I} - \frac{Q\lambda\chi^2}{8(L+2k)I} + \frac{Q\chi^3}{12(L+2k)I} + \frac{Q\lambda}{2kA} - \frac{Q\chi}{2kA}.$$

Le componenti dello spostamento elastico assumono in conformità le espressioni:

per $x < \chi$:

$$U_{\xi} = \frac{3kx^2y}{4k\lambda^2 + 12(L+2k)\rho^2} \left[\frac{Q\lambda^2}{3(L+2k)I} - \frac{Q\chi\lambda}{2(L+2k)I} + \frac{Q\chi^3}{6(L+2k)\lambda I} + \frac{Q}{kA} - \frac{Q\chi}{kA\lambda} \right] +$$

$$+ \frac{Q\lambda xy}{4(L+2k)I} - \frac{Q\chi xy}{2(L+2k)I} + \frac{Q\chi^2 xy}{4(L+2k)A\lambda} + \frac{Q\lambda^2 y}{4(L+2k)I} - \frac{Q\chi\lambda y}{2(L+2k)I} + \frac{Q\chi^2 y}{4(L+2k)I} -$$

$$- \frac{3k\lambda y}{4k\lambda^2 + 12(L+2k)\rho^2} \left[\frac{Q\lambda^3}{3(L+2k)I} - \frac{Q\chi\lambda^2}{2(L+2k)I} + \frac{Q\chi^3}{6(L+2k)I} + \frac{Q\lambda}{kA} - \frac{Q\chi}{kA} \right],$$

$$U_{\eta} = - \frac{kx^3}{4k\lambda^2 + 12(L+2k)\rho^2} \left[\frac{Q\lambda^2}{3(L+2k)I} - \frac{Q\chi\lambda}{2(L+2k)I} + \frac{Q\chi^3}{6(L+2k)\lambda I} + \frac{Q}{kA} - \frac{Q\chi}{kA\lambda} \right] -$$

$$- \frac{Q\lambda x^2}{8(L+2k)I} + \frac{Q\chi x^2}{4(L+2k)I} - \frac{Q\chi^2 x^2}{8(L+2k)\rho^2\lambda} - \frac{Q\lambda^2 x}{4(L+2k)I} + \frac{Q\chi\lambda x}{2(L+2k)I} - \frac{Q\chi^2 x}{4(L+2k)I} +$$

$$+ \frac{3k\lambda x}{4k\lambda^2 + 12(L+2k)\rho^2} \left[\frac{Q\lambda^3}{3(L+2k)I} - \frac{Q\chi\lambda^2}{2(L+2k)I} + \frac{Q\chi^3}{6(L+2k)I} + \frac{Q\lambda}{kA} - \frac{Q\chi}{kA} \right] +$$

$$+ \frac{3(L+2k)\rho^2 x}{2k\lambda^2 + 6(L+2k)\rho^2} \left[\frac{Q\lambda^2}{3(L+2k)I} - \frac{Q\chi\lambda}{2(L+2k)I} + \frac{Q\chi^3}{6(L+2k)\lambda I} + \frac{Q}{kA} - \frac{Q\chi}{kA\lambda} \right] +$$

$$+ \frac{Q\lambda^3}{24(L+2k)I} - \frac{Q\lambda\chi^2}{8(L+2k)I} + \frac{Q\chi^3}{12(L+2k)I} + \frac{Q\lambda}{2kA} - \frac{Q\chi}{2kA},$$

e per $x > \chi$:

$$U_{\xi} = \frac{3kx^2y}{4k\lambda^2 + 12(L+2k)\rho^2} \left[- \frac{Q\lambda^2}{3(L+2k)I} - \frac{Q\chi\lambda}{2(L+2k)I} + \frac{Q\chi^3}{6(L+2k)\lambda I} - \frac{Q}{kA} + \frac{Q\chi}{kA\lambda} \right] +$$

$$+ \frac{Q\lambda xy}{4(L+2k)I} + \frac{Q\chi xy}{2(L+2k)I} + \frac{Q\chi^2 xy}{4(L+2k)A\lambda} + \frac{Q\lambda^2 y}{4(L+2k)I} - \frac{Q\chi\lambda y}{2(L+2k)I} - \frac{Q\chi^2 y}{4(L+2k)I} -$$

$$- \frac{3k\lambda y}{4k\lambda^2 + 12(L+2k)\rho^2} \left[\frac{Q\lambda^3}{3(L+2k)I} - \frac{Q\chi\lambda^2}{2(L+2k)I} + \frac{Q\chi^3}{6(L+2k)I} + \frac{Q\lambda}{kA} - \frac{Q\chi}{kA} \right],$$

$$U_{\eta} = - \frac{kx^3}{4k\lambda^2 + 12(L+2k)\rho^2} \left[- \frac{Q\lambda^2}{3(L+2k)I} - \frac{Q\chi\lambda}{2(L+2k)I} + \frac{Q\chi^3}{6(L+2k)\lambda I} - \frac{Q}{kA} + \frac{Q\chi}{kA\lambda} \right] -$$

$$- \frac{Q\lambda x^2}{8(L+2k)I} - \frac{Q\chi x^2}{4(L+2k)I} - \frac{Q\chi^2 x^2}{8(L+2k)\rho^2\lambda} - \frac{Q\lambda^2 x}{4(L+2k)I} + \frac{Q\chi\lambda x}{2(L+2k)I} + \frac{Q\chi^2 x}{4(L+2k)I} +$$

$$+ \frac{3k\lambda x}{4k\lambda^2 + 12(L+2k)\rho^2} \left[\frac{Q\lambda^3}{3(L+2k)I} - \frac{Q\chi\lambda^2}{2(L+2k)I} + \frac{Q\chi^3}{6(L+2k)I} + \frac{Q\lambda}{kA} - \frac{Q\chi}{kA} \right] +$$

$$+ \frac{3(L+2k)\rho^2 x}{2k\lambda^2 + 6(L+2k)\rho^2} \left[- \frac{Q\lambda^2}{3(L+2k)I} - \frac{Q\chi\lambda}{2(L+2k)I} + \frac{Q\chi^3}{6(L+2k)\lambda I} - \frac{Q}{kA} + \frac{Q\chi}{kA\lambda} \right] +$$

$$+ \frac{Q\lambda^3}{24(L+2k)I} - \frac{Q\lambda\chi^2}{8(L+2k)I} - \frac{Q\chi^3}{12(L+2k)I} + \frac{Q\lambda}{2kA} + \frac{Q\chi}{2kA}.$$

La linea d'influenza della freccia della fibra media nella sezione $x=0$ (mezzeria) ha per equazione:

$$y = \frac{Q\lambda^3}{24(L+2k)I} - \frac{Q\lambda\chi^2}{8(L+2k)I} + \frac{Q\chi^3}{12(L+2k)I} + \frac{Q\lambda}{2kA} - \frac{Q\chi}{2kA} \text{ per } \chi > 0,$$

$$y = \frac{Q\lambda^3}{24(L+2k)I} - \frac{Q\lambda\chi^2}{8(L+2k)I} - \frac{Q\chi^3}{12(L+2k)I} + \frac{Q\lambda}{2kA} + \frac{Q\chi}{2kA} \text{ per } \chi < 0.$$

La freccia massima si avrà in tale sezione mediana allorchè vi insiste il carico ($\chi = 0$). Segue pertanto (dall'una e dall'altra delle due equazioni scritte):

$$y_{\max} = \frac{Q\lambda^3}{24(L+2k)I} + \frac{Q\lambda}{2kA} = \frac{Ql^3}{192(L+2k)I} + \frac{Ql}{4kA}.$$

Le linee d'influenza del momento flettente e dello sforzo di taglio nella sezione $x=0$ sono:

$$M_{x=0} = \frac{Q\lambda}{4} - \frac{Q\chi}{2} + \frac{Q\chi^2}{4\lambda} \quad \text{per } \chi > 0,$$

$$M_{x=0} = \frac{Q\lambda}{4} + \frac{Q\chi}{2} + \frac{Q\chi^2}{4\lambda} \quad \text{per } \chi < 0;$$

$$T_{x=0} = \frac{3k(L+2k)I}{2k\lambda^2 + 6(L+2k)\rho^2} \left[\frac{Q\lambda^2}{3(L+2k)I} - \frac{Q\lambda\chi}{2(L+2k)I} + \frac{Q\chi^3}{6(L+2k)\lambda I} + \frac{Q}{kA} - \frac{Q\chi}{kA\lambda} \right] \quad \text{per } \chi > 0,$$

$$T_{x=0} = \frac{3k(L+2k)I}{2k\lambda^2 + 6(L+2k)\rho^2} \left[-\frac{Q\lambda^2}{3(L+2k)I} - \frac{Q\lambda\chi}{2(L+2k)I} + \frac{Q\chi^3}{6(L+2k)\lambda I} - \frac{Q}{kA} + \frac{Q\chi}{2A\lambda} \right] \quad \text{per } \chi < 0.$$

Se il carico insiste nella sezione mediana ($\chi = 0$), si ha in particolare $M = \frac{Q\lambda}{4} = \frac{Ql}{8}$, mentre lo sforzo di taglio tende a $\pm \frac{Q}{2}$ secondo che χ tende a zero dalla destra o dalla sinistra.

Il caso di trave a direttrice rettilinea, ma di spessore s variabile (purchè gradualmente in modo che $\frac{d\rho}{dx}$ si possa considerare come una quantità del primo ordine) si può trattare in maniera perfettamente analoga. In particolare, supponendo che la dipendenza dello spessore, e quindi del raggio di inerzia, dalla x sia del tipo $s = s_0 \left(1 + \epsilon \frac{x^2}{\lambda^2} \right)$, con s_0 ed ϵ costanti (ciò ci servirà particolarmente in seguito nello studio degli archi a spessore variabile), si trova:

$$(7) \begin{cases} \lambda_x = \frac{kA_1}{(L+2k)\rho_0^2} \left(\frac{x^2}{2} - \varepsilon \frac{x^4}{2\lambda^2} \right) + \frac{A_2}{\rho_0^2} \left(x - \varepsilon \frac{2x^3}{3\lambda^2} \right) + A_3, \\ v_y = -\frac{kA_1}{(L+2k)\rho_0^2} \left(\frac{x^3}{6} - \varepsilon \frac{x^5}{10\lambda^2} \right) - \frac{A_2}{\rho_0^2} \left(\frac{x^2}{2} - \varepsilon \frac{x^4}{6\lambda^2} \right) - A_3x + A_1x + A_4, \end{cases}$$

essendo

$$(8) \begin{cases} A_1 = -\frac{I}{kA_0} \int_0^x q(x) dx + C_1, \\ A_2 = \frac{I}{(L+2k)A_0} \int_0^x xq(x) dx + C_2, \\ A_3 = -\frac{I}{(L+2k)I_0} \int_0^x q(x) \left[\frac{x^2}{2} - \varepsilon \frac{x^4}{6\lambda^2} \right] dx + C_3, \\ A_4 = -\frac{I}{(L+2k)I_0} \int_0^x q(x) \left[\frac{x^3}{6} - \varepsilon \frac{x^5}{10\lambda^2} \right] dx + \frac{I}{kA_0} \int_0^x xq(x) dx + C_4, \end{cases}$$

dalle quali espressioni si possono ovviamente esplicitare tutte le formule che corrispondono ai vari tipi di carico e di condizioni ai limiti.

Meccanica. — *Sugli archi elastici piani.* — III. *Direttrice qualsiasi.* Nota di E. VOLTERRA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Il momento delle quantità di moto del Sistema Planetario e l'ipotesi cosmogonica di Laplace.* Nota di L. GIALANELLA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. ARMELLINI.

1. Recentemente il prof. G. Armellini ⁽²⁾ ha mostrato come una delle principali obiezioni che si muovevano contro la teoria cosmogonica di Laplace — e precisamente quella che sosteneva l'impossibilità della formazione del primo anello (corrispondente a Nettuno) dalla originaria nebulosa, poichè secondo il Poincaré ⁽³⁾ il valore minimo necessario per la densità dell'anello sarebbe stato tanto grande da far risultare la massa totale della nebulosa di gran lunga superiore a quella del Sole attuale — debba invece considerarsi del tutto eliminata, essendo il Poincaré incorso in un errore di calcolo.

È noto infatti dalla teoria delle figure di equilibrio che il valore minimo ρ_m della densità perchè l'anello possa formarsi è dato da:

$$(1) \quad \rho_m = \frac{\omega^2}{2\pi f}$$

essendo ω la velocità angolare di rotazione della nebulosa e f il coefficiente attrattivo. Ora, esso è risultato all'Armellini:

$$(2) \quad \rho_m = 3.488 \cdot 10^{-12} \quad [\text{nel sistema c. g. s.}]$$

per cui, assumendo come densità della nebulosa presolare questo valore minimo ρ_m , la massa della nebulosa stessa (di forma ellissoidica rotonda e con semiasse polare minore di quello equatoriale) sarebbe stata molto inferiore alla massa attuale del Sole, e non « *très supérieure* », come riteneva a torto il Poincaré. Ne segue che la densità media dell'antica nebulosa presolare può essere stata superiore a ρ_m , come appunto occorre nella ipotesi di Laplace.

Tolta così quest'obiezione fondamentale, per consiglio del mio Maestro, il prof. G. Armellini, ho rivolto la mia attenzione al fatto che — per un noto teorema di Meccanica — qualunque possano essere state le trasformazioni e le evoluzioni del Sistema Solare, il *momento delle quantità di moto* si è necessariamente mantenuto *costante*. Ricordiamo anzi che tale considerazione servì nel secolo scorso al fisico francese Babinet per formulare quella che

(1) Nella seduta del 5 aprile 1936.

(2) G. ARMELLINI, *Un'erronea obiezione contro l'ipotesi cosmogonica di Laplace*. Questi « Rendiconti », 1936, sem. I.

(3) H. POINCARÉ, *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*. Paris, 1913, p. 23,

egli ritenne la maggiore obbiezione alla teoria nebulare di Laplace. Il Babinet infatti, nel 1861, interpretando l'ipotesi laplaciana nel senso che il Sole sia stato in origine dilatato fino a riempire le orbite degli attuali pianeti (come una nebula di densità *uniforme*), ha voluto calcolare quale sarebbe stata la velocità di rotazione della nebulosa così costituita qualora si fosse conservato inalterato il momento della quantità di moto; e ha trovato che, anche se il Sole si fosse esteso soltanto fino all'orbita della Terra (sempre formando una nebulosa di densità *costante*), il tempo di rotazione sarebbe stato di 3181 anni!

Questa conclusione — a cui il See ⁽¹⁾ dette il nome di *criterio di Babinet* — fu confermata ⁽²⁾ anche dal Fouché nel 1884 ed il See stesso credette scorgervi una prova decisiva contro la teoria di Laplace, dimenticando completamente che tutto il calcolo poggiava sopra l'ipotesi che la nebula presolare avesse avuto *densità uniforme* in tutta la sua estensione e forma quasi sferica.

Tale evidente esagerazione del See è stata combattuta vivamente dall'André nel 1912 ⁽³⁾. L'André ha anzitutto ricordato come lo stesso Laplace ritenesse necessaria l'ipotesi di uno schiacciamento e di una condensazione centrale della sua nebulosa, e poi ha accennato, per quanto vagamente, alla possibilità di conservare inalterato il momento delle quantità di moto, purché si supponga un valore sufficientemente tenue della densità nelle regioni estreme. Ma egli non ha tenuto conto della limitazione imposta a questa densità dalla (1), la quale obbliga la densità periferica a non scendere al di sotto di un certo limite, nè tale limitazione era stata sin qui esaminata da altri.

Io ho voluto quindi in questo lavoro riprendere per intero il problema coll'esaminare esattamente se sia possibile conservare inalterato il momento delle quantità di moto quando la nebulosa abbia la massa dell'intero Sistema Solare, abbia un diametro equatoriale eguale a quello dell'orbita di Nettuno, sia in rotazione con velocità angolare ω eguale al moto medio di Nettuno stesso ed abbia inoltre una densità *mai minore* della minima necessaria, secondo la (1).

Ho cominciato, pertanto, col calcolare in forma precisa il momento delle quantità di moto dell'attuale Sistema Solare. Ho supposto poi che la nebula presolare abbia avuto inizialmente la forma di un ellissoide di rivoluzione molto schiacciato — come appunto crede Laplace — con semiasse maggiore uguale alla distanza media di Nettuno, e sia stata costituita da un nucleo centrale avente il volume e la densità dell'attuale Sole e da una ma-

(1) M. T. J. J. SEE, *Researches on the Evolution of the Stellar Systems*, vol. II: *The capture Theory of Cosmical Evolution*, Lynn, Mass. U. S. A. Thos. P. Nichols and Sons. Paris, Hermann, 1910.

(2) « C. R. Ac. des Sciences ». Paris, to. 99, 1884.

(3) CH. ANDRÉ, *L'hypothèse nébulaire de Laplace et la théorie de la capture de M. T. J. J. See*, in « Scientia », vol. XI, 1912. Bologna, Zanichelli.

teria riempiente la restante parte dell'ellissoide con densità uguale alla minima ρ_m determinata dall'Armellini. Mi son proposto, quindi, innanzi tutto di verificare la possibilità di tale ipotesi, e poi di determinare lo *spessore* che la nebulosa stessa ha potuto avere e che evidentemente doveva, in ogni caso, risultare maggiore del diametro attuale del Sole.

2. A tale scopo consideriamo il Sistema Solare costituito dal Sole e dai Pianeti Mercurio, Venere, Terra, Marte, Giove, Saturno, Urano, Nettuno, nonchè dallo sciame degli Asteroidi, di cui la massa complessiva si può supporre — con buona approssimazione — pari a quella di Marte. L'ipotesi è abbastanza prossima al vero, come ha fatto osservare anche l'Armellini, dato che l'ultimo pianeta Plutone (del resto di massa assai piccola) si deve piuttosto considerare come un satellite sfuggito all'attrazione di Nettuno; nè produce errori sensibili l'aver supposto — come facciamo — le orbite dei Pianeti circolari e l'aver tralasciato la considerazione dei Satelliti.

Il momento delle quantità di moto dell'intero sistema è allora uguale alla somma del momento delle quantità di moto dovuto alla rotazione del Sole intorno al suo asse e da quello risultante dalla rivoluzione dei Pianeti intorno al Sole, essendo del tutto trascurabile il momento dovuto alla rotazione di ognuno dei Pianeti intorno al proprio asse. Diciamo ω_0 la velocità angolare del Sole (per cui prendiamo il valore $\frac{2\pi}{26^d,2}$ medio tra la velocità polare e quella equatoriale), I_0 il suo momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione (supposto il Sole sferico ed omogeneo), m_i le masse dei singoli Pianeti, r_i i raggi delle orbite (uguali alle distanze medie dal Sole), T_i i tempi di rivoluzione e v_i le velocità orbitali: risulterà il momento delle quantità di moto totale espresso da:

$$(3) \quad K = K_0 + \Sigma K_i = I_0 \omega_0 + \Sigma m_i v_i r_i = I_0 \omega_0 + 2\pi \Sigma \frac{m_i r_i^2}{T_i}$$

la sommatoria dovendosi intendere estesa a tutti i pianeti da Mercurio a Nettuno. Come abbiamo detto, sostituiamo al gruppo degli Asteroidi un'unica massa pari a quella di Marte, posta ad una distanza media tra Marte e Giove, e rotante intorno al Sole col periodo che ad essa competerebbe in virtù della terza legge di Keplero.

Per tener conto poi delle mutue inclinazioni (sia pure piccole) delle orbite planetarie, notiamo che il vettore momento delle quantità di moto del Sistema Solare è normale ad un piano determinato da Laplace (e coincidente presso a poco con quello dell'orbita di Giove) e detto *piano invariabile*. Chiameremo quindi φ_i le inclinazioni delle orbite dei singoli pianeti sul piano invariabile (calcolate da Psilander⁽¹⁾) e proietteremo quindi il

(1) C. L. CHARLIER, *Mechanik des Himmels*, vol. I. Leipzig, Veit, 1902.

momento della quantità di moto di ciascun pianeta (rappresentato da un vettore normale al piano della propria orbita) sulla normale al piano invariabile. Posto allora nella (3):

$$(4) \quad \lambda_i = \frac{m_i r_i^2}{T_i}$$

avremo in definitiva:

$$(5) \quad K = I_0 \omega_0 + 2 \pi \sum \lambda_i \cos \varphi_i.$$

Intanto, per il Sole, essendo:

la massa $M = 1.983 \cdot 10^{33}$ grammi

il raggio $R = 6.953 \cdot 10^{10}$ centimetri

la velocità angolare $\omega_0 = 2.776 \cdot 10^{-6}$

il momento d'inerzia $I_0 = 3.835 \cdot 10^{54}$

risulta il momento della quantità di moto:

$$(6) \quad K_0 = 1.0645 \cdot 10^{49} \quad (\text{nel sistema c. g. s.}).$$

Raccogliamo poscia nella seguente tabella gli elementi usati per il calcolo dei K_i , dandone nell'ultima colonna i risultati (sempre nel sistema c. g. s.).

Pianeta	m_i (in grammi)	r_i (in centimetri)	T_i (in secondi)	φ_i	λ_i	K_i
Mercurio . .	$2.478 \cdot 10^{26}$	$5.785 \cdot 10^{12}$	$7.601 \cdot 10^6$	$60^{\circ} 20' 58''$	$1.091 \cdot 10^{45}$	$6.852 \cdot 10^{45}$
Venere . . .	$4.836 \cdot 10^{27}$	$1.081 \cdot 10^{13}$	$1.941 \cdot 10^7$	$2 \ 11 \ 15$	$2.911 \cdot 10^{46}$	$1.829 \cdot 10^{47}$
Terra	$5.966 \cdot 10^{27}$	$1.495 \cdot 10^{13}$	$3.156 \cdot 10^7$	$1 \ 35 \ 19$	$4.225 \cdot 10^{46}$	$2.654 \cdot 10^{47}$
Marte	$6.428 \cdot 10^{26}$	$2.228 \cdot 10^{13}$	$5.936 \cdot 10^7$	$1 \ 40 \ 43$	$5.615 \cdot 10^{45}$	$3.527 \cdot 10^{46}$
Asteroidi . .	$6.428 \cdot 10^{26}$	$5.027 \cdot 10^{13}$	$1.944 \cdot 10^8$	—	$8.356 \cdot 10^{45}$	$5.248 \cdot 10^{46}$
Giove	$1.894 \cdot 10^{30}$	$7.776 \cdot 10^{13}$	$3.744 \cdot 10^8$	$0 \ 19 \ 54$	$3.059 \cdot 10^{49}$	$1.921 \cdot 10^{50}$
Saturno . . .	$5.667 \cdot 10^{29}$	$1.426 \cdot 10^{14}$	$9.297 \cdot 10^8$	$0 \ 55 \ 49$	$1.240 \cdot 10^{49}$	$7.788 \cdot 10^{49}$
Urano	$8.755 \cdot 10^{28}$	$2.868 \cdot 10^{14}$	$2.652 \cdot 10^9$	$1 \ 01 \ 50$	$2.716 \cdot 10^{48}$	$1.706 \cdot 10^{49}$
Nettuno . . .	$1.025 \cdot 10^{29}$	$4.494 \cdot 10^{14}$	$5.200 \cdot 10^9$	$0 \ 43 \ 25$	$3.980 \cdot 10^{48}$	$2.500 \cdot 10^{49}$

Il momento delle quantità di moto di tutti i Pianeti è allora:

$$(7) \quad \Sigma K_i = 3.127 \cdot 10^{50}.$$

e quello totale dell'intero Sistema Solare, nel sistema c. g. s.:

$$(8) \quad K = 3.234 \cdot 10^{50}.$$

3. Ciò posto, consideriamo la nebulosa presolare di Laplace di forma ellissoidica rotonda, avente il semiasse maggiore uguale al raggio a dell'orbita di Nettuno e quello minore uguale a ha , essendo h un numero che dovrà essere determinato in modo opportuno. Questa nebulosa abbia nell'interno un nucleo sferico della massa e delle dimensioni dell'attuale Sole e tutt'intorno una materia omogenea di densità uguale alla ρ_m stabilita dall'Armellini come valore minimo della densità perchè sia possibile la formazione e la stabilità del primo anello che dette origine al pianeta Nettuno. Supponiamo infine che questa nebulosa ruoti intorno all'asse minore come un corpo rigido con velocità angolare uguale a quella orbitale di Nettuno. Determiniamo poi di essa il momento delle quantità di moto rispetto all'asse di rotazione, e, uguagliatolo a quello testè trovato per l'attuale Sistema Solare, avendo assunto come parametro incognito h , facciamo vedere innanzi tutto che h risulta minore di uno, verificando così *a posteriori* la possibilità dell'esistenza della nebulosa laplaciana. Il valore di h così ottenuto permette poi di assegnare il limite massimo per il semiasse minore della nebulosa stessa, limite che risulta uguale a 16,15 volte il raggio del Sole attuale.

Il momento delle quantità di moto della nebulosa si può considerare come somma del momento dovuto alla rotazione di tutto l'ellissoide di densità ρ_m e del momento dovuto alla rotazione del nucleo interno. Le velocità angolari di queste rotazioni sono le medesime, entrambe pari a quella di Nettuno. Risulta allora:

$$(9) \quad K_{NEB.} = I_0 \omega_N + I_N \omega_N$$

essendo I_0 il momento d'inerzia del Sole rispetto all'asse di rotazione, I_N quello della nebulosa ellissoidica rispetto all'asse minore, e ω_N la velocità angolare di Nettuno. I_0 è stato già determinato, poi:

$$I_N = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 h \cdot a^2 \cdot \rho_m = \frac{8}{15} \pi a^5 \cdot \rho_m h,$$

avendosi:

$$a = 4.494 \cdot 10^{14}$$

$$\omega_N = 1.209 \cdot 10^{-9}.$$

Risulta:

$$I_0 \omega_N = 4.640 \cdot 10^{45}$$

$$I_N \omega_N = 1.295 \cdot 10^{53} \cdot h.$$

Uguagliando allora il valore K_{NEB} a quello K dell'attuale Sistema Solare si ha:

$$1.295 \cdot 10^{53} h + 4.640 \cdot 10^{45} = 3.234 \cdot 10^{50}$$

da cui:

$$(10) \quad \boxed{h = 2.497 \cdot 10^{-3}}.$$

Si ricava quindi come valore *massimo* del semiasse minore della nebulosa presolare:

$$(11) \quad \boxed{b = ha = 1.123 \cdot 10^{12}}$$

ossia 16,15 volte il raggio dell'attuale Sole. In conseguenza *il teorema meccanico della conservazione del momento delle quantità di moto è perfettamente compatibile con l'ipotesi di Laplace*, purchè si ammetta — come del resto fa lo stesso Laplace — che la nebulosa presolare abbia avuto uno schiacciamento abbastanza forte e precisamente uno schiacciamento tale che il suo spessore massimo sia stato soltanto sedici volte maggiore del raggio del nostro Sole.

Fisica (Matematica). — *Sulla viscosità dei gas*. Nota di P. GUARESCHI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Se le leggi che regolano la variazione della viscosità dei gas con la temperatura non sono ben definite per tutti i gas anche perchè non ancora definite esattamente con quale legge è regolata l'azione mutua fra le molecole, pure l'ipotesi più semplice per quanto approssimata è quella che considera le molecole più o meno associate, come delle sfere elastiche, che conduce a risultati non completamente discordanti con i dati sperimentali. Se la legge di forza è rappresentabile con l'espressione $\frac{k'_1}{r^s}$ dove r è la distanza fra le molecole e dove s varia fra 5 e ∞ il valore generale del coefficiente di viscosità si può porre sotto la forma

$$\eta = A \sqrt{mRT} \left[\frac{RT(s-1)}{k_1} \right]^{\frac{1}{s-1}}$$

(1) Nella seduta del 19 aprile 1936.

dove A è una costante numerica calcolata da Chapman e dove per $s = 5$ si ottiene l'espressione di Maxwell.

$$\eta = \frac{2}{3} \frac{RT}{\sqrt{2 m K_1 A_2}}$$

mentre per $s = \infty$ η è proporzionale a $T^{1/2}$ e in generale esprimendo $\eta = K T^{m_1}$ per $m_1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{s-1}$ si ottiene la legge generale di proporzionalità di η ad una potenza m_1 di T .

Ammissa appunto la legge $\frac{k'_1}{r^s}$ e per s tendente a infinito cioè considerando il caso in cui le molecole siano molto dure ⁽¹⁾ si può ritenere che la viscosità η sia proporzionale alla radice quadrata della temperatura assoluta.

Questo risultato è confermato sperimentalmente per molti gas. Per quanto sopradetto si può in via di approssimazione scrivere che

$$(1) \quad \eta = k_1 \sqrt{T}.$$

Se diciamo con c la concentrazione in molecole semplici essendo il coefficiente di associazione proporzionale alla radice quadrata della temperatura secondo l'espressione data da Boltzmann potremo scrivere ⁽²⁾

$$(2) \quad c = k_2 \sqrt{T}.$$

Eliminando \sqrt{T} fra (1) e (2) si ottiene

$$\frac{\eta}{c} = \frac{k_1}{k_2} = K$$

ossia

$$(3) \quad \eta = Kc$$

L'espressione ⁽³⁾ per una determinata temperatura è identica alla espressione data da Maxwell per la viscosità e cioè

$$(3 \text{ bis}) \quad \eta = \frac{1}{3} m \bar{v} l c$$

per modo che si potrà scrivere l'identità $K = \frac{1}{3} m \bar{v} l$.

(1) JEANS, *The dynamical theory of gas*. Cap. « Viscosity ».

(2) BOLTZMANN, *Vorlesungen* ecc.

(3) MAXWELL, *Collected Works*; BOLTZMANN, *Vorlesungen über Gastheorie*; JEANS, *The dynamical Theory of Gas*; CHAPMAN, *Philosophical Transactions*, I; ROCARD, *Hydrodynamique et la théorie cinétique des gas*.

È necessario vedere se tale relazione è verificata ad una determinata temperatura dall'esperienza e in quali limiti rispetto ai valori non sempre esattamente determinati sia per il libero percorso, che per la velocità media delle molecole secondo la legge di distribuzione di Maxwell. Nella tabella I abbiamo calcolato i valori di K partendo dai valori conosciuti per alcuni gas di $m\bar{v}l$ e come si vede le variazioni del suo valore sono compresi entro i limiti delle variazioni dei coefficienti di associazione molecolare.

Escludendo il valore trovato per l'idrogeno che si allontana in modo anomalo dalla media dei valori si vede che il valore medio di K è uguale a $3.9 \cdot 10^{-24}$ che rappresenta il valore di K per un gas ad una temperatura (diversa fra gas e gas e che diremo caratteristica del gas) per cui il coefficiente di associazione è uguale ad uno. Infatti considerando il vapor d'acqua di cui è ben conosciuto il coefficiente di associazione alla temperatura di ebollizione e che è appunto 1.3 si ottiene, ad esempio, $3 \cdot 10^{-24} \times 1.3 = 3.9 \cdot 10^{-24}$.

TABELLA I.

Gas	Peso molecolare	Massa gr. 10^{24}	Libero per- corso 10^7	Velocità media 10^2 a 0°C	$K = \frac{1}{3} m\bar{v}l$ 10^{24}
H	1	$1.662 \cdot 10^{-24}$	$182 \cdot 10^{-7}$	1694×10^2	1.71×10^{-24}
N ₂	28	46	58	454	4.04
O	16	26.4	100	425	3.7
He	4	6.6	172	1207	4.6
Ar	39.9	65.5	62	380	5.06
Kr	82.9	135	49	263	5.8
Xe	130.2	215	35	210	5
CO	28	46	58	454	3.96
CO ₂	44	72.5	39	362	3.5
N ₂ O	44	72.5	39	362	3.5
NO	30	49.5	59	438	4
Etilene	—	92	27	454	3.8
Vapor d'acqua .	—	29.6	54.5	565	3

Considerazioni sul valore di K. — Supponiamo ora, per ottenere una spiegazione della costanza del momento della quantità di moto molecolare, che una molecola nei successivi urti venga deviata compiendo un moto chiuso risultante dal moto proprio e dalle deviazioni dovute agli urti successivi. Se per semplicità supponiamo che il moto chiuso sia rappresentabile con una orbita circolare e se introduciamo per quanto detto la condizione di

costanza della quantità di moto angolare della molecola, detta αm la sua massa (dove α è il coefficiente di associazione molecolare), l il raggio dell'orbita circolare e \bar{v} la velocità media delle molecole, si potrà scrivere

$$(4) \quad n\pi\alpha m\bar{v}l = H$$

dove n rappresenta il numero dei giri compiuto dalla molecola durante la sua traslazione corrispondente alla lunghezza del libero percorso l preso rispettivamente uguale al raggio dell'orbita.

Il momento della quantità di moto sarà allora

$$(5) \quad m\bar{v}l = \frac{H}{n\pi\alpha}$$

dove α è il coefficiente di associazione molecolare. Si otterrà il valore di l dalla (5) cioè $l = \frac{H}{n\pi\alpha m\bar{v}}$ e per $n = \frac{1}{3}$ si avrà

$$(6) \quad l = \frac{3H}{\pi\alpha m\bar{v}}$$

Per la formula (3) si otterrà l'espressione generale della viscosità dei gas che risulta allora costante per tutti i gas per un valore del coefficiente di associazione α uguale ad uno. Infatti si potrà scrivere

$$(7) \quad \eta = \frac{H}{\pi\alpha} c$$

dove c rappresenta il numero delle molecole per unità di volume che è risaputo essere costante e uguale a $2.7 \cdot 10^{19}$ per tutti i gas.

Dalla (6) si può calcolare il valore del libero percorso delle molecole dei diversi gas e anche del vapor d'acqua con una buona approssimazione, valori che sono riportati nella tabella II.

TABELLA II.

Valori di	l (calcolati con la (6))	l (calcolati con la formula di Maxwell (3 bis))
N.	105×10^{-7}	94×10^{-7}
N ₂	53	58
O.	107	100.1
O ₂	54	64
CO	57.5	58
NO	55	56
N ₂ O.	46	39
H ₂ O (vapore) . . .	52	54

Per alcuni gas le differenze più sentite sono da attribuirsi al valore più o meno grande del coefficiente di associazione, valori che del resto sono mal conosciuti per i gas alle diverse temperature. Per l'idrogeno il valore di l calcolato con la (6) è 213×10^{-7} invece di $182 \cdot 10^{-7}$ corrispondente ad un coefficiente di associazione di 1.34 invece 1.17.

È bensì vero che se le proprietà chimiche sono molto differenti fra gas e gas mentre quelle fisiche differiscono non molto fra loro pure sono abbastanza sentite specie nei valori delle viscosità. Per la formula (3) e per la (7) potremo dire che le variazioni di viscosità fra gas e gas dipendono dal coefficiente di associazione molecolare che è una funzione della temperatura.

Posto infine $\alpha = 1$ la viscosità dei gas risulta per la (7) costante e sostituendo i valori trovati per $K = H/\pi$ si ottiene il valore della viscosità alla temperatura caratteristica per ogni gas cioè la temperatura per la quale α diviene uguale ad uno e a tale temperatura i gas hanno un valore costante della viscosità uguale al valore

$$(8) \quad \eta = 1125 \cdot 10^{-7}.$$

Qualora noi, partendo dall'ipotesi della costanza del momento della quantità di moto molecolare, riusciamo a calcolare tale temperatura caratteristica per ogni gas cioè la temperatura alla quale un dato gas ha il valore della viscosità uguale a $1125 \cdot 10^{-7}$ verrà ad essere confermato in certo qual modo quanto si è detto sopra.

Per questo riprendiamo la formula di Chapman che esprime il valore della viscosità dei gas nella ipotesi che le molecole si possano considerare come puntuali respingentesi con legge $\frac{1}{r^s}$ (dove s ha un valore che può essere anche infinito) e dotate di una torza costante agente entro un raggio limitato interno alla sfera molecolare si ha per le molecole considerate come sfere elastiche e rigide la formula trovata da Chapman

$$(9) \quad \eta = A\gamma \sqrt{\frac{RT}{\pi M}} \frac{m}{\sigma^2} \frac{1}{1 + \frac{C'}{T}}$$

dove A è un fattore di forma che cresce da 1 (per $s = 5$) a 1.01485 (per $s = \infty$) e dove γ è un coefficiente numerico.

Come si vede $1 + \frac{C'}{T}$ non è che il coefficiente di associazione di Sutherland che Chapman ha ritrovato per via teorica e che noi introdurremo nella (7) e C' è il cosiddetto coefficiente di Sutherland.

Se noi uguagliamo l'espressione (9) di Chapman con la (7) e posto $\alpha = 1 + \frac{C'}{T}$ si ha

$$\eta = 0.312 A \sqrt{\frac{RT}{\pi M}} \frac{m}{\sigma^2} \frac{1}{1 + \frac{C'}{T}} = \frac{HN}{\pi V \alpha}$$

e posto $\frac{H}{\pi} = K$ si avrà

$$\eta = 0.312 A \sqrt{\frac{RT}{\pi M}} \frac{m}{\sigma^2} = K \frac{N}{V}$$

e posto $A = 1$ e $K = 3.9 \times 10^{-24}$ ed essendo $\frac{N}{V} = 2.7 \times 10^{19}$ si avrà

$$(10) \quad \frac{\sqrt{MT}}{\sigma^2} = \frac{K \sqrt{\pi N^2}}{\sqrt{R} V} = 3.95 \cdot 10^{16}.$$

Dalla (10) si può ottenere il valore di T in funzione di σ e viceversa, e cioè quella temperatura alla quale la viscosità è uguale al valore $\eta = 1125 \cdot 10^{-7}$ per $\alpha = 1$. Abbiamo calcolato con la tabella III i valori con la (10) delle temperature entro le quali è compreso il valore $\eta = 1125 \cdot 10^{-7}$ dati desunti sperimentalmente e riportati dalle « International Critical Tables ». I valori che si ottengono con la (10) e i valori sperimentali sono sufficientemente concordanti per ritenere valida la (7), e quanto si è sovraesposto.

TABELLA III.

Temperatura caratteristica del gas T $t = T - 273$ ricavata dalle tabelle delle viscosità corrispondenti al valore $\eta = 1125 \cdot 10^{-7}$ per $\alpha = 1$	Temperatura ca- ratteristica calco- lata con (10) per $\alpha = 1$	Diametro mole- colare calcolato con la formula di Maxwell $\sigma \times 10^8$
Per H il valore sperimentale risulta oltre i 20° C	137° C	$2.72 \cdot 10^{-8}$
Per He è compresa fra —102°6 e —184° C	—159°	2.34
Per Cloruro di metile compreso fra 15° e 80° C	39°	5.66
Per Benzene compreso fra 161° e 170° C . .	167°	6.9
Per Etilene compreso fra 15° e 90° C . . .	61°	5

NOTA 1. — Faccio notare che il valore della costante $H = 1.22 \cdot 10^{-24}$ risulta uguale al prodotto $\frac{m_H}{m_e} h$ dove il valore $\frac{m_H}{m_e}$ non è che il rapporto fra la massa dell'atomo di idrogeno alla massa dell'elettrone e che ha il valore $\frac{m_H}{m_e} = 1840$, mentre la costante h non è

che la costante universale di Planck è cioè $h = 6.55 \cdot 10^{-27}$ per modo che si può scrivere

$$\text{che } \frac{H}{h} = \frac{m_H}{m_e} = 1840.$$

Rilevo la coincidenza dei valori senza voler entrare in merito all'essenza dei valori stessi che esaminerò in altre Note.

NOTA 2. — I risultati ottenuti e le formule scritte e specialmente la (4) ci permette di calcolare oltre alla viscosità dei gas anche quella dei liquidi dove però varieranno i valori di n e mentre per i gas tutti è $n = 1/3$ per i liquidi i valori di n variano da tipo a tipo di liquido argomento che *svolgerò in altra Nota*.

D'altra parte onde richiamare l'attenzione fin d'ora sul valore della costante H ossia sul momento della quantità di moto delle molecole farò notare (ciò che svilupperò in un'altra Nota) che tale costante permette di calcolare in modo sufficientemente preciso il calore di ebollizione dei liquidi qualora si scriva la relazione $\lambda = \frac{HN}{\alpha V} \nu$ dove ν rappresenta il numero di urti fra le molecole nell'unità di tempo e λ il calore latente di ebollizione per unità di volume in ergs.

La dimostrazione di tale formula e i relativi valori calcolati per alcuni liquidi sarà trattato in altra Nota. Il fatto però che indipendentemente da quanto sopra, ma per altra via, la costante H permetta di calcolare i calori latenti di ebollizione fa attribuire a tale costante un significato fisico ben definito come sopra si è detto.

CONCLUSIONE. — Da quanto sopradetto noi concluderemo quanto segue:

1) Che il momento della quantità di moto di una molecola di qualsiasi gas è una costante per tutti i gas e si può esprimere con la relazione

$$n\pi m \bar{v} l = \frac{H}{\alpha} \text{ e per } m = 1/3 \text{ sarà } \frac{1}{3} m \bar{v} l = \frac{H}{\pi \alpha} = \frac{K}{\alpha}.$$

2) La viscosità dei gas è costante per tutti i gas quando il loro coefficiente di associazione è uguale all'unità e cioè $\eta = 1125 \cdot 10^{-7}$.

3) La viscosità dei gas è soltanto funzione del coefficiente di associazione che è a sua volta funzione della temperatura.

4) Per tutti i gas si ottiene un valore costante del rapporto $\frac{\sqrt{MT}}{\sigma^2} = 3.95 \cdot 10^{16}$ ciò che permette di calcolare la temperatura caratteristica T quando si conosca il valore del diametro molecolare e viceversa.

Da quanto si è sopradetto e per l'ipotesi sopraesposta risulta che per $n = 1/3$ il trasporto della quantità di moto nei gas si fa soltanto per traslazione in perfetta corrispondenza con la dimostrazione che ne fa Chapman non solo per le molecole monoatomiche ma anche per quelle biatomiche.

Chimica-fisica. — *La colorimetria durante il periodo dello sviluppo del colore* ⁽¹⁾. Nota di G. BERGAMI, E. BOERI e P. BAER, presentata ⁽²⁾ dal Socio C. FOÀ.

È noto che nella esecuzione di metodi di analisi quantitativa basati sulla determinazione dell'intensità del colore sviluppatosi in conseguenza di una data reazione, è necessario, prima di fare la lettura, verificare se il colore si è stabilizzato.

In effetti, dal momento in cui sono venuti a contatto i reattivi che danno la reazione colorata, la colorazione impiega sempre un certo tempo per comparire, crescendo via via di intensità fino a raggiungere un valore limite più o meno stabile.

Il tempo necessario perchè l'intensità del colore raggiunga il massimo varia da reazione a reazione: può essere brevissimo, come è il caso nelle reazioni tra ioni, o viceversa molto lungo, si da indurre gli ideatori di alcuni metodi, a consigliare di fare le letture colorimetriche soltanto dopo un determinato periodo di attesa.

La variazione dell'intensità del colore in funzione del tempo non si limita, in molti casi, al periodo immediatamente seguente alla miscelazione dei reattivi perchè l'intensità del colore, dopo di aver raggiunto il valore massimo, si mantiene costante solo per un tempo limitato, deviando successivamente in più o in meno per effetto di reazioni secondarie o accessorie.

Ciò porta ad una notevole limitazione del periodo di tempo utilizzabile per compiere le letture, vevoli soltanto dal momento della stabilizzazione del colore fino all'inizio delle deviazioni del valore asintotico raggiunto.

Nell'eseguire numerose determinazioni colorimetriche in serie, noi abbiamo avuto più volte occasione di risentire questa limitazione nell'attuazione pratica di metodi colorimetrici che, per la loro rapidità ed esattezza, avrebbero potuto permettere di realizzare numerose determinazioni seriate.

Abbiamo cercato di verificare se, non essendo utilizzabili i dati riferentisi a letture di intensità di colore compiute dopo che il colore, previamente stabilizzatosi, ha cominciato a variare, si potessero invece utilizzare le letture fatte nel periodo dello sviluppo della colorazione, conoscendo il tempo trascorso dalla miscelazione dei reattivi e la velocità di sviluppo del colore.

Le variazioni della trasparenza della soluzione (per indicare una grandezza misurabile) hanno andamenti del tutto diversi a seconda che le rea-

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 5 aprile 1936.

zioni che si svolgono nella soluzione in esame siano dell'ordine delle mono-, delle bi- o delle plurimolecolari.

Perchè si possano stabilire le modalità con cui compiere una determinazione colorimetrica mentre la trasparenza della soluzione è soggetta ad un continuo incremento negativo, è quindi necessario stabilire anzitutto di quale ordine siano le reazioni che danno origine al colore oggetto della misura. Questo è nel maggior numero dei casi piuttosto difficile, dato che

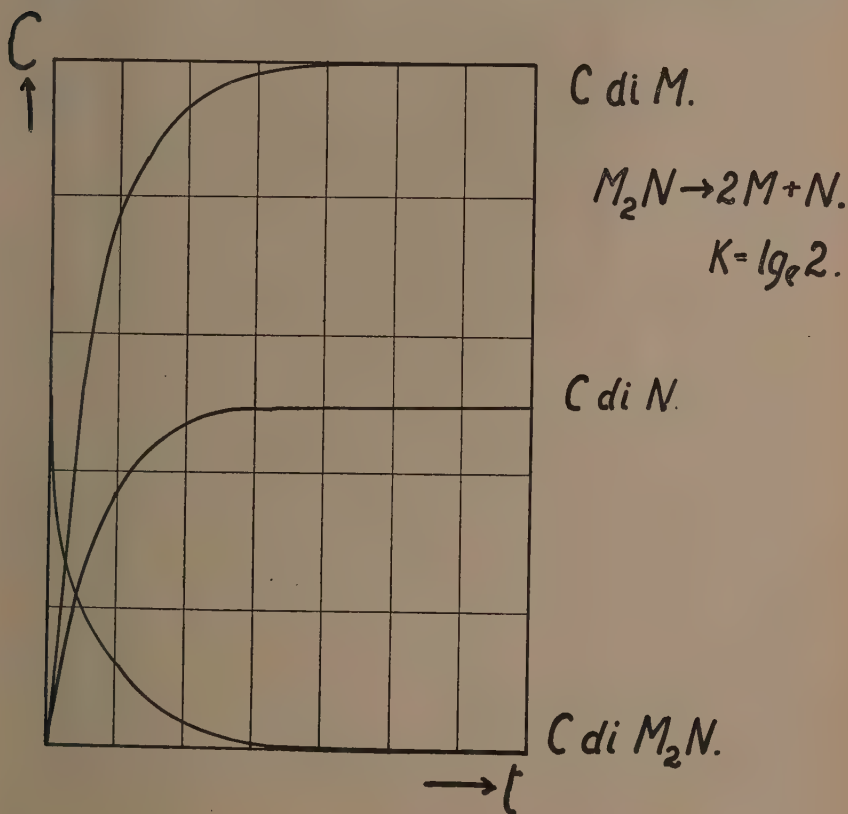


Fig. 1.

Curva delle concentrazioni in funzione del tempo della reazione monomolecolare $A \rightarrow B + C \dots (M_2N \rightarrow 2M + N \text{ per } K \text{ eguale a } \lg_e 2).$

sovente non si hanno conoscenze dirette sufficienti sulle reazioni utilizzate per la formazione del colore.

È quindi necessario poter risalire alla determinazione dell'ordine delle reazioni che ci interessano dall'esame delle stesse curve delle variazioni del coefficiente di estinzione in soluzioni di concentrazioni note in funzione del

tempo; curve che dovranno servire a determinare la velocità di formazione del colore.

Cominciamo col considerare il caso più semplice, vale a dire il caso in cui la colorazione sia risultante di reazioni monomolecolari.

Nella reazione ad esempio $A \rightarrow B + C + \dots$, che è reazione monomolecolare, B sia la sostanza colorata che si forma. La reazione sarà dominata dalla comune formula delle reazioni di prim'ordine:

$$K = \frac{1}{t} \log_e \frac{A}{A - x}$$

Ma, poichè noi non conosciamo il variare della concentrazione della sostanza A che si trasforma, ma solamente quello della sostanza B che si va formando, possiamo trasformare la formula citata nella seguente:

$$(1) \quad K = \frac{1}{t} \log_e \frac{B}{B - b_t}$$

dove B rappresenta il numero di molecole finale della sostanza che si forma e b_t il numero di molecole della stessa sostanza al tempo t .

Il passaggio dalla prima formula alla seconda è assai facile, ove si consideri il valore di B

$$B_t = n(A_0 - A_t).$$

L'esame del grafico riprodotto nella figura (1), prova infatti che la costante K calcolata con la misurazione della sostanza A che si trasforma è eguale a quella calcolata dalle misurazioni delle sostanze B o C che si formano. Nella colorimetria, per soluzioni che seguono la legge di Lambert-Beer, a B possiamo sostituire un valore che gli sia proporzionale, quale quello del coefficiente di estinzione⁽¹⁾. Poichè infatti

$$B = \text{cost } E$$

si può sostituire a B il suo valore

$$(2) \quad \begin{cases} K = \frac{1}{t} \log_e \frac{\text{cost } E}{\text{cost } E - \text{cost } E_t} \\ K = \frac{1}{t} \log_e \frac{E}{E - E_t} \end{cases}$$

(1) Il coefficiente di estinzione E è ricavato dalla legge di Lambert-Beer $I = I_0 10^{-E}$ ove I_0 ed I rappresentano l'intensità della luce prima (I_0) e dopo (I) aver attraversato la soluzione dallo spessore s . Quindi $E = \frac{1}{s} \cdot \log_{10} \frac{I_0}{I}$ ma, poichè si designa come trasparenza (T) il valore $\frac{I}{I_0}$ si ha che $B = \frac{1}{s} \log_{10} \frac{1}{T}$.

Quando si parla di coefficienti di estinzione di date soluzioni colorate si intende sempre per spessori = 1 cm.

dove E è il coefficiente di estinzione dell'asintoto finale nella curva dei coefficienti di estinzione in funzione del tempo, ed E_r è il coefficiente di estinzione nel tempo t .

In via teorica sarebbe quindi sufficiente calcolare K per vari valori di E e di E_r sperimentalmente determinati, ma in pratica, per le influenze perturbatrici di reazioni secondarie ecc., pur essendo certamente in presenza di reazioni monomolecolari, non è spesso possibile ottenere valori di K sufficientemente approssimati.

Più conveniente è pertanto seguire le direttive di Ostwald, considerando che frazioni eguali di sostanza si debbono trasformare in tempi tali che si verifichi l'equazione

$$t = \frac{\text{cost}}{c^{n-1}}$$

dove c è la concentrazione ed n esprime il numero d'ordine della reazione. Come si vede, nel caso di reazioni monomolecolari, si trasformeranno frazioni eguali di sostanza in tempi eguali, poichè viene:

$$t = \text{costante.}$$

Sarà pertanto sufficiente tracciare le curve in funzione del tempo dei valori dei coefficienti di estinzione di due concentrazioni campione per controllare se nello stesso tempo t siano comparsi i coefficienti di estinzione finali E e E_r , così come

$$\frac{E}{2} \text{ ed } \frac{E_r}{2}; \quad \frac{E}{n} \text{ ed } \frac{E_r}{n}.$$

Da ciò deriva che, usando un comune colorimetro comparatore di tipo Duboscq, basterà mettere nelle due vaschette due soluzioni campione di concentrazione diversa, per es. l'una doppia dell'altra, eguagliando quindi il colore, riducendo a metà lo spessore dello strato liquido della soluzione più concentrata: se le soluzioni sono state preparate nello stesso tempo la loro trasparenza varierà proporzionalmente alle rispettive concentrazioni, così che, pur diventando il colore sempre più intenso, il rapporto tra le due trasparenze resterà invariato.

Questa semplice prova preliminare potrà quindi dirci se la reazione da cui si origina il colore, sia, agli effetti della velocità di reazione, monomolecolare. In tal caso noi potremo eseguire le letture anche durante il periodo di sviluppo del colore se ci serviamo di un colorimetro a comparazione diretta e se la soluzione campione viene preparata di volta in volta nello stesso tempo di quella in esame.

Se ci si vale invece di misure assolute, quali ad es. quelle ottenibili col fotometro di Pulfrich, è necessario costruire, su dati sperimentali ottenuti

su due concentrazioni diverse e note, le rispettive curve dei valori dei coefficienti di estinzione in funzione del tempo.

Se la reazione è monomolecolare, in qualsiasi tempo i valori dei coefficienti di estinzione delle due soluzioni debbono stare tra loro come le rispettive concentrazioni.

Dal grafico risulterà infatti evidente, se si è in presenza di una reazione monomolecolare, che ogni valore E del coefficiente di estinzione sta al valore E_1 del medesimo tempo, come stanno le rispettive concentrazioni.

Essendo soddisfatta questa condizione, da una qualsiasi delle due curve sarà facile calcolare tutti i valori delle concentrazioni corrispondenti ai valori

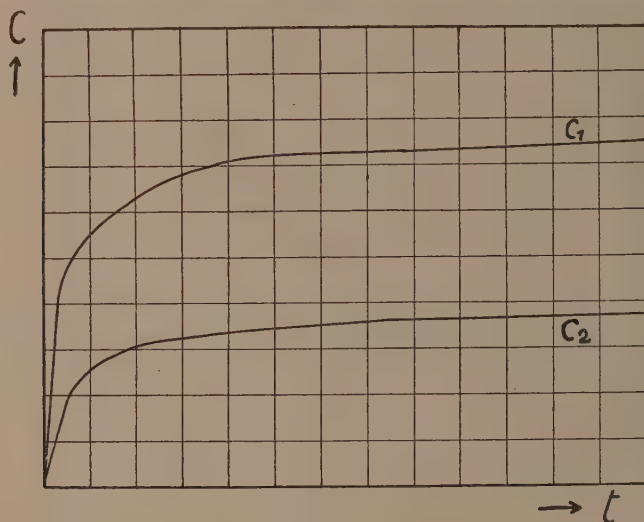
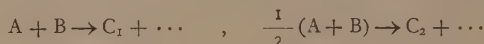


Fig. 2.

Curva delle concentrazioni C_1 e C_2 in funzione del tempo nelle reazioni bimolecolari



Per A e B quantità equivalenti e per $K = 0,00103$.

dei coefficienti di estinzione letti, per soluzioni di concentrazioni ignote nel tempo t dalla miscelazione dei reattivi.

Come è ovvio, nella determinazione dei dati sperimentali che serviranno al tracciamento della curva tipo, è necessario lavorare alla stessa temperatura (legge di van t'Hoff) alla quale si faranno poi tutte le letture riferentisi alle concentrazioni ignote.

La verifica sperimentale da noi fatta più volte con reazioni colorate di vario tipo, ci ha dato risultati nettamente positivi e molto approssimati: ad esempio:

- Coefficiente di estinzione calcolato da una curva tipo: 0,816
- Coefficiente di estinzione sperimentalmente trovato: 0,827.

La variazione di 0,011, tra il dato calcolato della curva e quello sperimentale di controllo, è agli effetti della precisione della determinazione quantitativa praticamente trascurabile e nei limiti di errore dello strumento di misura (fotometro di Pulfrich).

Ben altrimenti stanno le cose quando, dall'esame delle curve della variazione dei coefficienti di estinzione di due soluzioni note in funzione del tempo, risulta che si è in presenza di una reazione che non è dell'ordine delle monomolecolari. Ricorriamo ancora alla regola di Ostwald: secondo essa in reazioni di secondo ordine (bimolecolari) perchè siano trasformate frazioni eguali di sostanza occorrerà $t = \frac{\text{cost}}{c}$.

Questa regola, applicata alla sostanza finale (c nella reazione $A + B \rightarrow C + \dots$), considerando c la concentrazione finale espressa dall'asintoto della curva, o meglio il modulo di estinzione finale, viene illustrata nella figura 2. Se così fosse potremmo, per quanto con maggiore difficoltà, eseguire la colorimetria in funzione del tempo.

Ma la regola di Ostwald vale per quantità equivalenti di sostanze A e B, come si adoperano comunemente ogni volta che occorra misurare la velocità di una determinata reazione.

Nel caso della colorimetria, invece, noi vogliamo appunto misurare la quantità incognita di una sostanza, mentre la quantità dell'altra è in eccesso. In tale caso la regola di Ostwald non può più applicarsi, ma deve essere sostituita a pari eccedenze di A rispetto a B dalla formula

$$(3) \quad t = \text{cost} \lg_e \frac{nA - mB}{A(n - m)}$$

dove A e B sono le concentrazioni iniziali delle due sostanze (A è la sostanza in eccesso), ed $\frac{m}{n}$ la frazione di cui si vuole diminuire la quantità B⁽¹⁾.

(1) Si giunge a tale formula sviluppando quella della velocità di reazione:

$$\frac{dx}{dt} = K(a - x)(b - x)$$

da cui

$$Kt = \frac{1}{a - b} \left[\int \frac{dx}{b - x} - \int \frac{dx}{a - x} \right]$$

$$t = \frac{1}{(a - b)K} \left[\lg \frac{a - x}{b - x} + \lg C \right]$$

$$t = \frac{1}{(a - b)K} \left[\lg C \frac{a - x}{b - x} \right]$$

$$e^{Kt(a-b)} = C \frac{a - x}{b - x}$$

È evidente che l'andamento della curva subisce una complicazione tale da non rendere praticamente utilizzabile una colorimetria in funzione del tempo per soluzioni colorate in cui la colorazione sia la risultante di reazioni di ordine superiore al primo; in questi casi occorre pertanto attendere che il colore si stabilizzi.

CONCLUSIONI

Nelle determinazioni colorimetriche di soluzioni colorate che seguono la legge di Lambert-Beer è possibile utilizzare anche il periodo di tempo durante il quale il colore si sviluppa, se la reazione che origina il colore è, agli effetti della velocità di reazione, monomolecolare.

Se, al contrario, la reazione è di ordine superiore al primo, è necessario, prima di fare le letture, attendere la stabilizzazione del colore.

Per reazioni monomolecolari, se si usa il comune colorimetro a comparazione (tipo Duboscq), è inutile l'indicazione di un tempo *optimum* per le letture, se la soluzione tipo viene preparata nello stesso tempo di quella ignota. Usando invece strumenti che permettono misure fotometriche assolute, senza soluzione tipo di confronto (tipo fotometro di Pulfrich) è necessario costruire, una volta tanto, una curva sperimentale delle variazioni del coefficiente di estinzione, per una data concentrazione in funzione del tempo. Da questa curva è facile calcolare, con una semplice proporzione, le concentrazioni corrispondenti ad un qualsiasi valore x di coefficiente di estinzione, letto dopo un tempo t dalla miscelazione dei reattivi.

La concentrazione ignota sarà infatti eguale al valore del coefficiente di estinzione della soluzione ignota letto al tempo t moltiplicato per il valore della concentrazione della soluzione tipo e diviso per il valore del coefficiente di estinzione che, nella curva tipo, corrisponde al tempo t .

e poichè se $t = 0$ anche $x = 0$

$$C \frac{a}{b} = e^0 \quad C = \frac{b}{a}.$$

Perciò

$$t = \frac{1}{(a-b)K} \lg \frac{b(a-x)}{a(b-x)}$$

e considerando $x = \frac{m}{n}b$ e per eguali eccedenze della sostanza a rispetto alla

$$t = \text{cost} \lg \frac{na - mb}{a(n-m)}.$$

Chimica. — *Idratazione e struttura dell'amido* ⁽¹⁾. Nota di G. CENTOLA, presentata ⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

L'amido si trova nelle piante sotto forma di piccoli granuli i quali, a seconda della loro provenienza, presentano differenti proprietà per quanto riguarda la forma, la densità, l'indice di rifrazione, il contenuto di acqua e di fosforo, il calore di gonfiamento, la temperatura di gelatinizzazione e molte altre proprietà chimico-fisiche.

La causa di queste differenze è da ricercarsi nella composizione complessa dei granuli i quali risultano costituiti da due componenti principali (amilosio ed amilopectina) e da sostanze accessorie difficilmente eliminabili (acido fosforico, acido silicico, prodotti azotati) ⁽³⁾.

Anche fra i roentgenogrammi delle varie specie di amido esistono differenze costanti in base alle quali è possibile classificare l'amido secondo tre tipi fondamentali caratterizzati ciascuno da un determinato spettrogramma ⁽⁴⁾.

TABELLA I.

Spettrogrammi dei tre tipi fondamentali di amido. (Acqua che si elimina a 100° nel vuoto nei vari campioni = 18 % circa). (Radiazione Cu K_α).

n. dei cerchi	A		B		C	
	θ/2	Intensità	θ/2	Intensità	θ/2	Intensità
1	—	—	2° 50'	f	2° 50'	m
2	5° 25'	dd	5° 18'	d	5° 21'	d
3	7° 40'	mf	7° 43'	m	7° 43'	m
4	8° 42'	f	8° 42'	f	8° 42'	f
5	9° 60'	md	9° 53'	md	9° 50'	md
6	11° 50'	f	11° 3'	mf	11° 52'	f
7			12° 3'	m		
8	13° 27'	d	13° 11'	d	13° 20'	d
9	15° 24'	d	15° 27'	d	15° 29'	d
10	17° 10'	dd	17° 23'	dd	17° 18'	dd
11	19° 25'	d	19° 19'	d	19° 20'	d
12	21° 19'	dd	21° 18'	dd	21° 18'	dd

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 19 aprile 1936.

(3) TOLLENS-ELSNER, *Kurzes Handbuch der Kohlenhydrate* (Barth. Leipzig, 1935), p. 553 e sgg.; FRIEDRICH CZAPEK, *Biochemie der Pflanzen* (Fischer. Jena, 1913) p. 397 e sgg.

(4) NARAY-SZABÓ, «Lieb. Ann.», 465, 299 (1928); SAMEK e KATZ, «Zeit. f. physik. Chem. A.», 163. 291 (1933).

Se si essiccano i vari tipi di amido i loro spettri di diffrazione vengono sensibilmente alterati e tendono a trasformarsi tutti in un medesimo spettrogramma poco nitido ⁽¹⁾ e se si esterifica l'amido trasformandolo in un derivato non igroscopico (nitroamido per esempio) si ottengono prodotti che presentano sempre lo stesso assetto cristallino qualunque sia il tipo di amido dal quale si parte ⁽²⁾.

Questi fatti dimostrano che l'acqua contenuta nei granuli di amido entra a far parte del reticolo cristallino.

Non si possono però mettere senz'altro in relazione le differenze esistenti negli spettrogrammi col differente contenuto di acqua nei vari tipi di amido mantenuti per lungo tempo nelle medesime condizioni di temperatura e di umidità di ambiente, perchè noi non sappiamo quanta di quest'acqua è semplicemente assorbita e quanta entra a far parte del reticolo cristallino. Inoltre, la capacità dell'amido ad idratarsi è influenzata dalla forma e dalle dimensioni dei granuli e dalla quantità e natura delle sostanze estranee presenti in essi.

Ho cercato di chiarire la causa delle differenze tra i diversi tipi di amido determinando in qual modo varia la tensione di vapore di alcuni campioni di esso in funzione del contenuto di acqua.

Katz e Derksen hanno dimostrato che è possibile ottenere dalla salda d'amido amido A, o amido B, a seconda della temperatura alla quale si svapora la soluzione e che tale trasformazione è reversibile.

A 20° circa si ottiene la modificazione B, ed a temperatura più elevata (circa 65°) è stabile la modificazione A.

A temperature intermedie si ottiene una serie di preparati che possono considerarsi come una miscela delle due fasi (spettro C.) ⁽³⁾.

Ho limitato pertanto le ricerche ai due tipi di amido A e B e li ho preparati, secondo le indicazioni degli autori su citati, a partire dall'amido solubile « Erba », per rendere le determinazioni indipendenti dalle inevitabili differenze morfologiche e di contenuto di eventuali sostanze estranee esistenti nei campioni di amido naturale.

Le tensioni di vapore sono state misurate col tensimetro descritto da Ephraim ⁽⁴⁾. I risultati sono riassunti nei diagrammi 1 e 2: nel primo sono rappresentate le tensioni di vapore d'acqua in mm. di Hg. in funzione della temperatura per campioni di amido A ed analogamente nel secondo per l'amido B.

(1) KATZ e DERKSEN, «Zeit. f. physik. Chem. A.», 150, 107 (1930).

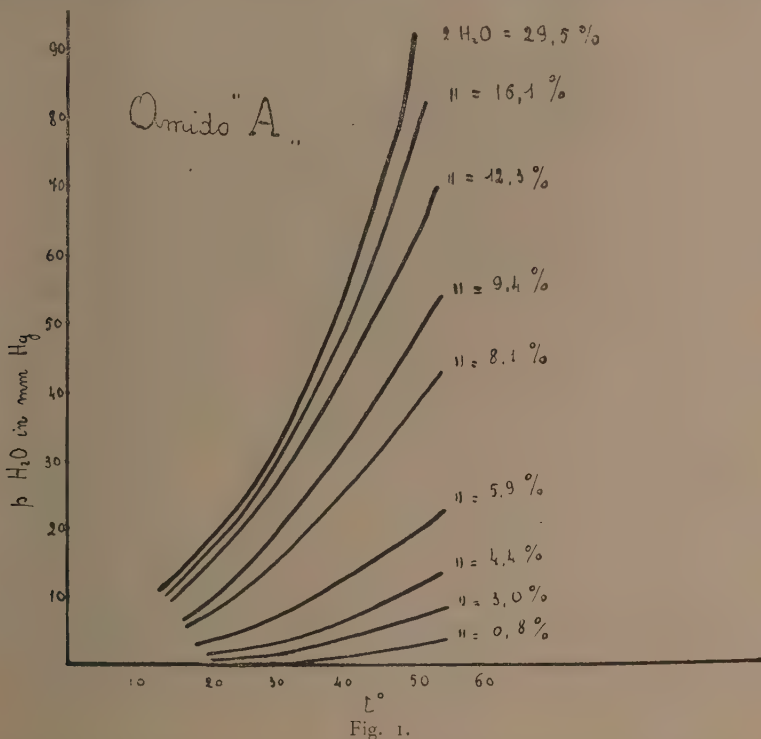
(2) «Gazzetta Chimica Ital.», 66, 8 (1936).

(3) «Zeit. f. physik. Chem. A.», 165, 228 (1933).

(4) «Ber.», 50, 1079 (1917).

Ciascuna curva si riferisce ad un campione di amido avente il contenuto di acqua segnato a lato.

Da un primo esame dei due diagrammi si osserva che in entrambi i casi le tensioni del vapor d'acqua variano col variare della composizione della fase solida. Ciò significa che non esiste un idrato dell'amido come fase ben definita avente una tensione di vapore determinata a ciascuna temperatura. Si possono trarre conclusioni più importanti se si tracciano le



isoterme di disidratazione dei due tipi di amido, ricavando dai diagrammi 1 e 2 un terzo diagramma nel quale sono rappresentate le variazioni della tensione di vapore ad una determinata temperatura in funzione del contenuto di acqua nella fase solida (è stata scelta arbitrariamente la temperatura di 40°) (fig. 3) e si confrontano queste variazioni con quelle che si osservano negli spettrogrammi durante la disidratazione dell'amido.

In entrambe le curve si possono distinguere due tratti aventi un andamento differente e precisamente un primo tratto $a - a'$ (e rispettivamente $b - b'$) ed un secondo $a' - a''$ (e rispettivamente $b' - b''$).

Nel primo stadio della disidratazione rappresentato dalle curve ($a - a'$) e ($b - b'$) la tensione si abbassa rapidamente col diminuire del contenuto

di acqua nell'amido e negli spettrogrammi si nota che, mentre un certo numero di righe di interferenza (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) non subisce nessuna variazione, le righe 8; 9; 10; 11; 12 scompaiono.

Queste ultime rappresentano una serie di righe deboli che si ottengono soltanto dall'amido abbastanza umido con tempi di irradiazione convenientemente lunghi, e, dato che coincidono con alcune righe dello spettro del

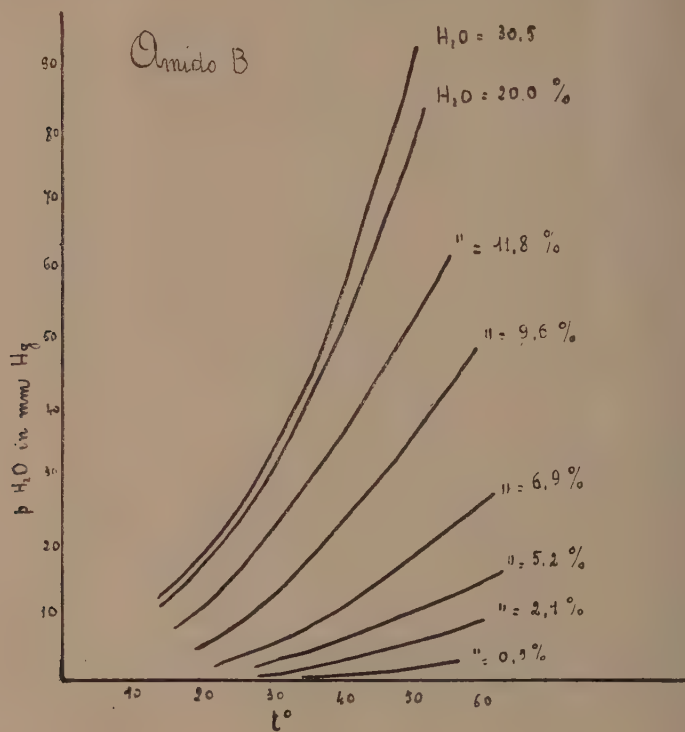


Fig. 2.

del ghiaccio, Kolhmeijer e Favejee⁽¹⁾ le hanno attribuite allo strato di acqua assorbita ed orientata sulla superficie delle micelle.

Si può dunque dire che in questo primo stadio della disidratazione viene allontanata l'acqua assorbita nell'amido.

Nel secondo tratto delle due curve si nota che la tensione del vapor d'acqua varia molto più lentamente col diminuire dell'umidità nella fase solida, ed i valori molto bassi delle tensioni indicano che questa frazione di acqua si elimina molto difficilmente.

(1) «Zeit. f. Kristall.», 88, 226 (1934).

Negli spettri si nota che le righe fondamentali dell'amido diventano sempre più indistinte finchè alla disidratazione completa si ottiene una sostanza quasi amorfa.

Ciò significa che quest'ultima frazione di acqua entra a far parte del reticolo cristallino.

Seguendo le solite definizioni non potremo chiamarla « acqua di cristallizzazione » per il fatto che la sua tensione varia continuamente col variare della composizione della fase solida.

Nè possiamo definire l'amido umido una soluzione solida di amido secco ed acqua perchè in questo caso, con la progressiva perdita di acqua, si dovrebbe osservare uno spostamento continuo di alcune determinate righe

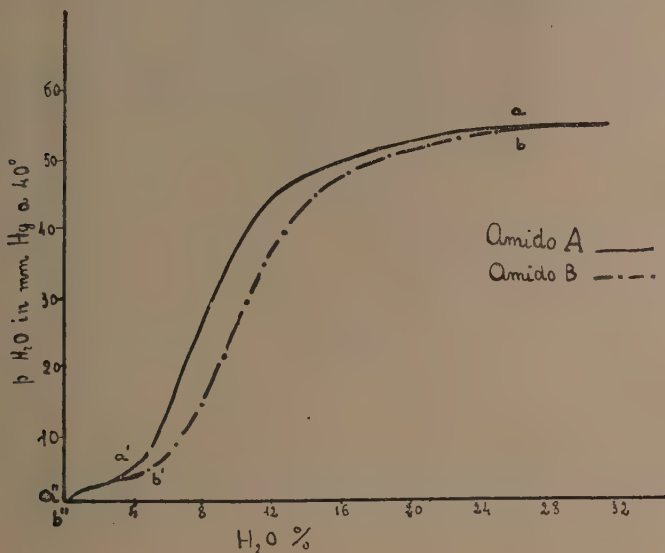


Fig. 3.

di interferenza fino alla trasformazione dello spettrogramma dell'amido umido in un nuovo spettrogramma: quello dell'amido secco.

Si osserva invece che, durante questo secondo stadio della disidratazione, le righe di interferenza si allargano fino a confondersi in aloni amorfi o a scomparire del tutto.

Si può agevolmente spiegare in qual modo quest'acqua entra a far parte del reticolo dell'amido se, secondo l'ipotesi di Meyer-Hopff-Mark⁽¹⁾ si considera l'amido costituito da molecole a catena disposte a zig-zag, e non rettilinee come quelle della cellulosa.

(1) « Ber. », 62, 1103 (1929).

Invece di avere una struttura compatta con forti legami laterali fra le molecole, come nella cellulosa, si ha nell'amido una struttura meno perfetta perchè fra le catene contigue, data la loro forma, rimangono dei vuoti nei quali prendono posto le molecole d'acqua che completano il reticolo cristallino.

Quando quest'acqua viene allontanata il reticolo dell'amido rimane incompleto in modo analogo a quanto si verifica in alcuni ossidi metallici preparati per demolizione termica a bassa temperatura di taluni sali.

Ma, mentre un successivo riscaldamento provoca la ricristallizzazione dell'ossido metallico, nell'amido non si può ottenere una simile trasformazione, perchè, per ottenere che le grosse molecole di amido assumano una sufficiente mobilità, bisognerebbe raggiungere una temperatura di molto superiore a quella di decomposizione dell'amido stesso.

Data la complessità di struttura e l'elevato peso molecolare dell'amido, le molecole di acqua non saranno trattenute nel reticolo tutte da legami ugualmente forti, e perciò la tensione del vapor d'acqua varia continuamente anche in questo secondo stadio della disidratazione.

Nella fig. 3 si può ancora osservare che le isoterme relative ai due tipi di amido hanno lo stesso andamento e che la B è spostata verso destra rispetto alla A e che quindi la quantità di acqua che entra a far parte del reticolo è maggiore per l'amido B.

Ora, dall'esame degli spettrogrammi A e B si nota che in essi le interferenze fondamentali hanno eguale posizione geometrica e che le differenze consistono nella diversa intensità di alcune righe (per l'amido A la riga 1 ha intensità zero) e nello sdoppiamento di una riga forte dell'amido A in due righe di intensità media (6 e 7) dell'amido B.

Si deve ammettere che le dimensioni delle due celle elementari sono le stesse e che le differenze sono dovute a variazioni nell'interno delle celle elementari⁽¹⁾ e quindi alla diversa quantità di acqua in alcuni punti del reticolo cristallino.

(1) NARAY-SZABÓ, «Zeit. f. physik. Chem. A.», 151, 420 (1930).

Fisiologia. — *Curva alcoolemica e beriberi sperimentale*⁽¹⁾.

Nota di A. GALAMINI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Partendo dall'osservazione che l'alcool etilico diminuisce la resistenza dei piccioni alla carenza di vitamina B₁, si è cercato se, a tale minore resistenza, corrispondessero modificazioni della curva alcoolemica provocata.

Gli esperimenti furono eseguiti su piccioni a quoziente beriberico noto, ai quali si dette la carica massima di vitamina B somministrando 2 gr. di lievito di birra per 5 giorni consecutivi. Prima e durante l'alimentazione con riso brillato, a distanza di tempo, si misurò la curva alcoolemica provocata a digiuno somministrando agli animali per bocca cc. 0.5 di alcool etilico assoluto diluiti in cc. 1.5 di acqua.

I risultati degli esperimenti furono i seguenti:

Piccione n. 46: Peso gr. 305. Esperimento eseguito nel primo giorno di dieta avitaminica B, dopo cinque giorni di grano gr. 30 e gr. 2 lievito di birra. Ore 9.25, alcool cc. 0.5, acqua cc. 1.5.

Ore . . .	9.15	9.30	9.40	10.00	11.00	14.00
Alcool ‰	0.14	0.47	0.57	0.68	0.40	0.08

Piccione n. 46: Peso gr. 308. Esperimento eseguito al quinto giorno di dieta avitaminica B. Ore 10.15, alcool cc. 0.5, acqua cc. 1.5.

Ore . . .	10.10	10.20	10.32	10.52	11.52	13.22	14.52
Alcool ‰	0.11	0.39	0.75	0.80	0.70	0.15	0.12

Piccione n. 46: Peso gr. 310. Esperimento eseguito al nono giorno di dieta avitaminica B. Ore 10.5, alcool cc. 0.5, acqua cc. 1.5.

Ore . . .	10.00	10.10	10.20	10.40	11.40	13.10	14.40
Alcool ‰	0.20	0.44	0.80	0.75	0.83	0.31	—

Piccione n. 47: Peso gr. 360. Ore 10.10, alcool cc. 0.5, acqua cc. 1 1/2.

Ore . . .	10.5	10.15	10.25	10.35	10.45	11.15	11.55
Alcool ‰	—	0.20	0.43	0.54	0.59	0.67	0.45

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 5 aprile 1936.

Ore . . .	12.35	13.15	14.35	15.35	16.35	17.30
Alcool ‰	0.42	0.23	0.12	0.16	0.21	0.05

Piccione n. 47: Peso gr. 350. Esperimento eseguito nel primo giorno di dieta avitaminica B, dopo cinque giorni di grano gr. 30 e lievito di birra gr. 2 giornalieri. Ore 10.35, alcool cc. 0.5, acqua cc. 1.5.

Ore . . .	10.30	10.40	10.50	11.10	12.00	13.30	15.00
Alcool ‰	0.05	0.20	0.53	0.76	0.76	0.40	0.15

Piccione n. 47: Peso gr. 340. Esperimento eseguito al quinto giorno di dieta avitaminica B. Ore 9.25, alcool cc. 0.5, acqua cc. 1.50.

Ore . . .	9.15	9.32	9.42	10.00	11.00	14.30
Alcool ‰	0.4	0.5	0.58	0.66	0.54	0.13

Piccione n. 47: Peso gr. 293. Esperimento eseguito al nono giorno di dieta avitaminica B. Ore 10.15, alcool cc. 0.5, acqua cc. 1.5.

Ore . . .	10.10	10.22	10.33	10.53	11.53	13.23	14.53
Alcool ‰	—	0.44	0.68	0.85	0.84	0.6	0.21

Piccione n. 47: Peso gr. 270. Esperimento eseguito all'undicesimo giorno di dieta avitaminica B. Il piccione mostrava evidente ipotonia degli arti (ali ed arti posteriori) e disturbi labirintici. Ore 10.22, alcool cc. 0.5, acqua cc. 1.5.

Ore . . .	10.20	10.27	10.37	10.57	11.57	13.30	15.00
Alcool ‰	0.01	0.52	0.67	0.90	0.89	0.56	0.46

Piccione n. 48: Peso gr. 350. Ore 16.40, alcool cc. 0.5, acqua cc. 1.5

Ore . . .	16.35	16.45	16.55	17.5	17.25	17.50	18.15	19.00
Alcool ‰	0.048	0.25	0.62	0.72	0.86	0.85	0.72	0.71

Piccione n. 48: Peso gr. 350. Esperimento eseguito nel primo giorno di dieta avitaminica B, dopo cinque giorni di grano gr. 30 e lievito di birra gr. 2 giornaliero. Ore 10.37, alcool cc. 0.5, acqua cc. 1.5.

Ore . . .	10.30	10.42	10.52	11.10	12.00	13.30	15.00
Alcool ‰	0.06	0.25	0.79	0.81	0.77	0.18	0.13

Piccione n. 48: Peso gr. 305. Esperimento eseguito al quinto giorno di dieta avitaminica B. Ore 9.30, alcool cc. 0.5, acqua cc. 1.5.

Ore . . .	9.15	9.35	9.45	10.5	11.5	14.00
Alcool ‰	0.09	0.73	0.84	0.98	0.58	0.14

Piccione n. 48: Peso gr. 295. Esperimento eseguito al nono giorno di dieta avitaminica B. Ore 10.15, alcool cc. 0.5, acqua cc. 1.5.

Ore . . .	10.10	10.23	10.34	10.54	11.54	13.24	11.54
Alcool ‰	0.11	0.41	0.73	0.81	0.38	0.48	0.36

Piccione n. 48: Peso gr. 285. Esperimento eseguito al tredicesimo giorno di dieta avitaminica B. Ore 10.8, alcool cc. 0.5, acqua cc. 1.5.

Ore . . .	10.00	10.13	10.23	10.43	11.43	13.13	14.43
Alcool ‰	—	0.16	0.54	0.85	0.85	0.44	—

Piccione n. 48: Peso gr. 260. Esperimento eseguito al sedicesimo giorno di dieta avitaminica B. Ore 10.35, alcool cc. 0.5, acqua cc. 1.5.

Ore . . .	10.30	10.40	10.50	11.10	11.40	13.00	14.40
Alcool ‰	0.054	0.47	0.75	0.74	0.41	0.15	0.10

Piccione n. 48: Peso gr. 310. Esperimento eseguito dopo circa un mese di trattamento con grano completo. Ore 3.10, alcool cc. 0.5, acqua cc. 1.5.

Ore . . .	3.5	3.15	3.25	3.45	4.15	5.15	6.15
Alcool ‰	0.22	0.30	0.76	0.85	0.90	0.61	0.38

L'esame dei risultati conduce alle seguenti osservazioni.

Il piccione n. 47 ingerendo a digiuno alcool al 25 ‰ nelle proporzioni dette ebbe un tasso alcoolemico del 0.87 ‰ dopo 80', di 0.23 ‰ dopo 270'. Durante la carenza di vitamina B i livelli massimi della alcoolemia furono raggiunti dopo 50' ca e furono di 0.76, 0.66, 0.85, 0.90 ‰. Le curve alcoolemiche provocate, quando si iniziavano e si rendevano manifesti i disturbi della carenza alimentare, si differenziavano per il fatto che il tasso di alcool nel sangue diminuiva più lentamente che in precedenza. Così nell'ultimo esperimento dopo 300' dalla ingestione dell'alcool, esso figurava presente nel sangue alla concentrazione di 0.60 ‰. Risultati analoghi si sono osservati col piccione n. 46.

I tassi alcoolemici più elevati furono nella prova iniziale di 0.68 ‰ dopo 45', di 0.40 dopo 105', di 0.07 dopo 280'. Durante la carenza di vitamina B, con la stessa quantità di alcool dopo 42' il tasso alcoolemico era di 0.80 ‰. Dopo 105' di 0.70, dopo 280' di 0.12. In uno stadio più avanzato di deficienza vitaminica era di 0.80 ‰ dopo 25', di 0.82 dopo 100'. I tassi alcoolemici in questo animale furono più elevati durante la carenza e si mantennero a più alto livello per un tempo più lungo.

Nel piccione n. 48, nella prova iniziale il tasso alcoolemico raggiunse il 0.85 ‰ dopo 45'; non vi fu differenza di comportamento nella seconda prova, eseguita all'inizio della dieta carenzata, si ebbe 0.81 ‰ dopo 45', 0.17 dopo 180'. Nelle prove successive i livelli massimi furono 0.98, 0.81, 0.85 dopo 45', 0.96 dopo 85'. Anche in questo piccione si osservò che in carenza la curva alcoolemica si mantenne per più tempo a livelli elevati. Nel secondo esperimento dopo 180' il tasso alcoolemico era sceso a 0.18 ‰, nel quarto e nel quinto dopo 195' era ancora 0.40 ‰ ca.

I risultati degli esami eseguiti nei tre piccioni inducono in complesso a ritenere che durante l'avitaminosi B, il tasso alcoolemico, provocato con ingestione di alcool per bocca, si mantenga a livelli elevati per un tempo maggiore che durante l'alimentazione normale.

Fisiologia. — *Decorso dell'attività cardiaca durante la asfissia*⁽¹⁾. Nota di A. GALAMINI, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Richet ha eseguito ricerche sulla morte del cuore nell'asfissia nel cane. Egli ha osservato che possono distinguersi quattro fasi; la prima di acceleramento e di rinforzo dei battiti cardiaci, la seconda di rallentamento e di rinforzo considerevole, la terza di rallentamento estremo senza rinforzo, la quarta di acceleramento e di indebolimento. L'A. ha inoltre osservato che la resistenza del cuore all'asfissia aumenta molto col rallentamento dei battiti cardiaci dovuto all'attività del vago, come ha dimostrato Morat, e che la morte del cuore non è in rapporto con la deficienza di ossigeno ma con la usura di sostanze, che possono essere riparate dall'ossigeno o con la produzione di veleni che non possono essere distrutti che in presenza di ossigeno. La durata di resistenza del cuore all'asfissia diminuisce dopo l'atropinizzazione e dopo la sezione dei vaghi. Nel cane normale la respirazione cessa prima dell'attività cardiaca per l'asfissia, nei cani atropinizzati l'attività cardiaca si arresta prima di quella respiratoria. Recentemente della

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana della R. Università di Roma,

(2) Nella seduta del 5 aprile 1936.

resistenza degli animali all'asfissia si è occupato G. Amantea il quale ha sperimentato sui ratti albinì sottoponendoli all'asfissia in ambiente confinato e assumendo come indice di un determinato grado di disturbo funzionale la scomparsa del riflesso corneale e la incapacità degli animali posti sul dorso a riacquistare la normale posizione sui piedi. L'A. ha osservato che i ratti adulti e non quelli in accrescimento, sottoposti ad asfissie successive, con esperienze quotidiane o a giorni alterni acquistavano una maggiore resistenza all'asfissia fino ad aumento del 100/100 e che questa resistenza poteva perdurare 30-40 giorni. Con trattamento con ossido di carbonio la resistenza aumentava subito, ma non persisteva. L'A. ritiene che il fatto sia in rapporto con modificazioni biochimiche importanti e forse con speciali adattamenti dei fermenti respiratori.

Nel corso di ricerche eseguite sull'azione di applicazioni chimiche localizzate sul cuore di conigli, cavia e ratti si è avuta occasione di osservare come il cuore di questi animali si comportasse durante l'asfissia. Le ricerche furono eseguite in questo modo: si metteva allo scoperto la trachea degli animali, che erano stati trattati con iniezione endoperitoneale di soluzione di uretano etilico in proporzione di un grammo per kg. Si immetteva in trachea una cannula metallica a doppia via, l'una per la immissione dell'aria nella fase inspiratoria, l'altra per la emissione nella fase espiratoria. Si apriva poi il torace e si metteva a nudo il cuore il cui apice era collegato con una leva scrivente, che segnava i battiti cardiaci sulla carta affumicata di un chimografo. Sulla medesima il tempo era segnato in secondi. Sulla breccia toracica si applicavano compresse con soluzione fisiologica a 37 C°, che erano rinnovate spesso; sul cuore gocciolava in permanenza la stessa soluzione fisiologica. Esaminando le grafiche raccolte si nota che il decorso dell'attività cardiaca durante l'asfissia fu presso che uguale nella cavia, nel coniglio e nel ratto. Arrestata la respirazione artificiale nel primo minuto si ebbe una notevole diminuzione della frequenza cardiaca. Dal tracciato cardiografico scomparvero le onde di second'ordine. Alla iniziale diminuzione di frequenza seguì un aumento dei battiti a 1' e comparvero evidenti onde di second'ordine, quando ancora i movimenti respiratori non erano comparsi. Seguì una terza fase durante la quale comparvero i movimenti respiratori. Il rapporto cardiorespiratorio andò progressivamente aumentando nel senso che gli atti respiratori si rarefacevano sempre più. Seguì una quarta fase caratterizzata da rarefazione dei battiti cardiaci accompagnate da compensatori aumenti e viceversa. È una fase di interferenza tra attività cardiaca e respiratoria, che corrisponde nel tracciato cardiografico ad una zona di grande irregolarità.

Nella quinta fase di esaurimento l'attività respiratoria e quella cardiaca si fecero meno intense sia per frequenza che per l'ampiezza degli atti respiratori e dei battiti cardiaci fino all'arresto. Dopo pochi secondi seguì la sesta fase terminale. L'attività del cuore riprese con frequenza inferiore di

molto a quella iniziale dell'esperimento. Comparvero gruppi simili a quelli descritti dal Luciani; poi ad ogni contrazione del seno e dell'atrio non corrispose la contrazione ventricolare. Il numero delle contrazioni seno-atriale precedenti una contrazione ventricolare aumentò progressivamente. L'ampiezza del cardiopalma diminuì fino all'arresto. Si ebbe l'impressione che nel passaggio dalla V alla VI fase si interrompesse l'attività funzionale dei centri bulbari, anche perchè la lesione bulbare, fatta in quel momento, non provocò turbe dell'attività cardiaca. Riprendendo la respirazione artificiale, immediatamente dopo l'arresto del cuore, al termine della quinta fase l'attività cardiaca riprese rapidamente con la intensità iniziale. Lasciando trascorrere un certo tempo si rese necessario un periodo di respirazione più lungo perchè l'attività cardiaca talvolta riprendesse gradatamente. Questi risultati confermano pienamente i risultati di Richet per il cane nel senso che parlano anche essi per la usura nel cuore di una qualche sostanza, che si riattiva per opera dell'ossigeno o di prodotti tossici catabolici, distrutti da processi di ossidazione. La quarta fase suddescritta della interferenza funzionale compensatoria tra attività respiratoria e cardiaca è di origine centrale perchè scompare nel tracciato cardiografico dopo la recisione bilaterale del vago. A seguito di questo intervento operatorio si è notata una più rapida esauribilità del cuore e una più lenta ripresa; fenomeni connessi probabilmente con un modificato chimismo da mancata azione dei centri superiori bulbari. Le osservazioni fatte su asfissie successive hanno dimostrato che vale per il cuore quanto fu osservato da Amantea per l'organismo complessivo, nel senso che se al termine di una asfissia si pratica la respirazione artificiale e si riprende il cuore esso diviene successivamente più resistente all'arresto della respirazione. Calcolando il tempo di durata delle prime cinque fasi descritte si notarono le seguenti differenze. In un ratto la resistenza alla asfissia da 82" salì successivamente a 158" a 256" a 270". In un altro caso da 44" a 107". In una cavia da 53" a 102" 127". In un coniglio da 92" a 330" 230". Quando, eseguendo asfissie successive, esse furono iniziate lasciando breve intervallo dalla nuova ripresa dell'attività cardiaca la durata dell'asfissia successiva divenne anzichè più lunga, rapidamente più breve. È cioè necessario un periodo di restauro perchè il cuore riacquisti le normali condizioni di attività dopo l'asfissia.

Fisiologia (Chimica biologica). — *Sul comportamento dei corpi creatinici, del solfo e del cloro urinarii nel digiuno e nella rialimentazione* ⁽¹⁾. Nota di V. ZAGAMI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

In una Nota precedente ⁽³⁾ abbiamo ampiamente esposto un piano generale di lavoro, che riflette lo studio del metabolismo azotato durante i processi ricostruttivi, nella rialimentazione dopo digiuno, e in essa abbiamo riferito anche i primi risultati ottenuti sperimentando con tale intento.

In particolare, è risultato dalle nostre prime indagini, che nei ratti, rialimentati (dopo digiuni più o meno spinti) con una dieta sintetica, in cui la caseina rappresentava l'unica sorgente azotata, ma in cui erano presenti contemporaneamente, in opportune proporzioni, glicidi, lipidi, vitamine e sali minerali, il bilancio esatto di azoto non si ristabiliva appena risultava recuperato tutto il peso corporeo perduto e appena risultava colmata per intero la perdita di azoto subita durante il digiuno, ma solo in un tempo successivo. Ne seguiva, che, in definitiva, ad equilibrio azotato raggiunto, si aveva un sensibile guadagno in azoto, rispetto alla quota perduta in fase di inanizione. A tale guadagno di azoto non corrispondeva sempre un corrispondente guadagno del peso corporeo, cosicchè si aveva, che il valore del rapporto dell'azoto ritenuto rispetto al peso recuperato durante il periodo ricostruttivo, superava il valore del rapporto dell'azoto perduto rispetto al peso perduto durante il periodo di inanizione.

A parte la differenza di grado osservata nei diversi animali esplorati, si aveva sempre in tal caso una sovra-ritenzione di azoto rispetto alla quota perduta durante il digiuno, e tale sovra-ritenzione non poteva — tranne che a volte, e solo in parte — venire giustificata da un corrispondente sovra-guadagno del peso corporeo.

Coi soli dati relativi al comportamento dell'azoto totale, da noi in principio raccolti, non eravamo nella possibilità di precisare il significato, che potesse spettare a questa sovra-ritenzione di azoto. Si poteva infatti pensare, che durante la ricostruzione l'organismo immagazzinasse una certa quota di azoto — sotto forma di protidi di riserva, e non facenti parte in-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 5 aprile 1936.

(3) V. ZAGAMI, A. CURATOLO e V. CAPRARO, *Sul comportamento del metabolismo azotato durante i processi ricostruttivi nella rialimentazione dopo digiuno*. «Bull. R. Acc. Medica di Roma», 1935, 61, 370; «Riv. di Biol.», 1936.

tegrante della costituzione cellulare —, oltre quella necessaria ed utilizzata per la effettiva riparazione dei vuoti cellulari indotti dall' inanizione; si poteva pensare anche ad una sovra-riparazione degli stessi vuoti, nel senso che il rapporto

$$\frac{\text{sostanze proteiche di costituzione}}{\text{sostanze ternarie di riserva}}$$

nella quota globale riparata o ricostruita durante la rialimentazione fosse superiore, rispetto a quello che era nella quota globale demolita durante il digiuno.

Comunque, per meglio chiarire il significato di questa sovra-ritenzione azotata, e in base a molteplici considerazioni, che non possiamo precisare qui, per la limitazione che esige la presente Nota, ma che ci riserviamo di esporre nel lavoro in esteso, abbiamo stimato utile studiare, negli stessi animali di esperimento, accanto al comportamento dell'azoto totale, anche quello dei corpi creatinici (N-creatininico e N-creatinico), nonché quello del Solfo (S-minerale, S-coniugato, e S-neutro) e del Cloro dell'urina.

Accenniamo solo, per ora, a giustificazione delle nostre ricerche, che è noto — specie dopo i recenti lavori di E. F. Terroine e collaboratori ⁽¹⁾ — quale grande importanza abbia la conoscenza della ripartizione dei rappresentanti azotati urinari per la esatta interpretazione fisiologica dei fatti connessi col metabolismo azotato; e che è noto pure come il comportamento del solfo sia particolarmente legato od associato al metabolismo proteico.

Le nostre esperienze sono state condotte su quattro ratti albin, maschi, in buone condizioni di nutrizione, giovani, ma a sviluppo completo e a peso corporeo ormai pressochè costante.

Su ogni ratto abbiamo eseguito quattro successivi periodi di osservazioni sperimentali, preceduti da uno preparatorio di almeno dieci giorni, in cui non si eseguivano determinazioni, servendo esso ad abituare l'animale alla dieta sintetica studiata, e a permettergli di mettersi in perfetto bilancio di azoto, dopo superata la fase di squilibrio, che si ha sempre, allorquando si passa da una dieta con un determinato contenuto di azoto ad altra con contenuto diverso.

La dieta sintetica, qualitativamente completa, era così composta: caseina g. 20, amido g. 59, olio di ulive g. 10, lievito di birra g. 5, olio di fegato di merluzzo cc. 2, miscuglio salino di Pappenheimer, Mc Cann e Zucker g. 4, acqua cc. 80. Da notare, che il miscuglio salino da noi adoperato conteneva solfati soltanto in quantità minime (g. 0,025 %) sotto forma di solfato di manganese e solfato allume-potassico.

(1) E. F. TERROINE e coll., *La répartition des représentants urinaires du métabolisme azoté et sa signification physiologique*. « Bull. Soc. Chim. Biol. », 1933, 15, 23; 1933, 15, 42; 1933, 15, 203; 1933, 15, 235; 1933, 15, 1163; 1934, 16, 109; 1935, 17, 1741.

Nel primo periodo (pre-periodo di osservazione), della durata di 6-8 giorni, e immediatamente successivo a quello preparatorio, gli animali sono stati alimentati con la dieta sintetica suddetta. Si è accertato il perfetto bilancio azotato così raggiunto, e si sono assunti i valori normali, relativi alla eliminazione giornaliera con l'urina dei corpi creatinici, delle varie frazioni di zolfo, e del cloro.

Nel secondo periodo (periodo di inanizione), immediatamente successivo al primo, gli animali sono stati lasciati a digiuno, con sola acqua a volontà, per 4-6 giorni, in maniera da subire una perdita del peso corporeo del 18-27 %. In tale periodo si è accertata la perdita complessiva di azoto e al solito la eliminazione delle sostanze su accennate.

Nel terzo periodo (periodo di rialimentazione), gli animali sono stati rialimentati con la stessa dieta ricevuta nel primo periodo; si è studiato il recupero dell'azoto, e, al solito, l'eliminazione dei corpi creatinici, del solfo e del cloro. Tale periodo si è esteso fino a quando gli animali hanno presentato di nuovo esatto bilancio di azoto.

Nel quarto periodo (post-periodo di osservazione), gli animali, in perfetto bilancio azotato, sono stati seguiti ancora per 6-8 giorni, sempre con la dieta solita.

Durante i quattro periodi, a giorni alterni, per ogni animale si raccoglievano tutte le feci e le urine emesse nelle 48 ore, e si procedeva alla determinazione dell'N-totale con il micro-Kjeldhall, utilizzando per la distillazione dell'NH₃ l'apparecchio di Parnas e Wagner; nell'urina si procedeva poi alla determinazione dell'N-creatininico e dell'N-creatinico con il metodo colorimetrico di Folin; a quella del S-minerale, del S-coniugato e del S-neutro col metodo di Fiske, e a quella del Cl col metodo di Volhard.

Ci riserviamo di esporre per esteso nel lavoro completo tutti i risultati ottenuti; ci limitiamo invece a presentare qui, schematicamente, nelle tabelle annesse, solo i valori medi.

Risultano dall'esame di questi i fatti seguenti:

1) *Corpi creatinici.* Nel periodo di digiuno (in media di 4 giorni e mezzo), durante il quale gli animali hanno presentato un bilancio negativo di azoto di g. 0,9249 (in media) — rispetto ai valori del pre- e post-periodo di osservazione — si è avuta una diminuzione notevole dell'azoto dei corpi creatinici eliminati giornalmente con l'urina (da una media di mg. 9,04 nel pre- e post-periodo normale di osservazione, ad una media di mg. 6,07 nel periodo di inanizione). Distintamente si è avuta una diminuzione dell'N-creatininico (da mg. 8,28 a mg. 3,14) e un aumento invece dell'N-creatinico (da mg. 0,76 a mg. 2,93); cosicchè mentre l'N-creatininico rappresentava normalmente il 91,4 %, e l'N-creatinico l'8,6 % dell'azoto complessivo dei corpi creatinici, nel digiuno invece gli stessi rapporti percentuali corrispondevano a 52,7 % per l'N-creatininico e a 47,3 % per l'N-creatinico. Durante il periodo di digiuno si è avuto pure un aumento dell'azoto

TABELLA I.

Indicazione del periodo sperimentale	Data	Giorni di espe- rienza	Peso del corpo g	Medie	
				N- totale ingerito g	Urinario g
Per. I. Pre-periodo di osservazione. .	5-13 gennaio	8	240 → 240	0,4876	0,4211
» II. Periodo di inanizione	13-17 gennaio	4	240 → 195	0	0,2050
» III. Periodo di rialimentazione . .	17 genn.-12 febr.	26	195 → 280	0,5275	0,3765
» IV. Post-periodo di osservazione .	12-18 febbraio	6	280 → 280	0,4489	0,3791
Media pre- e post-periodo di osservazione	—	7	260	0,4682	0,4001
Per. I. Pre-periodo di osservazione. .	15-25 gennaio	10	255 → 255	0,4695	0,3865
» II. Periodo di inanizione	25-31 gennaio	6	255 → 185	0	0,1683
» III. Periodo di rialimentazione . .	31 genn.-6 marzo	34	185 → 305	0,5032	0,3569
» IV. Post-periodo di osservazione .	6-14 marzo	8	305 → 305	0,4761	0,4022
Media pre- e post-periodo di osservazione	—	9	280	0,4728	0,3943
Per. I. Pre-periodo di osservazione. .	5-13 gennaio	8	270 → 270	0,4968	0,4471
» II. Periodo di inanizione	13-17 gennaio	4	270 → 220	0	0,2012
» III. Periodo di rialimentazione . .	17 genn.-4 febr.	18	220 → 280	0,5646	0,4338
» IV. Post-periodo di osservazione .	4-10 febbraio	6	280 → 280	0,4457	0,3858
Media pre- e post-periodo di osservazione	—	7	275	0,4712	0,4164
Per. I. Pre-periodo di osservazione. .	3-13 gennaio	10	275 → 275	0,5041	0,4337
» II. Periodo di inanizione	13-17 gennaio	4	275 → 220	0	0,1600
» III. Periodo di rialimentazione . .	17 genn.-24 febr.	38	220 → 295	0,5419	0,3998
» IV. Post-periodo di osservazione .	24 febr.-4 marzo	8	295 → 295	0,4321	0,3590
Media pre- e post-periodo di osservazione	—	9	285	0,4681	0,3963
Medie co					
Per. I. Pre-periodo di osservazione. .	—	9	260	0,4895	0,4221
» II. Periodo di inanizione	—	4,5	260 → 205	0	0,1836
» III. Periodo di rialimentazione . .	—	29	205 → 290	0,5343	0,3918
» IV. Post-periodo di osservazione .	—	7	290	0,4507	0,3815
Media pre- e post-periodo di osservazione	—	8	275	0,4701	0,4018

Bilancio	N- totale complessiva- mente perauto (—) o ritenuto (+)	Peso complessiv. perdu- to (—) o guadagnato (+)	Medie giornaliere										Cl della urina	Rapporto N-totale S-totale nell'urina
			Corpi creatinici dell'urina			Solfo dell'urina								
			N- creati- ninico mg	N- creati- nico mg	N- creati- ninico + creati- nico mg	S- acido mine- rale mg	S- acido coniugato mg	S- acido totale mg	S- neutro mg	S- totale acido + neutro mg				
g	g	g	mg	mg	mg	mg	mg	mg	mg	mg	mg			
+ 0,0011	+ 0,0088	0	7,54	1,18	8,72	13,36	0,46	13,82	3,89	17,72	65,18	23,7		
— 0,2212	— 0,8850	— 45	3,25	3,32	6,57	7,71	0,22	7,94	2,29	10,24	2,10	20,0		
+ 0,0895	+ 2,3293	+ 85	8,32	0,82	9,14	10,37	0,61	10,99	3,50	14,50	73,43	25,9		
+ 0,0074	+ 0,0447	0	6,31	1,30	7,61	11,95	0,21	12,17	3,25	15,43	66,41	24,5		
+ 0,0042	+ 0,0267	0	6,93	1,24	8,17	12,65	0,33	12,99	3,57	16,57	65,79	24,1		
+ 0,0068	+ 0,0687	0	10,03	1,08	11,11	11,53	0,48	12,02	3,07	15,10	64,50	25,6		
— 0,1962	— 1,1775	— 70	2,44	3,86	6,30	6,44	1,48	7,92	2,80	10,73	4,80	15,6		
+ 0,0830	+ 2,8218	+ 120	9,18	0,94	10,12	9,32	1,47	10,79	2,66	13,46	70,36	26,5		
+ 0,0011	+ 0,0084	0	10,34	0,35	10,71	8,89	2,19	11,08	2,49	13,58	67,05	29,6		
+ 0,0039	+ 0,0385	0	10,19	0,72	10,91	10,21	1,34	11,55	2,78	14,34	65,77	27,6		
— 0,0018	— 0,0153	0	7,41	0,89	8,30	15,13	0,24	15,37	3,32	18,69	67,13	23,9		
— 0,2261	— 0,9045	— 50	3,51	2,90	6,42	8,77	0,00	8,77	1,61	10,38	1,75	19,3		
+ 0,0662	+ 1,1917	+ 60	9,31	1,23	10,54	13,86	0,87	14,73	2,72	17,45	75,48	24,8		
+ 0,0085	+ 0,0515	0	8,64	0,00	8,64	12,35	0,88	13,23	2,55	15,78	69,33	24,4		
+ 0,0033	+ 0,0181	0	8,02	0,45	8,47	13,74	0,56	14,30	2,94	17,24	68,23	24,1		
+ 0,0018	+ 0,0189	0	7,71	1,26	8,98	14,83	0,69	15,52	3,23	18,76	60,71	23,1		
— 0,1831	— 0,7325	— 55	3,42	1,63	5,06	6,40	0,80	7,20	1,43	8,63	5,92	18,5		
+ 0,0869	+ 3,3036	+ 75	8,64	0,78	9,43	12,31	1,45	13,76	2,87	16,64	74,18	24,0		
+ 0,0209	+ 0,1673	0	8,26	0,00	8,26	10,69	1,02	11,72	2,11	13,83	62,77	25,9		
+ 0,0113	+ 0,0931	0	7,99	0,63	8,62	12,76	0,86	13,62	2,67	16,30	61,74	24,5		
+ 0,0022	+ 0,0203	0	8,17	1,10	9,27	13,71	0,47	14,18	3,38	17,56	64,38	24,1		
— 0,2066	— 0,9249	— 55	3,14	2,93	6,07	7,35	0,62	7,97	2,03	10,00	3,64	18,3		
+ 0,0817	+ 2,4116	+ 85	8,86	0,94	9,80	11,47	1,10	12,57	2,94	15,51	73,36	25,3		
+ 0,0096	+ 0,0679	0	8,39	0,41	8,80	10,97	1,07	12,04	2,60	14,60	66,38	26,1		
+ 0,0059	+ 0,0441	0	8,28	0,76	9,04	12,34	0,72	13,09	2,99	16,08	65,38	25,1		

3-4-5-6.

TABELLA II.

Indicazione dei periodi sperimentali	$\frac{N\text{-creatininico}}{N\text{-totale}} \times 100$	$\frac{N\text{-creatinico}}{N\text{-totale}} \times 100$	$\frac{N\text{-creatininico} + N\text{-creatinico}}{N\text{-totale}} \times 100$	$\frac{N\text{-creatininico}}{N\text{-creatininico} + N\text{-creatinico}} \times 100$	$\frac{N\text{-creatinico}}{N\text{-creatininico} + N\text{-creatinico}} \times 100$	$\frac{S\text{-acido}}{S\text{-totale}} \times 100$	$\frac{S\text{-neutro}}{S\text{-totale}} \times 100$	$\frac{S\text{-minerale}}{S\text{-acido}} \times 100$	$\frac{S\text{-accoppiato}}{S\text{-acido}} \times 100$	$\frac{N\text{-totale}}{S\text{-totale}} \times 100$
Periodo I										
Pre-periodo di osservazione .	1,95	0,27	2,22	88,0	12,0	80,7	19,3	96,6	3,4	24,1
Periodo II										
Periodo di inanizione	1,73	1,59	3,32	52,7	47,3	79,8	20,2	91,8	8,2	18,3
Periodo III										
Periodo di rialimentazione . .	2,27	0,24	2,51	90,4	9,6	80,7	19,3	91,1	8,9	25,3
Periodo IV										
Post-periodo di osservazione .	2,19	0,13	2,32	94,8	5,2	82,3	17,7	90,7	9,3	26,1
Media										
Pre- e post-periodo di osserv.	2,07	0,20	2,27	91,4	8,6	81,5	18,5	93,6	6,4	25,1

dei corpi creatinici rispetto all' N-totale dell'urina (da 2,27 % a 3,32 %), e tale aumento è da ascriversi unicamente all' N-creatinico, che è passato da 0,20 % a 1,59 %, poichè l' N-creatininico ha subito invece una diminuzione (da 2,07 % a 1,73 %).

Nel periodo di rialimentazione (durato in media 29 giorni), durante il quale si è avuto un bilancio positivo di azoto di g. 2,4116 (in media), — sempre rispetto ai valori del pre- e post-periodo di osservazione — non si sono avute modificazioni apprezzabili.

2) *Solfo*. Nel periodo di digiuno si è avuta una notevole diminuzione del S-totale eliminato con le urine (da mg. 16,08 a mg. 10, in media, al giorno). Tale diminuzione è stata più accentuata a carico del S-ossidato (da mg. 13,09 a mg. 7,97, in media), che del S-neutro (da mg. 2,99 a mg. 2,03, in media), per cui mentre nel periodo normale il S-neutro rappresentava il 18,5 % del S-totale, nel periodo di digiuno rappresentava invece il 20,2 %.

Lievi variazioni ha presentato il S-accoppiato. Notevole è stata invece la variazione del rapporto N-totale/S-totale dell'urina, che da un valore di 25,1, in media, è passato, durante il digiuno, ad un valore di 18,3.

Nel periodo di rialimentazione tutti i valori concernenti il S (compreso lo stesso rapporto N-totale/S-totale dell'urina) sono stati pressochè identici a quelli, che si sono avuti nel pre- e post-periodo di osservazione.

3) *Cloro*. Nei riguardi dell'eliminazione del Cl si è avuta una notevolissima diminuzione (da mg. 65,38 a mg. 3,64, in media, al giorno) durante il periodo di digiuno, e il ritorno immediato al valore normale nel periodo di rialimentazione.

In Note successive esporremo altri dati ottenuti su animali diversamente rialimentati: ci riserviamo pertanto di discutere i presenti risultati insieme con quelli che saranno riferiti.

Fisiologia (Chimica biologica). — *Ancora sul comportamento dei corpi creatinici, del solfo, del fosforo e del cloro urinarii nel digiuno e nella rialimentazione*⁽¹⁾. Nota di V. ZAGAMI e V. CAPRARO, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. S. Baglioni.

In una Nota⁽³⁾ precedente abbiamo riferito, che nei ratti, rialimentati, dopo digiuni più o meno spinti, con dieta sintetica, in cui la caseina rappresentava l'unica sorgente azotata, ma in cui erano presenti contemporaneamente, in opportune proporzioni, glicidi, lipidi, vitamine e sali minerali, si aveva sempre una sovra-ritenzione di azoto rispetto alla quota perduta durante il digiuno.

Allo scopo di chiarire il significato di questa sovra-ritenzione azotata, che si aveva durante i processi ricostruttivi nella rialimentazione dopo digiuno, abbiamo stimato utile studiare, negli stessi animali di esperimento, accanto al comportamento dell'azoto totale, anche quello dei corpi creatinici, del solfo, del fosforo e del cloro dell'urina; e già in altra Nota⁽⁴⁾ abbiamo riferito i primi risultati in merito ottenuti.

Poichè risultava dalle nostre prime indagini, che non solo gli animali rialimentati con dieta sintetica qualitativamente completa, ma anche quelli rialimentati con dieta priva del tutto o quasi di componenti minerali, presentavano parimenti sovra-ritenzione azotata, abbiamo creduto utile studiare, anche in questa particolare condizione di rialimentazione, il comportamento dei costituenti urinarii sopra ricordati.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 19 aprile 1936.

(3) V. ZAGAMI, A. CURATOLO e V. CAPRARO, *Sul comportamento del metabolismo azotato durante i processi ricostruttivi nella rialimentazione dopo digiuno*. «Bull. R. Acc. Med. di Roma», 1935, 61, 370; «Riv. di Biol.», 1936, in corso di stampa.

(4) ZAGAMI V., *Sul comportamento dei corpi creatinici, del solfo e del cloro urinarii nel digiuno e nella rialimentazione*. Questi «Rendiconti», questo fascicolo, p. 629.

Le nostre esperienze sono state condotte su tre ratti albin, maschi, in buone condizioni di nutrizione, giovani, ma a sviluppo completo, e a peso corporeo ormai pressochè costante.

Su ogni ratto abbiamo eseguito quattro o cinque successivi periodi di osservazioni sperimentali, preceduti da uno preparatorio, di almeno dieci giorni, in cui non si eseguivano determinazioni, servendo esso soltanto ad abituare l'animale alla dieta sintetica studiata, e a permettergli di mettersi in perfetto bilancio azotato, dopo superata la fase di squilibrio, che si ha sempre, allorquando si passa da una dieta con un determinato contenuto di azoto ad altra con contenuto diverso.

Nel primo periodo (pre-periodo di osservazione), della durata di 6-11 giorni, e immediatamente successivo a quello preparatorio, gli animali sono stati alimentati con una dieta sintetica, qualitativamente completa, e così composta: caseina gr. 20, amido gr. 59, olio di ulive gr. 10, lievito di birra gr. 5, miscuglio salino di Pappenheimer, Mc Cann e Zucker gr. 4, olio di fegato di merluzzo cc. 2, acqua cc. 80. Da notare che il miscuglio salino da noi adoperato conteneva solfati soltanto in quantità minime (0.025 %) sotto forma di solfato di manganese e solfato allume-potassico, e non conteneva fosfati.

Nel secondo periodo (periodo di inanizione), immediatamente successivo al primo, gli animali sono stati lasciati a digiuno, con sola acqua a volontà, per 4-5 giorni, in maniera da subire una perdita del peso corporeo del 17-22 %.

Nel terzo periodo (periodo di rialimentazione), gli animali sono stati rialimentati con la stessa dieta ricevuta nel primo periodo, ma privata del miscuglio salino, e contenente in sostituzione una pari quantità di amido in più.

Tale periodo si è esteso fino a quando gli animali hanno presentato di nuovo esatto bilancio di azoto.

Nel quarto periodo (post-periodo di osservazione), gli animali in perfetto bilancio azotato, sono stati seguiti ancora per 6-8 giorni, alimentati sempre con dieta priva di costituenti minerali.

Nel quinto periodo, infine, uno dei ratti è stato alimentato ancora con la stessa dieta, ma completata con il miscuglio salino — così come nel primo periodo —, ed un altro è stato alimentato invece con la stessa dieta contenente — in luogo del miscuglio salino completo — solo NaCl in ragione del 0.30 % della dieta.

Durante i vari periodi, a giorni alterni, per ogni animale si raccoglievano tutte le feci e le urine emesse nelle 48 ore, e si procedeva alla determinazione dell'N-totale con il micro-Kjeldahl; nell'urina poi si procedeva alla determinazione dell'N-creatininico e dell'N-creatinico col metodo di Folin; a quella del S-minerale, del S-coniugato e del S-neutro col metodo di Fiske; a quella del P col metodo di Bell-Doisy modificato da Briggs,

e a quella del Cl col metodo di Volhard. Con il micro-Kjeldahl si determinava pure l'N-totale della dieta.

Ci riserviamo di esporre per esteso nel lavoro completo tutti i risultati ottenuti; qui ci limitiamo invece a presentare, schematicamente, nelle tabelle annesse, solo i valori medi.

Risultano dall'esame di questi i fatti seguenti:

1) *Corpi creatinici*. Il comportamento dell'azoto dei corpi creatinici e il rapporto di questo con l'N-totale dell'urina, nel periodo di digiuno, è stato perfettamente identico a quello già da noi descritto nella precedente Nota ⁽¹⁾.

Nel periodo di rialimentazione (effettuata con dieta priva di costituenti minerali), durato in media 29 giorni, e durante il quale si è avuto un bilancio positivo di azoto di gr. 2.2253 (in media), il comportamento dei corpi creatinici — contrariamente a quanto abbiamo visto ⁽¹⁾ avvenire negli animali rialimentati con dieta completa anche dal punto di vista salino — ha persistito pressochè identico a quello che era stato nel periodo di digiuno, e differente da quello che era stato nel pre-periodo di osservazione. Rispetto ai valori di questo ultimo periodo si è avuto, infatti, una diminuzione netta dell'N-creatininico (da una eliminazione media giornaliera di mg. 7.18 ad una eliminazione di mg. 3.99); un aumento lieve dell'N-creatinico (da mg. 0.97 a mg. 1.07); una diminuzione netta della somma N-creatininico + N-creatinico (da mg. 8.15 a mg. 5.08); cosicchè l'N-creatininico rappresentava, in queste condizioni sperimentali, il 78,5 % e l'N-creatinico il 21,5 % dell'azoto complessivo dei corpi creatinici, in luogo dell'87,8 % e del 12,2 % quale era normalmente nel pre-periodo di osservazione.

Nello stesso periodo di rialimentazione con dieta priva di costituenti minerali — sempre rispetto ai valori del pre-periodo di osservazione — si è avuto una diminuzione dell'azoto dei corpi creatinici rispetto all'azoto totale dell'urina (da 1.96 % a 1.35 %) e tale diminuzione è da ascriversi principalmente all'N-creatininico.

Variazioni del tutto identiche a queste descritte si sono avute anche nel post-periodo di osservazione (durante il quale gli animali presentavano esatto bilancio di azoto), allorchando si continuava a somministrare dieta priva di costituenti minerali o fornita solo di NaCl. Tutti i valori invece sono ritornati corrispondenti a quelli del pre-periodo di osservazione, allorchando, alla dieta priva di costituenti minerali, si sostituiva quella fornita di miscuglio salino completo.

2) *Solfo*. Nel periodo di digiuno il comportamento del solfo è stato perfettamente identico a quello già da noi descritto nella precedente Nota.

Nel periodo di rialimentazione, con dieta priva di costituenti minerali, tutti i valori concernenti il S (compreso lo stesso rapporto N-totale/S-totale dell'urina) sono stati pressochè identici a quelli del pre-periodo di os-

(1) V. ZAGAMI, loc. cit.

TABELLA I.

Indicazione del periodo sperimentale	Data	Giorni di espe- rienza	Peso del corpo g	Medie	
				N- totale ingerito g	Urinario g
Periodo I. Pre-periodo di osservazione (dieta con sali minerali).	12-23 febbraio	11	275 → 270	0,4642	0,3840
» II. Periodo di inanizione . . .	23-27 febbraio	4	270 → 210	0	0,1975
» III. Periodo di rialimentazione (dieta senza sali minerali)	27 febr.-23 marzo	24	210 → 280	0,5250	0,3762
» IV. Post-periodo di osservazione (dieta senza sali minerali)	23-31 marzo	8	280 → 275	0,4456	0,3712
» V. Post-periodo di osservazione (dieta con solo NaCl). .	31 marzo-8 aprile	8	275 → 275	0,4707	0,4241
Periodo I. Pre-periodo di osservazione (dieta con sali minerali).	12-18 febbraio	6	270 → 280	0,4848	0,4233
» II. Periodo di inanizione . . .	18-23 febbraio	5	280 → 220	0	0,1449
» III. Periodo di rialimentazione (dieta senza sali minerali)	23 febr.-19 marzo	24	220 → 290	0,5008	0,3895
» IV. Post-periodo di osservazione (dieta senza sali minerali)	19-27 marzo	8	290 → 285	0,4141	0,3507
» V. Post-periodo di osservazione (dieta con sali minerali).	27 marzo-6 aprile	10	285 → 285	0,4442	0,3895
Periodo I. Pre-periodo di osservazione (dieta con sali minerali).	26 genn.-3 febbraio	8	285 → 280	0,5120	0,4464
» II. Periodo di inanizione . . .	3-7 febbraio	4	280 → 230	0	0,1525
» III. Periodo di rialimentazione (dieta senza sali minerali)	7 febbraio-19 marzo	40	230 → 290	0,4714	0,3666
» IV. Post-periodo di osservazione (dieta senza sali minerali)	19-27 marzo	8	290 → 285	0,4505	0,3850
Medie co					
Periodo I. Pre-periodo di osservazione (dieta senza sali minerali)	—	8	277 → 277	0,4780	0,4179
» II. Periodo di inanizione . . .	—	4	277 → 220	0	0,1650
» III. Periodo di rialimentazione (dieta senza sali minerali)	—	29	220 → 287	0,4990	0,3774
» IV. Post-periodo di osservazione (dieta senza sali minerali)	—	8	287 → 282	0,4367	0,3689

TABELLA I.

Bilancio	N- totale complessivamente perduto(-) o ritenuto (+)	Peso complessiv. perduto (-) o guadagnato (+)	Medie giornaliere										Cl della urina	P della urina	Rapporto N-totale nell'urina S-totale
			Corpi creatinici dell'urina			Solfo dell'urina									
			N- creatinico	N- creatinico	N- creatinico + creatinico	S- acido minerale	S- acido coniugato	S- acido totale	S- neutro	S- totale acido + neutro					
g	g	g	mg	mg	mg	mg	mg	mg	mg	mg	mg	mg	mg		
+ 0,0216	+ 0,2165	- 5	6,55	1,47	8,02	12,55	0,23	12,78	3,17	15,95	68,57	10,3	24,1		
- 0,2180	- 0,8720	- 60	3,26	2,93	6,19	9,48	0,40	9,88	1,36	11,24	5,65	15,1	17,5		
+ 0,0994	+ 2,3871	+ 70	3,68	1,10	4,78	10,90	0,89	11,79	2,48	14,27	5,86	25,9	26,3		
+ 0,0091	+ 0,0731	- 5	3,15	1,43	4,58	10,28	0,40	10,68	2,44	13,12	2,66	26,7	28,2		
- 0,0054	- 0,0435	0	3,34	1,55	4,89	12,86	1,61	14,47	2,34	16,81	66,36	28,8	25,2		
+ 0,0132	+ 0,0793	+ 10	6,74	1,09	7,83	12,78	1,13	13,91	1,90	15,81	61,58	4,1	26,7		
- 0,1605	- 0,8029	- 60	2,92	2,43	5,35	8,50	1,98	10,48	1,69	12,17	4,38	10,4	11,9		
+ 0,0741	+ 1,7772	+ 70	4,01	1,16	5,17	12,78	1,58	14,36	1,93	16,29	7,83	25,5	23,9		
+ 0,0251	+ 0,2010	- 5	3,64	1,08	4,72	10,38	0,65	11,03	1,70	12,73	3,30	26,5	27,5		
+ 0,0030	+ 0,0308	0	7,07	1,22	8,29	10,29	1,76	12,05	0,94	12,99	55,61	8,6	29,9		
+ 0,0040	+ 0,0312	- 5	8,25	0,36	8,61	13,13	0,99	14,12	2,74	16,86	72,06	11,9	24,4		
- 0,1702	- 0,6810	- 50	3,35	2,13	5,48	5,18	0,54	5,72	2,74	8,46	4,32	11,7	18,0		
+ 0,0628	+ 2,5116	+ 60	4,29	1,02	5,31	12,15	0,77	12,92	2,20	15,12	7,79	23,6	24,2		
+ 0,0160	+ 0,1282	- 5	4,00	0,82	4,82	11,26	0,99	12,25	1,82	14,07	3,13	28,7	27,1		
9, 10 e 11.															
+ 0,0129	+ 0,1090	0	7,18	0,97	8,15	12,82	0,78	13,60	2,60	16,20	67,40	8,7	25,7		
- 0,1829	- 0,7853	- 57	3,18	2,50	5,68	7,72	0,97	8,69	1,93	10,62	4,78	12,4	15,8		
+ 0,0788	+ 2,2253	+ 67	3,99	1,09	5,08	11,94	1,08	13,02	2,20	15,22	7,16	25,0	24,8		
+ 0,0167	+ 0,1341	- 5	3,59	1,11	4,70	10,64	0,68	11,32	1,99	13,31	3,03	27,3	27,7		

9, 10 e 11.

TABELLA II.

Indicazione dei periodi sperimentali	$\frac{N\text{-creatininico}}{N\text{-totale}} \times 100$	$\frac{N\text{-creatinico}}{N\text{-totale}} \times 100$	$\frac{N\text{-creatinico} + N\text{-creatininico}}{N\text{-totale}} \times 100$	$\frac{N\text{-creatininico}}{N\text{-creatinico} + N\text{-creatininico}} \times 100$	$\frac{N\text{-creatinico}}{N\text{-creatinico} + N\text{-creatininico}} \times 100$	$\frac{S\text{-acido}}{S\text{-totale}} \times 100$	$\frac{S\text{-neuro}}{S\text{-totale}} \times 100$	$\frac{S\text{-minerale}}{S\text{-acido}} \times 100$	$\frac{S\text{-coniugato}}{S\text{-acido}} \times 100$	$\frac{N\text{-totale}}{S\text{-totale}} \text{ urina}$
Periodo I										
Pre-periodo di osservazione : (dieta con sali minerali)	1,72	0,24	1,96	87,8	12,2	84,0	16,0	94,4	5,6	25,7
Periodo II										
Periodo di inanizione . . .	1,95	1,52	3,47	56,1	43,9	80,5	19,5	89,2	10,8	15,8
Periodo III										
Periodo di rialimentazione. . (dieta senza sali minerali)	1,06	0,29	1,35	78,5	21,5	85,4	14,6	91,8	8,2	24,8
Periodo IV										
Post-periodo di osservazione . (dieta senza sali minerali)	0,98	0,30	1,28	76,3	23,7	85,0	15,0	94,1	5,9	27,7

servazione, durante il quale gli animali erano alimentati con dieta completa anche dal punto di vista salino, e durante il quale presentavano esatto bilancio di azoto.

3) *Fosforo*. Nei riguardi dell'eliminazione del fosforo si è avuto un netto aumento (da mg. 8.7 a mg. 12.4, in media, al giorno) durante il periodo di digiuno. Tale aumento si è reso ancora più marcato (mg. 25.0, in media, al giorno) durante il periodo di rialimentazione con dieta priva di miscuglio salino o fornita solo di NaCl; è scomparso invece subito per somministrazione di dieta integrata col miscuglio salino completo.

4) *Cloro*. Nei riguardi dell'eliminazione del cloro si è avuto una notevolissima diminuzione (da mg. 67.40 a mg. 4.78, in media, al giorno) durante il periodo di digiuno. Tale diminuzione è persistita accentuata (mg. 7.16, in media, al giorno) durante il periodo di rialimentazione con dieta priva di costituenti minerali; è scomparsa invece subito per aggiunta alla dieta di NaCl o del miscuglio salino completo.

In Note successive esporremo ancora altri dati ottenuti su animali diversamente rialimentati; ci riserviamo pertanto di discutere i presenti risultati insieme con quelli, che saranno riferiti.

Fisiologia (Chimica biologica). — *Ulteriori osservazioni sul comportamento dei corpi creatinici, del solfo, del fosforo e del cloro urinarii nel digiuno e nella rialimentazione.* Nota di V. ZAGAMI, presentata dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 3 maggio 1936 Anno (XIV)

Presidenza del prof. F. MILLOSEVICH.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Fisica. — *Ancora sulle induttività e su i campi di forza.*
Nota ⁽¹⁾ del Socio L. PUCCIANI.

Il prof. Giorgi ha comunicato all'Accademia una Nota: « A proposito delle induttività elettrica e magnetica » ⁽²⁾ cui mi compiaccio di aver dato occasione con una Nota mia, che egli qualifica in modo troppo cortese. Che dovrei dire io della sua, la quale è veramente essa « densa di dottrina » ?

Dirò che mi compiaccio anche del fatto che tra le sue conclusioni e le mie non esistono divergenze sostanziali.

Una divergenza appare bensì nelle denominazioni: io ho usate per ϵ_0 e μ_0 rispettivamente quelle di « costante universale elettrostatica » e « costante universale elettrodinamica », alle quali espressioni il prof. Giorgi fa eccezione osservando che in ulteriori teorie tali enti si mostrano non assolutamente costanti, come del resto avviene per c ed R_0 .

Ma mi pare non difficile intenderci, se io preciso il senso in cui uso quelle parole.

Io chiamo ϵ_0 e μ_0 « costanti » in quanto esse figurano come tali nelle formule esprimenti le leggi delle azioni elettrostatiche ed elettrodinamiche

(1) Presentata nella seduta del 3 maggio 1936.

(2) Questi « Rendiconti », vol. XXIII, ser. 6^a, 1^o sem., p. 171.

nello spazio vuoto: manifestamente enunciare la legge di Coulomb scrivendo

$$F = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

equivale a pensare in tale scrittura ϵ_0 costante, di fronte a $F; q_1, q_2, r$ variabili; analogamente dicasi per le azioni elettrodinamiche.

Aggiungo « universali » perchè non legate a nessun particolare mezzo corporeo.

Mi pare che con questa avvertenza, o, se si vuole, con queste restrizioni, la mia denominazione non sia errata, è del resto conforme all'uso assai comune di chiamare $c = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ una costante universale.

Adottata questa espressione per ϵ_0 e μ_0 , ed essendo per ϵ_p (ovvero $\bar{\epsilon}$) disusata (sia pure a torto) la denominazione di permeabilità elettrica, ho chiamato ϵ_p e μ_p « induttività », denominazione pure assai comunemente usata.

Altra cosa le denominazioni che si fissano a scopo metrico, tecnico; altra cosa le espressioni che si usano per illustrare concetti scientifici.

Per le prime, non vi è dubbio, il meglio è restar fedeli alla convenzione una volta fatta.

Le altre invece non possono essere per così dire, standardizzate, perchè debbono aderire al pensiero progressivo e personale.

Riguardo poi alla interessante distinzione, che il prof. Giorgi fa tra teorie macroscopiche e atomiche, debbo osservare che veramente queste ultime non rientrano nel compito che mi sono assunto nella mia Nota (stampata in due parti) ⁽¹⁾ e in una successiva ⁽²⁾, il quale compito si limitava a prospettare le leggi macroscopiche del campo, ma in modo contrastante con i fondamenti di quelle teorie; cioè concordante col loro realistico punto di partenza.

Che i corpi contengano cariche capaci di migrare nei conduttori, di spostarsi negli isolanti, di rotare o circolare diversamente nei diamagnetici, nei para- e ferromagnetici, è ormai una verità acquisita piuttosto che una ipotesi di lavoro. Le teorie atomiche analizzeranno poi come ciò avviene nei varii corpi in relazione alla loro natura e costituzione.

Ma principalmente ho inteso mostrare come il porsi proprio in questo punto di vista realistico, evita pure, dirò così, una ritrattazione, quando si proceda alla teoria della prima relatività. Che se, come il prof. Giorgi osserva, bisognerà in passi ulteriori delle teorie relativistiche rivedere la costanza, non assoluta, di ϵ_0 e μ_0 , ciò non sarà niente di male, una volta che tale costanza sia intesa fin da principio nel senso che ora ho precisato.

(1) Questi « Rendiconti », vol. XXI (1935), p. 732 e vol. XXII, p. 187.

(2) Questi « Rendiconti », vol. XXII, p. 194.

Il male sta a mio avviso, nel legarsi, quando si descrive il campo, alle concezioni Faradayane (qualunque sia stato a suo tempo la loro virtù euristica, qualunque sia ora il loro valore storico), per trovarsi poi costretti a disdire quasi tutto il già detto, non però cancellare le formule scritte come sotto dettatura di quelle parole.

Su questo punto sono stato reciso; ma non senza prudenza.

Ho detto che lo spazio vuoto non è un corpo, e non diventa chiamandolo *etere*; non ho detto (e non ho voluto dire): « lo spazio vuoto è *nulla* ».

Il mio egregio collega fisico matematico illustra con lucida ed efficace brevità le ragioni, per cui un tale concetto affatto negativo dello spazio vuoto sarebbe un errore scientifico.

Parmi che dal punto di vista concettuale tutto così sia chiaro.

Ma credo necessario anche chiarire un punto formale, per evitare nei lettori un possibile equivoco e per fare una ultima osservazione sul concetto di *campo di forza*.

Io scrivo ⁽¹⁾ per un mezzo materiale

$$B = \mu_p H \quad (\mu_p \text{ numero puro})$$

e nello spazio vuoto

$$B = H.$$

Il prof. Giorgi scrive, secondo l'uso più comune, per lo spazio vuoto

$$B = \mu_o H \quad (\mu_o \text{ dimensionata})$$

che porta a scriver' per un corpo

$$B = \mu_p \mu_o H.$$

Manifestamente è quistione di notazioni, perchè io ho scritto

$$H = \mu_o \text{ grad } I \Omega,$$

egli suppone scritto

$$H = \text{grad } I \Omega.$$

Insomma io indico con H il vettore che egli (secondo l'uso comune) indica con $\mu_o H$.

Basta dir questo per evitare qualunque equivoco.

Ma io mi sento impegnato anche a giustificare la mia notazione non ortodossa.

(1) Nelle seguenti formule non ho usato caratteri diversi per vettori e scalari, perchè ciò sarebbe stato inutile.

Essa è una conseguenza della connessione fra le mie recenti Note e la mia Memoria del 1915.

Siccome in questa usavo il sistema di misure elettromagnetico, se anche i concetti in essa esposti potevano parere allora eterodossi, le formule restavano perfettamente ortodosse.

Abbandonando ora la posizione convenzionale $\mu_0 = 1$ per introdurre il fattore μ_0 , mi si presentava il problema di vedere quale delle due formule

$$B = \mu_p H \qquad H = \text{grad } I\Omega$$

portasse già idealmente questo fattore μ_0 uguagliato all'unità.

Orbene, rileggendo quello scritto non vi può essere dubbio, è questa la seconda formula e non la prima. Perchè nel testo H è il campo prodotto dalla corrente I e *misurato per via elettrodinamica*; B è questo campo più quello H_A dovuto alle correnti di Ampère; mentre il vettore $\text{grad } I\Omega$ non si può considerare quale formante un *campo di forza*. Ciò sta in armonia con quanto è illustrato a p. 199 della mia ultima Nota ⁽¹⁾.

Se dunque si scrive in modo ortodosso

$$B = \mu H \qquad (\mu = \mu_p \mu_0)$$

B , non H , deve considerarsi quale vettore di un campo di forza.

A. Sommerfeld in una sua Nota ⁽²⁾ (nella quale è usata questa notazione) porta la sua grande autorità in conferma di tale veduta adottata dal Mie dal 1932, e sviluppa il concetto presentando in forma diversa dalla tradizionale la corrispondenza tra campo magnetico e campo elettrico; ed è così condotto a considerare, invece di μ , la $\mu' = 1/\mu$, scrivendo

$$H = \mu' B$$

come analoga termine a termine alla

$$D = \epsilon E.$$

È inevitabile dunque arrivare, prima o poi, a un punto in cui le moderne concezioni costringono a mutare qualcosa delle formule tradizionali.

Spero che ai lettori dei « Rendiconti » non dispiaccia questa conversazione elettromagnetica tra il collega Giorgi e me; la quale è stata per me gradevolissima perchè vi ho imparato non poco.

(1) Questi « Rendiconti », vol. XXII, ser. 6^a.

(2) « Zeitschrift für technische Physik », Sechzehnter Jahrgang, 11, p. 420.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla riduzione delle matrici a forma canonica.* Nota II di S. CHERUBINO, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. SCORZA.

6. Sappiamo già che, se la matrice a_0 che figura in B è non degenere, può prendersi

$$a_1 = \left(\begin{array}{c|c} a_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

e questa, per ora, non è suscettibile di ulteriori semplificazioni.

Se invece $a_0 = 0$, si ha

$$a_1 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & b_0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

e, come si è già osservato, si ha $b_0 \leq b_1$ con b_1 di caratteristica eguale al numero b_0 delle righe (le colonne essendo in numero di b_1).

Mutando, se occorre, l'ordine delle colonne (e allo stesso modo quello delle righe, come all'art. I) si potrà scrivere

$$b_0 = (c | d)$$

e supporre che c sia una matrice non degenere di ordine b_0 ; quindi sarà

$$d = c\mu$$

con μ univocamente determinata ($\mu = c^{-1}d$).

Considerando allora la matrice di ordine $b_0 + b_1$

$$N = \left(\begin{array}{c|c} I_{b_0} & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{c|c} c^{-1} & -\mu \\ \hline 0 & I_{b_1-b_0} \end{array} \end{array} \right)$$

si ha subito

$$(9) \quad N^{-1} a_1 N = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_{b_0} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = a_1^*.$$

(1) Nella seduta del 5 aprile 1936.

7. Dopo di ciò la matrice a_2 assumerà uno dei due aspetti

$$(10) \quad a'_2 = \left(\begin{array}{c|c|c} a_0 & 0 & \\ \hline 0 & 0_1 & \\ \hline & & 0_2 \end{array} \right) b_1 \quad ; \quad a''_2 = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0_0 & I_{h_0} & 0^{(0)} & \\ \hline 0 & 0_1 & & \\ \hline & & & 0_2 \end{array} \right) b_1$$

secondo che, per ipotesi, a_0 è non degenera, oppure è $a_0 = 0$.

Poniamo

$$b_1 = \left(\begin{array}{c} c \\ d \end{array} \right)$$

con c, d matrici ad b_0 ed b_1 righe, rispettivamente, e consideriamo la prima delle (10).

Essendo a_0 non degenera, si può trovare una matrice γ tale che

$$c = a_0 \gamma$$

e trasformare a_2 , per contragredienza, mediante la matrice

$$P = \left(\begin{array}{c|c} I^* & -\gamma \\ \hline 0 & I^{**} \end{array} \right)$$

dove I^*, I^{**} son due matrici identiche di ordini rispettivi $b_0 + b_1$ ed b_2 .
Si ottiene:

$$(11) \quad a_2^* = P^{-1} a'_2 P = \left(\begin{array}{c|c|c} a_0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0_1 & d \\ \hline & & 0_2 \end{array} \right).$$

Se si considera la seconda delle (10), conviene trasformare con la

$$P_1 = \left(\begin{array}{c|c} I^* & \begin{array}{c} 0' \\ -c \\ 0'' \end{array} \\ \hline 0 & I^{**} \end{array} \right)$$

dove $0', 0''$ son due matrici nulle, ordinatamente ad b_0 ed $b_1 - b_0$ righe (quindi $0''$ mancherà, se $b_1 = b_0$). Si ottiene:

$$(11') \quad a_2^{**} = P_1^{-1} a''_2 P_1 = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0_0 & I_{h_0} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0_1 & d & \\ \hline & & & 0_2 \end{array} \right).$$

In queste (11)-(11') si vede che essendo la loro caratteristica (ossia quella di a_2) eguale ad $b_0 + b_1$, la matrice d deve aver caratteristica b_1 , cioè eguale al numero delle sue righe, quindi che $b_2 \geq b_1$.

Perciò, salvo un eventuale scambio di colonne (e di righe, come all'art. 1) si potrà porre

$$d = (d_1 | d_2)$$

con d_1 matrice non degenerare di ordine h_1 . Quindi anche

$$d = d_1 (I_{h_1} | d_3) \quad ; \quad d_2 = d_1 d_3.$$

Con tale adattamento, la matrice

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} I^* & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{c|c} d_1^{-1} & -d_3 \\ \hline 0 & I^{***} \end{array} \end{array} \right),$$

dove I^{***} è la matrice identica di ordine $h_2 - h_1$, trasformerà per contragredienza le $(I I) - (I I')$ rispettivamente nelle altre due (1)

$$(12) \quad Q^{-1} a_2^* Q = {}^* a_2 = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0_1 & I_{h_1} & 0' & \\ \hline 0 & & & 0_2 & \end{array} \right)$$

$$(12') \quad Q^{-1} a_2^{**} Q = {}^{**} a_2 = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0_0 & I_{h_0} & 0^{(0)} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0_1 & I_{h_1} & 0' & \\ \hline 0 & & & 0_2 & \end{array} \right)$$

nelle quali, se fosse $h_1 = h_2$, mancherebbe la matrice nulla $0'$, insieme a quella superiore....

8. Si passerà ora ad

$$a_3 = \left(\begin{array}{c|c} a_2 & b_2 \\ \hline 0 & 0_3 \end{array} \right)$$

dove si dovrà supporre che a_2 sia sostituita con la (12) o la $(12')$. In essa si avrà

$$b_2 = \left(\begin{array}{c} c \\ d \\ e \end{array} \right)$$

con c, d, e matrici ad $(h_3$ colonne ed) h_0, h_1, h_2 righe, rispettivamente.

(1) La reciproca della matrice $\left(\begin{array}{c|c} d_1^{-1} & -d_3 \\ \hline 0 & I^{***} \end{array} \right)$ è $\left(\begin{array}{c|c} d_1 & d_2 \\ \hline 0 & I^{***} \end{array} \right)$. Si osservi che se $h_2 = h_1$ queste due matrici si riducono a d_1^{-1} ed a $d_1 = d$.

Se a_0 è non degenera, cioè se a_2 è sostituita con *a_2 , si porrà

$$c = a_0 \mu,$$

e si considererà la matrice ad $h_0 + h_1 + h_2$ righe ed h_3 colonne

$$\chi = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{o'} \\ \frac{d}{o''} \end{pmatrix}$$

dove o' ed o'' son due matrici nulle (ad h_3 colonne e) rispettivamente ad $h_1, h_2 - h_1$ righe (se $h_1 = h_2$, mancherà la seconda).

Se $a_0 = 0$, cioè se a_2 è sostituita con $^{**}a_2$, al posto delle 2 matrici μ e o' si porrà la c compresa fra due matrici nulle di cui quella superiore ad h_0 righe e l'inferiore ad $h_1 - h_0$ righe (questa mancherà per $h_0 = h_1$).

In entrambi i casi, si trasformerà a_3 , per contragredienza, con la matrice

$$R = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & -\chi \\ \hline 0 & I_{h_3} \end{array} \right),$$

dove I_2 indica la matrice identica di ordine $h_0 + h_1 + h_2$, ottenendo

$$(13) \quad R^{-1} a_3 R = \left(\begin{array}{c|c} a_2 & \begin{matrix} 0 \\ e \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

nella quale, com'è ovvio, al posto di a_2 s'intende sostituito *a_2 od $^{**}a_2$. Sante che la caratteristica di a_3 è $h_0 + h_1 + h_2$, questa (13) ci dice subito che la caratteristica di e vale necessariamente h_2 , quindi che $h_2 \leq h_3$.

Operando su questa (13) in modo perfettamente analogo a come si è operato sulle (11)-(11') si ottiene la matrice

$$(14) \quad a_3^* = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0_1 & I_{h_1} & o' & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_2 & I_{h_2} & o'' & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0_3 \end{array} \right)$$

oppure la

$$a_3^{**} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0_0 & I_{h_0} & o^{(0)} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0_1 & I_{h_1} & o' & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_2 & I_{h_2} & o'' & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0_3 \end{array} \right)$$

secondo che a_0 è non degenera oppure nulla. La matrice nulla o'' mancherà, insieme a quella superiore incolonnata con essa, qualora sia $h_2 = h_3$ (anzichè $h_2 < h_3$).

sicchè C_0 , quindi la primitiva, è la pseudonulla di rango $j + 2$ ed ha la segnatura ⁽¹⁾

$$(b_{j+1}, b_j, \dots, b_1, b_0).$$

Sopprimendo da questo $(j + 2)$ -intero orizzontale l'ultimo termine b_0 , si ottiene ⁽²⁾ la segnatura della radice caratteristica o di C_1 , ossia della primitiva matrice A , quando a_0 non è nulla (nè degenerare).

Nel caso pseudonullo la forma canonica che avevamo di mira è già raggiunta.

11. Se la matrice A da cui partiamo non è degenerare, dicendo α una sua radice caratteristica (certamente non nulla) tutto quanto precede si riferirà alla matrice $A - \alpha I$, quindi l'indice di C_1 è quello $j + 1$ di questa $A - \alpha I$ e la segnatura rispetto ad α sarà data dall' $(j + 1)$ -intero ⁽³⁾:

$$(b_{j+1}, b_j, \dots, b_1).$$

L'equazione caratteristica

$$|(A - \alpha I) - \lambda I| = |A - (\alpha + \lambda) I| = 0$$

di $A - \alpha I$ sarà la trasformata, a radici diminuite di α , dell'equazione caratteristica di A . E poichè l'equazione caratteristica di una matrice qualunque coincide con quelle delle sue trasformate contragredienti, dicendo μ la molteplicità di α , risulterà

$$|(A - \alpha I) - \lambda I| = (-1)^\mu \cdot |a_0 - \lambda I_{b_0}| \cdot \lambda^\mu$$

quindi le radici caratteristiche di A diverse da α coincidono, anche per la molteplicità, con quelle della matrice $a_0 + \alpha I_{b_0}$.

La prima delle due osservazioni del n. 4 ci consente di operare su questa $a_0 + \alpha I_{b_0}$ come si è operato su A e ci farà mettere in evidenza, via via, le signature di tutte le radici caratteristiche di A . Contemporaneamente, le operazioni del n. 9 ci fanno conseguire la forma canonica che desideravamo.

L'unicità di questa forma canonica risulta senz'altro dal procedimento di riduzione impiegato. Anche l'invarianza della nozione di segnatura rispetto a una radice caratteristica risulta evidente dal nostro ragionamento.

(1) Ibidem, *Appendice*, Cap. I, p. 421.

(2) Ibidem, p. 433.

(3) Se α è l'unica radice caratteristica di A , la $A - \alpha I$ è pseudonulla, la segnatura possiede anche il termine b_0 il rango è $j + 2$ e la forma canonica è $C_0 + \alpha I$.

12. Chiudiamo con due esempi. Il primo è quello della matrice considerata nell'osservazione II del n. 5, la cui forma canonica risulta

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} a_1 I_{r+1} & I_{r+1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & a_1 I_b & I_b & 0 \\ \hline 0 & & a_1 I_b & I_b \\ \hline & & & \ddots \\ \hline & & & & \ddots \\ \hline & 0 & & & & a_1 I_b & I_b \\ \hline & & & & & & a_1 I_b \end{array} \right).$$

Come secondo esempio, supponiamo che A abbia due sole radici caratteristiche α e β , la prima con la segnatura (h_2, h_1, h_0) , la seconda con la segnatura (k_1, k_0) . Si ha la forma canonica

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} \alpha I_{h_0} & I_{h_0} & 0' & 0 \\ \hline 0 & \alpha I_{h_1} & I_{h_1} & 0'' \\ \hline 0 & & \alpha I_{h_2} & \\ \hline & & & 0 \\ \hline & & & \beta I_{k_0} & I_{k_0} & 0''' \\ \hline & & & 0 & \beta I_{k_1} \end{array} \right)$$

dove le matrici nulle $0', 0'', 0'''$ possono anche mancare (tutte o in parte).

Questa matrice, salvo un opportuno scambio di righe e di colonne⁽¹⁾ coincide col modulo di un'omografia, dell' S_{n-1} proiettivo in sè, la cui caratteristica (Predella) è:

$$[(h_2 - 1, h_1 - 1, h_0 - 1)(k_1 - 1, k_0 - 1)].$$

(1) Bisognerà in primo luogo invertir l'ordine delle matrici scalari della diagonale principale, il che si fa con uno scambio di righe e lo stesso scambio di colonne. Indi si passerà alla matrice trasposta, il che può ottenersi, ad es., moltiplicando dai due lati per la matrice involutoria dedotta dalla identica con lo scambio delle due diagonali (ciò che produce una rotazione di 180° gradi intorno alla diagonale secondaria) ed invertendo poi l'ordine delle righe e quello delle colonne.

Matematica. — *Intorno alle ovali sghembe, e su di una estensione del teorema di Cavalieri-Lagrange alle funzioni di due variabili.* Nota di B. SEGRE, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. B. LEVI.

1. Ci si può proporre di estendere il teorema di CAVALIERI-LAGRANGE alle funzioni di due variabili, cercando di rispondere alla seguente questione.

Assegnato nel piano xy un campo semplicemente connesso, Γ , e fissata arbitrariamente sul contorno di Γ una catena continua di valori, si domanda se — ed in quanti modi — è possibile di associare a questi dati una coppia di numeri reali p, q , tali che per ogni funzione $f(x, y)$ definita nel campo Γ — che ammetta nell'interno derivate prime rapporto ad x e rapporto ad y , e che sia continua al contorno ove assuma la suddetta catena di valori — esista sempre (almeno) un punto (x, y) , interno a Γ , nel quale contemporaneamente risulti

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = q.$$

La risposta è pressochè immediata, se fra le funzioni assumenti sul contorno di Γ i valori prescritti vi è una funzione lineare $ax + by + c$. In tal caso si ha infatti che la coppia $p = a, q = b$, ed essa soltanto, soddisfa alle condizioni richieste; si può dare a questo enunciato forma geometrica perspicua ed una maggior estensione col teorema che segue, di assai facile dimostrazione:

Un qualunque pezzo di superficie di JORDAN dello spazio, di cui ogni punto interno sia semplice ⁽²⁾ e che abbia come contorno una linea piana, ammette sempre (almeno) un piano parallelo al piano del suo contorno che lo tocca in un punto interno.

2. Se si esclude il caso banale dianzi segnalato, la questione postaci al principio del n. 1 appare tutt'altro che semplice; essa rientra in questa altra, direttamente suggerita dalla proposizione finale del n. 1:

(1) Nella seduta del 3 maggio 1936.

(2) Un punto P di una V_k (reale) dicesi semplice per essa, se il paratingente (ossia l'insieme delle corde improprie) di V_k relativo a P riempie uno spazio lineare S_k ; questo è allora precisamente lo spazio tangente in P a V_k . Cfr. F. SEVERI, *Conferenze di Geometria algebrica*. Raccolte da B. SEGRE. (Roma, 1927-29), p. 150; F. SEVERI, *Su alcune questioni di topologia infinitesimale*. «Ann. de la Soc. Polonaise de Math.», to. 9 (1930), p. 97, n. 6.

Data nello spazio una linea sghemba di JORDAN, \mathcal{L} , si può — ed in quanti modi — associare ad essa una giacitura, tale che una qualunque superficie — avente \mathcal{L} per contorno e sufficientemente regolare — ammetta sempre (almeno) un piano parallelo a quella giacitura che la tocchi in un punto interno?

Il problema è indubbiamente molto difficile, se non si fa qualche supposizione restrittiva sulla linea \mathcal{L} ; in un prossimo lavoro darò ad esso risposta esauriente, nell'ipotesi che \mathcal{L} sia un'ovale sghemba. Denomino brevemente ovale sghemba, una linea sghemba di JORDAN — luogo di soli punti semplici — dotata ovunque di piano osculatore variabile da punto a punto con continuità, ed inoltre tale che da ogni retta e da ogni piano dello spazio venga rispettivamente incontrata in al più 2 punti ed in al più 4 punti [distinti o coincidenti ⁽¹⁾ ⁽²⁾]. -

Il risultato a cui pocanzi ho alluso è fornito dal teorema seguente, nel quale come piano π si assuma in particolare il piano all'infinito; teorema che appunto dimostrerò nel suddetto lavoro.

Data un'ovale sghemba, \mathcal{L} , ed un piano π che con \mathcal{L} non abbia alcun punto comune, esiste sempre su π una ed una sola retta, r , tale che per essa passino due piani bitangenti di \mathcal{L} le cui due coppie di punti di contatto colla \mathcal{L} si separino (sopra questa curva). Ogni superficie F , luogo di punti tutti semplici, avente \mathcal{L} come contorno e non incontrante la r , ammette sempre (almeno) un piano che la tocchi in un punto interno e che passa per r ; quest'ultima è poi la sola retta di π per cui sussiste la suddetta proprietà qualunque sia F .

Aggiungasi che — a differenza di quanto accade (n. 1) nel caso del contorno piano — può benissimo esistere una superficie col contorno sghembo suddetto, senza punti comuni colla r ed avente come semplice ogni suo punto interno (ma, necessariamente, dotata di singolarità su \mathcal{L}), relativamente alla quale nessun piano tangente in un punto interno passi per r .

3. Nel lavoro preannunciato al n. 2 — poggiando in gran parte su considerazioni di natura topologica — stabilirò varie proprietà ulteriori delle ovali sghembe, di cui ora menzionerò le più importanti. Queste, naturalmente, sussistono in particolare nel caso elementare delle ovali sghembe algebriche, ossia nel caso delle quartiche gobbe (ellittiche o razionali) di 1^a specie aventi un unico ramo reale privo di punti singolari.

Si ha intanto che:

(1) Una retta od un piano che tocchi od osculi la curva in un punto, deve considerarsi come avente in esso rispettivamente 2 o 3 punti d'incontro colla curva.

(2) Si rilevi l'analogia di questa definizione colla seguente, relativa alle ovali ordinarie: curve piane di JORDAN, luoghi di soli punti semplici, incontrate in al più due punti da ogni retta del loro piano.

Una qualunque ovale sghemba ammette precisamente 4 vertici, ossia 4 punti in cui il relativo piano osculatore risulta stazionario (e perciò non incontra altrove la curva) ⁽¹⁾.

Inoltre:

L'inviluppo convesso di una qualsiasi ovale sghemba \mathcal{L} (ossia il minimo insieme convesso contenente \mathcal{L}), ammette come contorno una superficie chiusa avente \mathcal{L} quale luogo di punti angolosi; tale superficie vien divisa da \mathcal{L} in due porzioni semplicemente connesse, di contorno \mathcal{L} , ciascuna delle quali non ha che punti semplici ed appartiene ad una determinata rigata sviluppabile ⁽²⁾. Ogni punto interno all'inviluppo convesso di \mathcal{L} , risulta interno a due (e soltanto due) distinti segmenti aventi gli estremi su \mathcal{L} .

I piani bitangenti dell'ovale sghemba \mathcal{L} si distribuiscono in due diversi sistemi continui ∞^1 , e sono precisamente i piani che toccano i due pezzi di superficie sviluppabile suddetti; ciascun sistema contiene due — fra loro opposti — dei 4 piani osculatori stazionari di \mathcal{L} .

Chiamando corda principale di un'ovale sghemba, \mathcal{L} , una corda di \mathcal{L} che sia pure intersezione dei piani osculatori ad \mathcal{L} nei due punti di appoggio colla corda, si ha che:

Una qualunque ovale sghemba possiede sempre almeno due diverse corde principali; ciascuna corda principale risulta sghemba con ogni retta che tocchi l'ovale in un punto distinto dai due punti d'appoggio di questa colla corda medesima.

Allo stesso ordine d'idee della seconda parte dell'ultimo enunciato appartiene il seguente teorema:

La retta tangente ad un'ovale sghemba in un vertice, è sempre appoggiata (o parallela) ad una ed una sola tangente ulteriore; una retta che tocchi l'ovale in un punto che non sia un vertice, risulta invece sempre appoggiata (o parallela) ad altre due diverse tangenti.

(1) Nel caso delle quartiche ellittiche di 1^a specie, tale proprietà è già nota: cfr. A. HARNACK, *Ueber die Darstellung der Raumcurven vierter Ordnung erster Species und ihres Secantensystems durch doppelt-periodische Funktionen*. «Math. Ann.», to. 12 (1877), p. 47; O. CHISINI, *Sulla forma delle quartiche gobbe di prima specie e delle curve ellittiche normali*. «Rendiconti del R. Istit. Lombardo», ser. II, to. 53 (1920), p. 591; F. ENRIQUES-O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, to. III (Bologna, Zanichelli, 1924), p. 290. Un teorema analogo, ma assai meno preciso perchè riferentesi a curve più generali delle nostre ovali sghembe, trovasi in H. MOHRMANN, *Die Minimalzahl der stationären Ebenen eines räumlichen Ovals*. «Sitzungsber. der K. Bayer. Akad. der Wiss. zu München», (1917); p. 1.

(2) Nel caso delle ovali sghembe algebriche, entrambe le rigate sviluppabili suddette sono dei coni quadrici,

Matematica. — *Un contributo alla cinematica integrale.* Nota di W. BLASCHKE, presentata dal Corrisp. E. BOMPIANI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulle funzioni olomorfe ammettenti due valori eccezionali finiti e sull'andamento di una funzione olomorfa in prossimità di un punto singolare essenziale isolato.* Nota II di S. MINETTI, presentata dal Corrisp. G. GIORGI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulle omografie vettoriali con applicazioni cinematiche negli spazi S_n .* — III. *Formula generale per la velocità di trascinamento e composizione dei moti istantanei di rotazione.* Nota di M. MANARINI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. P. BURGATTI.

6. In ciò che segue le proposizioni delle due Note precedenti trovano applicazione alla cinematica dei sistemi rigidi negli spazi S_n .

Nei fondamenti di cinematica della mia Memoria citata ⁽²⁾ ho stabilito in modo diretto che per un sistema rigido in movimento intorno al punto fisso O, la velocità di un punto M ha l'espressione

$$\frac{dM}{dt} = \omega \wedge (M - O)^{(3)},$$

(1) Nella seduta del 5 aprile 1936.

(2) M. MANARINI, *Sul calcolo plurivettoriale negli spazi S_n ed applicazioni alla meccanica dei sistemi rigidi.* « Ann. di Matem. pura ed applicata », ser. VI, to. XII, 1933-34, p. 109.

(3) Circa l'apparente discordanza fra i simboli qui usati e quelli della Memoria citata, si tenga presente la modificazione globale a questa virtualmente apportata con le osservazioni fatte nella mia Nota: *Interpretazione vettoriale assoluta dei tensori lineari del terzo ordine ed applicazione al campo elettromagnetico stazionario*, « Rend. Acc. Lincei », ser. VI, vol. XXI, 1^o sem. 1935, p. 176 (in calce) e p. 283 (pure in calce). Con essa si viene a dare agli enunciati ed alle espressioni analitiche delle proposizioni nel metodo vettoriale, forme valide qualunque sia il numero delle dimensioni dello spazio, rimanendo in tal modo implicitamente modificate quelle dello spazio ordinario S_3 , che, soltanto per eccezionale circostanza, possono anche porsi in quella forma che siamo abituati ad usare; presentato sotto questa forma il metodo vettoriale ordinario in S_3 non può considerarsi come caso particolare del calcolo plurivettoriale generale. La fecondità della innovazione apportata è stata anche largamente provata nella mia recente Memoria: *Sugli spazi di Weyl. - Introduzione geometrica vettoriale assoluta alla teoria della relatività generale*, « Ann. di Matem. pura ed applicata », ser. IV, to. XIV, 1935-36, pp. 149-177. A proposito si può vedere anche la conferenza di P. BURGATTI, *Qualche nuovo sviluppo del calcolo vettoriale intrinseco*, « Boll. Un. Mat. Ital. », anno XIV, 1935, pp. 133-142.

ove $\gamma = \omega_2 \wedge$ è l'assiale che definisce lo stato di moto istantaneo del sistema ed ω_2 è il bivettore velocità angolare, in generale multiplo.

Se c è la caratteristica dell'assiale γ (di parità necessariamente concorde con le dimensioni n dello spazio S_n) e $\pm q_s i_s$, $s = 1, 2, \dots, v$, sono le $2v$ radici, necessariamente immaginarie pure, dell'equazione $I_n(\gamma - x) = 0$, dei rispettivi ordini c_s di molteplicità (per cui è $c + \sum_{s=1}^v 2c_s = n$), possiamo trarne le due seguenti conseguenze di carattere generale. Anzitutto il bivettore multiplo ω_2 è di rango⁽¹⁾ c e quindi riducibile alla somma di $n-c$ bivettori semplici: basta sviluppare ω_2 con la formula

$$\omega_2 = \sum_{i=1}^n i_r \wedge \gamma i_r,$$

servendosi di una n -pla fondamentale di versori i_r avente c vettori nello spazio di direzioni nulle S_c , esistente per γ . Pertanto: *il moto è equivalente alla somma di $n-c$ rotazioni semplici parallele alle giaciture bidimensionali determinate dai bivettori suddetti.*

In secondo luogo, per quanto dimostrammo al n. 2, avendosi relativamente a γ l'esistenza, nell'istante attuale, degli n versori linearmente indipendenti $a_i, u_r^{(s)} v_r^{(s)}$, con le proprietà (3) ivi dimostrate, e posto per un punto qualunque M del sistema rigido in moto

$$M - O = \sum_i l_i a_i + \sum_{i=1}^v \sum_r^{c_s} m_r^{(s)} u_r^{(s)} + n_r^{(s)} v_r^{(s)},$$

si ha per la sua velocità in forza delle menzionate relazioni (3) del n. 2, l'espressione generale

$$\frac{dM}{dt} = \sum_{i=1}^v \sum_r^{c_s} n_r^{(s)} q_s u_r^{(s)} - m_r^{(s)} q_s v_r^{(s)}.$$

Questa velocità risulta in ogni caso perpendicolare allo spazio S_c dei punti di velocità nulla, determinato dai versori a_i ed è facile verificare la formula precedente per i casi particolari ordinari $n = 2$ ed $n = 3$.

Dalla formula precedente si passa immediatamente a quella analoga per un punto M appartenente a sistema libero, ricorrendo alla formula della velocità di trascinamento:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dO_1}{dt} + \omega_2 \wedge (M - O_1),$$

ove O_1 è un punto qualunque collegato col sistema rigido in movimento.

(1) Cfr. la mia Memoria: *Sul calcolo plurivettoriale ecc.*, p. 87.

7. Per trattare la composizione dei moti istantanei di rotazione, ricordo anzitutto che nei fondamenti di cinematica da me stabiliti nella Memoria citata ho dimostrato ⁽¹⁾ che se l'indice n dello spazio è pari, esiste in generale per il moto del sistema un centro istantaneo di rotazione, cosicchè, per quanto riguarda le velocità, il detto moto istantaneo risulta determinato, qualunque siano le dimensioni pari dello spazio, da un bivettore-applicato (C, ω_2) , ove il bivettore velocità angolare ω_2 è in generale un bivettore multiplo, salvo nello spazio a due dimensioni, in cui risulta necessariamente semplice, e di più con giacitura costante, per modo che può venire sostituito con uno scalare ω in valore assoluto coincidente con il modulo di ω_2 , qualora non si voglia uscire dal piano del movimento, oppure può venire sostituito dal vettore supplementare ω avente direzione costantemente perpendicolare al piano, se si vuole ricorrere alla rappresentazione in S_3 .

Il centro istantaneo di rotazione C risulta in ogni caso determinato dall'espressione

$$C - O_1 = -(\omega_2 \wedge)^{-1} \frac{dO_1}{dt},$$

con O_1 punto qualsiasi rigidamente collegato col sistema mobile e $(\omega_2 \wedge)^{-1}$ omografia assiale non degenerare, che nel caso di $n = 2$ si suole rappresentare con $-\omega i$, essendo i l'operatore che fa girare di 90° i vettori del piano da sinistra a destra per un osservatore posto sulla pagina positiva del piano stesso.

La velocità di un punto M qualsiasi del sistema rigido in movimento ha l'espressione:

$$(5) \quad \frac{dM}{dt} = \omega_2 \wedge (M - C),$$

che generalizza le ben note formule ordinarie per il caso $n = 2$:

$$\frac{dM}{dt} = \omega \wedge (M - C) = \omega i (M - C).$$

Supponiamo ora che un sistema rigido in S_n partecipi in un dato istante a due moti istantanei, che necessariamente potranno ridursi a due moti istantanei di rotazione, definiti dai bivettori-applicati (C_1, ω') e (C_2, ω'') , essendo C_1 e C_2 i rispettivi centri istantanei di rotazione.

La velocità risultante per un generico punto M del sistema rigido, in forza della (5), è data da

$$\frac{dM}{dt} = \omega' \wedge (M - C_1) + \omega'' \wedge (M - C_2);$$

(1) Cfr. M. MANARINI, *Sul calcolo plurivettoriale negli spazi S_n ed applicazioni alla cinematica dei sistemi rigidi*, loc. cit., p. 111.

per essere

$$M - C_2 = (M - C_1) - (C_2 - C_1)$$

ricaviamo

$$(6) \quad \frac{dM}{dt} = (\omega'_2 + \omega''_2) \wedge (M - C_1) - \omega''_2 \wedge (C_2 - C_1).$$

Esiste allora in generale un punto C del sistema rigido in moto, che risulterà con velocità nulla nel moto risultante ed è definito da

$$(7) \quad (\omega'_2 + \omega''_2) \wedge (C - C_1) - \omega''_2 \wedge (C_2 - C_1) = 0,$$

ossia da

$$(8) \quad C - C_1 = \alpha (C_2 - C_1),$$

avendo posto

$$(9) \quad \alpha = [(\omega'_2 + \omega''_2) \wedge]^{-1} \cdot \omega''_2 \wedge,$$

ove il secondo membro è il prodotto di due omografie assiali non degeneri.

Dalle (6) e (7) per sottrazione ricaviamo

$$(10) \quad \frac{dM}{dt} = (\omega'_2 + \omega''_2) \wedge (M - C),$$

per la quale possiamo affermare che il moto risultante dei due moti istantanei è riducibile ad una rotazione istantanea definita dal bivettore-applicato $(C, \omega'_2 + \omega''_2)$; il centro istantaneo C , mediante la (8), è determinato in funzione dei centri istantanei C_1 e C_2 dei moti componenti.

Nel caso del piano ($n = 2$), essendo (C_1, ω') , (C_2, ω'') i due moti infinitesimi componenti, si ottiene facilmente per il moto risultante

$$\frac{dM}{dt} = (\omega' + \omega'') i (M - C).$$

La (8) che determina il centro istantaneo C della rotazione risultante si riduce in questo caso particolare a

$$C - C_1 = \frac{\omega''}{\omega' + \omega''} (C_2 - C_1),$$

e queste relazioni conducono immediatamente al ben noto teorema sulle composizioni delle rotazioni istantanee nel piano o delle rotazioni istantanee attorno ad assi paralleli nello spazio S_3 . Si noti che in questo caso particolare

l'omografia α definita da (9) si riduce all'omotetia $\frac{\omega''}{\omega' + \omega''}$.

8. Per iniziare la discussione e stabilire la posizione del centro istantaneo C di rotazione del moto risultante rispetto ai due centri istantanei C_1 e C_2 dei moti componenti, cominciamo col metterci in condizioni particolari realizzando la circostanza che C risulti allineato con C_1 e C_2 , come avviene in ogni caso per $n = 2$; basterà scegliere convenientemente la posizione di C_2 rispetto a C_1 (nel piano risulterà che questa posizione può essere arbitraria).

Poniamoci all'uopo il problema di cercare le direzioni unite per l'omografia α definita mediante la (9) come prodotto di due omografie assiali non degeneri. Queste direzioni unite dipendono dalle radici reali dell'equazione di grado n in x :

$$(11) \quad I_n(\alpha - x) = 0.$$

Supponiamo che esista una radice reale h di tale equazione; ad essa corrisponderà almeno un versore a tale che per esso risulta

$$(12) \quad \alpha a = h a.$$

Prendendo allora il centro istantaneo C_2 in guisa che sia

$$C_2 - C_1 = m a,$$

con m qualsiasi, non nullo, ricaviamo per C :

$$C - C_1 = \alpha(C_2 - C_1) = h(C_2 - C_1).$$

Osserviamo ancora che per le (9) e (12), in corrispondenza di tale radice h , otteniamo:

$$\omega''_2 \wedge a = h(\omega'_2 + \omega''_2) \wedge a$$

ed ancora

$$(13) \quad [h(\omega'_2 + \omega''_2) - \omega''_2] \wedge a = 0,$$

cosicchè per tale valore h risulta degenerare l'assiale

$$(14) \quad \gamma = [h(\omega'_2 + \omega''_2) - \omega''_2] \wedge$$

e le direzioni unite di α relative ad h sono direzioni nulle per γ .

Poichè viceversa da (13) risaliamo a (12), possiamo affermare che i valori reali h , radici di (11), sono tutti e soltanto quelli per cui risulta degenerare l'assiale data da (14), onde le radici reali dell'equazione (11) sono tutte e soltanto quelle dell'equazione

$$(15) \quad I_n \{ [x(\omega'_2 + \omega''_2) - \omega''_2] \wedge \} = 0,$$

e, in forza delle (12) e (13), per ogni radice reale h di (11) le direzioni unite α di α sono tutte e soltanto le direzioni nulle di γ .

Allora per la proprietà dei determinanti emisimmetrici di ordine pari di risultare quadrati esatti di un'espressione razionale intera dei suoi elementi⁽¹⁾, risulta immediatamente che le radici reali di (15), e quindi di (11), sono certamente multiple di ordine pari.

Sia allora $2r$ l'ordine di molteplicità per la radice reale h di (15) e quindi anche di (11); essendo l'omografia α prodotto di due assiali non degeneri per quanto vedemmo al n. 4, possiamo affermare l'esistenza di uno spazio S_{2r} , con dimensione $2r$ e non con dimensione maggiore, di direzioni unite α per α , per le quali si ha

$$\alpha\alpha = h\alpha.$$

Se allora $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2r}$ sono $2r$ versori linearmente indipendenti di questo spazio S_{2r} , posto,

$$(16) \quad C_2 - C_1 = \sum_1^{2r} m_i \alpha_i,$$

risulta in corrispondenza

$$\alpha(C_2 - C_1) = h(C_2 - C_1),$$

e di conseguenza, per il centro istantaneo C del moto risultante, si ha

$$C - C_1 = h(C_2 - C_1).$$

La (16) esprime la circostanza generale che deve essere verificata per la posizione di C_2 rispetto a C_1 , affinchè il centro istantaneo C del moto risultante risulti allineato con i due centri istantanei C_1 e C_2 dei moti componenti.

Nel piano ($n = 2$) abbiamo veduto che α si riduce ad una omotetia, cosicchè tutte le direzioni del piano sono per essa direzioni unite; pertanto il punto C_2 può avere posizione arbitraria rispetto a C_1 , ottenendosi sempre C allineato con C_1 e C_2 .

Tornando al caso generale, per essere le direzioni unite di α corrispondenti ad h , anche direzioni nulle per l'assiale γ , si scorge che, anche nelle condizioni di h radice multipla di ordine $2r$ per l'equazione (15), come per le circostanze studiate per un'assiale generica al n. 1, l'assiale degenera γ

(1) Cfr., p. es., E. PASCAL, *I determinanti*. Editore Hoepli. Milano, 1923, p. 91.

corrispondente ad h , definita mediante la (14), ha uno spazio S_{2r} , con dimensioni $2r$, di direzioni nulle.

9. CASO DELLE RADICI COMPLESSE.

Sia ora k una radice complessa dell'equazione (11).

Essendo in generale $(\omega'_2 + \omega''_2) \wedge$ un'omografia assiale non degenera, si ha per essa:

$$I_n[(\omega'_2 + \omega''_2) \wedge] \neq 0.$$

D'altra parte per k radice complessa di (11) otteniamo

$$(17) \quad I_n(\alpha - k) = 0,$$

scrittura che dobbiamo intendere in senso puramente algebrico, pensando il primo membro sostituito dal corrispondente determinante con elementi complessi e di ordine n .

Allora le radici di (11) sono tutte e soltanto quelle di

$$I_n(\alpha - k) \cdot I_n[(\omega'_2 + \omega''_2) \wedge] = 0,$$

ossia di

$$(18) \quad I_n\{\omega''_2 \wedge - k(\omega'_2 + \omega''_2) \wedge\} = 0,$$

relazione che pure va intesa in senso esclusivamente algebrico e non come invariante ennesimo di omografia complessa.

Pertanto i valori k complessi che soddisfano (17) e (18) sono gli stessi; cosicchè le equazioni (11) e (15), considerate al numero precedente hanno in comune non soltanto le radici reali, ma anche quelle complesse e, naturalmente, con gli stessi ordini di molteplicità; sono quindi equazioni equivalenti.

Inoltre possiamo ancora affermare, analogamente a quanto dicemmo al numero precedente per la radice reale h , che la radice complessa k è certamente *moltiplica di ordine pari* per l'equazione (11). Se allora $p + iq$ è questa radice k di (11) e dell'ordine $2r$ di molteplicità, ci troviamo nelle condizioni del n. 5, per essere α , definita da (9), prodotto da due omografie assiali non degeneri; cosicchè possiamo affermare l'esistenza di uno spazio S_{4r} di direzioni nulle per l'omografia (reale)

$$\beta = [(\omega'_2 + \omega''_2)^{-1} \wedge \cdot \omega''_2 \wedge - p]^2 + q^2,$$

che si presentano a coppie u_i, v_i ($i = 1, 2, \dots, 2r$), per le quali si ha:

$$\{(\omega'_2 + \omega''_2)^{-1} \wedge \cdot \omega''_2 \wedge\} u_i = p u_i - q v_i$$

$$\{(\omega'_2 + \omega''_2)^{-1} \wedge \cdot \omega''_2 \wedge\} v_i = p v_i + q u_i.$$

Cosicchè, preso C_2 nello spazio invariante S_{4r} per l'omografia α in modo che sia

$$C_2 = C_1 + \sum_i^{2r} m_i u_i + n_i v_i,$$

si ha che il centro istantaneo C del moto risultante appartiene allo stesso spazio S_{4r} ed è determinato da

$$C - C_2 = \sum_i^{2r} m_i (p u_i - q v_i) + n_i (q u_i + p v_i).$$

Se ora in generale poniamo $n = 2n'$ e diciamo h_i le μ radici reali di (11) degli ordini di molteplicità rispettivi $2c_i$ e $p_s \pm iq_s$ le $2r$ radici complesse degli ordini rispettivi di molteplicità $2c_s$, con

$$\sum_i^{\mu} c_i + \sum_s^{\nu} 2c_s = n',$$

esistono in corrispondenza n versori linearmente indipendenti:

$$a_1^i, a_2^i, \dots, a_{2c_i}^i \quad i = 1, 2, \dots, \mu$$

$$u_1^s, u_2^s, \dots, u_{2c_s}^s$$

$$v_1^s, v_2^s, \dots, v_{2c_s}^s \quad s = 1, 2, \dots, \nu$$

tali che essendo

$$C_2 = C_1 + \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{r=1}^{2c_i} l_r^i a_r^i + \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{r=1}^{2c_s} m_r^s u_r^s + n_r^s v_r^s,$$

si ha

$$C - C_1 = \sum_{i=1}^{\mu} h_i \sum_{r=1}^{2c_i} l_r^i a_r^i + \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{r=1}^{2c_s} m_r^s (p_s u_r^s - q_s v_r^s) + n_r^s (q_s u_r^s + p_s v_r^s).$$

Meccanica. — *Sugli archi elastici piani.* — III. *Direttrice qualsiasi.* Nota di E. VOLTERRA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Continuando le ricerche sulle deformazioni (vincolate) degli archi elastici piani ⁽²⁾, mostriamo come le equazioni generali [(8) della Nota I] possano essere integrate servendoci dei risultati ottenuti nel caso di direttrice rettilinea.

Tali equazioni, risolte rispetto alle derivate seconde delle quattro funzioni incognite $\lambda_x, v_x, \lambda_y, v_y$, sono:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} E_1 &= \frac{d^2 \lambda_x}{dx^2} - \frac{k \lambda_x}{(L + 2k) \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d\rho}{dx} \frac{d\lambda_x}{dx} - c \frac{2L + 3k}{L + 2k} \frac{d\lambda_y}{dx} - \\ &\quad - \frac{ck}{(L + 2k) \rho^2} v_x - \frac{k}{(L + 2k) \rho^2} \frac{dv_y}{dx} = 0, \\ E_2 &= \frac{d^2 v_x}{dx^2} - \frac{c^2 k}{(L + 2k)} v_x - \frac{L}{(L + 2k)} c \frac{dv_y}{dx} + \frac{L}{(L + 2k)} \frac{d\lambda_y}{dx} = 0, \\ E_3 &= \frac{d^2 \lambda_y}{dx^2} - c \frac{L + 4k}{k} \frac{d\lambda_x}{dx} - \frac{L + 2k}{k \rho^2} \lambda_y + \frac{2}{\rho} \frac{d\rho}{dx} \frac{d\lambda_y}{dx} - \\ &\quad - \frac{L}{k \rho^2} \frac{dv_x}{dx} + \frac{Lc}{k \rho^2} v_y = 0, \\ E_4 &= \frac{d^2 v_y}{dx^2} + \frac{d\lambda_x}{dx} + \frac{2(L + k)}{k} c \lambda_y + \frac{2L + 3k}{k} c \frac{dv_x}{dx} - \frac{L}{k} c^2 v_y = 0 \end{aligned} \right.$$

col significato delle lettere ripetutamente ricordato.

Esse rientrano nel tipo seguente (lineare ed omogeneo):

$$(2) \quad E_h \equiv \chi''_h + \sum_k (A_{hk} \chi'_k + B_{hk} \chi_k) = 0 \quad (h = 1, 2, 3, 4),$$

(1) Nella seduta del 19 aprile 1936.

(2) Ved. «Rendiconti Lincei» delle sedute del 15 marzo e del 5 aprile 1936.

essendo χ_b le incognite, le A_{hk} e le B_{hk} funzioni note della variabile indipendente x , e designandosi per brevità con un punto sovrapposto la derivazione rispetto ad x . Nel caso in cui esistano secondi membri $\zeta_b(x)$, varranno, al posto delle (2), le equazioni

$$(3) \quad E_b = \zeta_b(x) \quad (b = 1, 2, 3, 4).$$

Si indichi con $\omega = \rho c$ il prodotto della curvatura pel raggio di inerzia. I coefficienti A_{hk} , B_{hk} si potranno assumere sotto la forma seguente:

$$(4) \quad \begin{cases} A_{hk} = a_{hk} + \omega \alpha_{hk}, \\ B_{hk} = b_{hk} + \omega \beta_{hk}, \\ G_b = X_b + \omega \Xi_b, \end{cases}$$

dove le a_{hk} , b_{hk} , X_b sono indipendenti dalla curvatura. Posto in conformità:

$$(5) \quad \begin{cases} P_b = \chi_b'' + \sum_k^4 (a_{bk} \chi_k' + b_{bk} \chi_k), \\ \Pi_b = \sum_k^4 (\alpha_{bk} \chi_k' + \beta_{bk} \chi_k), \end{cases}$$

si ha identicamente dalla (3)

$$(6) \quad E_b \equiv P_b + \omega \Pi_b = X_b + \omega \Xi_b.$$

Gioverà attribuire alle funzioni incognite χ_b la forma,

$$(7) \quad \chi_b = f_b + \omega \varphi_b,$$

risguardando le f_b come le soluzioni che rimangono definite dalle (6) per $\omega = 0$. Sia in generale, sia specificamente nel caso di $\omega = 0$, per la determinazione delle otto costanti d'integrazione, si hanno otto relazioni lineari tra le χ_b e le loro derivate prime, in corrispondenza delle estremità dell'arco ($x = \pm \lambda$); cioè otto relazioni del tipo:

$$(8) \quad L_b \equiv \sum_k^4 (l_{bk} \chi_k' + m_{bk} \chi_k) = n_b \quad (b = 1, 2, 3, \dots, 8),$$

le l_{bk} , m_{bk} ed n_{bk} essendo ben determinate costanti. Introduciamo nelle (6), al posto delle χ_b , le loro espressioni (7), tenendo presente che, nel convenuto ordine di approssimazione, la ω va trattata come una quantità di primo

ordine. Si devono trascurare i termini in ω^2 , e rimane, in base alle (3), (4), (5), (6), (7),

$$(9) \quad E_b \equiv P_b(f) + \omega \{ P_b(\varphi) + \Pi_b(f) \} = X_b + \omega \Xi_b \quad (b = 1, 2, 3, 4),$$

dove, ovviamente, $P_b(f)$, $P_b(\varphi)$, $\Pi_b(f)$ stanno a designare le espressioni differenziali (5) in cui alle z siano sostituite le f o, rispettivamente, le φ . Dalle (9) discendono i due seguenti sistemi di equazioni:

$$(10) \quad P_b(f) = X_b, \quad (b = 1, 2, 3, 4)$$

$$(11) \quad P_b(\varphi) = -\Pi_b(f) + \Xi_b,$$

dei quali il primo contiene unicamente le prime approssimazioni f e il secondo serve alla determinazione delle correzioni φ , una volta calcolate le f . Si ha con ciò il vantaggio che le equazioni (11) sono esattamente quelle del caso a direttrice rettilinea di cui sono state date nella precedente Nota le formule risolutive, tenendo conto delle condizioni ai limiti di maggior rilievo per la Tecnica.

Per le equazioni (11) le corrispondenti condizioni agli estremi assumono in ogni caso la forma omogenea

$$(12) \quad L_k(\varphi) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, 8).$$

Complessivamente, esse forniscono le espressioni esplicite delle correzioni φ_i , una volta nota la soluzione del caso a direttrice rettilinea corrispondente, cioè una volta note le quattro funzioni f_i . Limitiamoci per semplicità al caso di forze normali alla direttrice. Si avrà allora $f_2 = f_3 = 0$, con chè dalle (1), (8), (10), (11) si trova:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_1(\varphi) = \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} - \frac{k \varphi_1}{(L + 2k) \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d\rho}{dx} \frac{d\varphi_1}{dx} - \frac{k}{(L + 2k) \rho^2} \frac{d\varphi_4}{dx}, \\ \Pi_1 = 0, \quad \Xi_1 = 0; \\ P_2(\varphi) = \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} + \frac{L}{(L + 2k) \rho} \frac{d\varphi_3}{dx}, \quad \Pi_2 = -\frac{L}{(L + 2k) \rho} \frac{df_4}{dx}, \\ \Xi_2 = 0; \\ P_3(\varphi) = \frac{d^2 \varphi_3}{dx^2} - \frac{L + 2k}{k \rho^2} \varphi_3 + \frac{2}{\rho} \frac{d\rho}{dx} \frac{d\varphi_3}{dx} - \frac{L}{k \rho^2} \frac{d\varphi_2}{dx}, \\ \Pi_3 = -\frac{L + 4k}{k \rho} \frac{df_1}{dx} + \frac{L}{k \rho^3} f_4, \quad \Xi_3 = -\frac{p}{k \rho}; \\ P_4(\varphi) = \frac{d^2 \varphi_4}{dx^2} + \frac{d\varphi_1}{dx}, \quad \Pi_4 = -\frac{Lc}{k \rho} f_4, \quad \Xi_4 = 0, \end{array} \right.$$

e le quattro equazioni differenziali determinatrici delle quattro funzioni incognite $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ si scindono nei due gruppi seguenti

$$(14) \quad \begin{cases} k\varphi_1 - 2(L + 2k)\rho \frac{d\rho}{dx} \frac{d\varphi_1}{dx} - (L + 2k)\rho^2 \frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + k \frac{d\varphi_4}{dx} = 0, \\ \frac{d\varphi_1}{dx} + \frac{d^2\varphi_4}{dx^2} = -\Pi_4; \end{cases}$$

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{d^2\varphi_2}{dx^2} + \frac{L}{(L + 2k)} \frac{d\varphi_3}{dx} = -\Pi_2, \\ \frac{d^2\varphi_3}{dx^2} - \frac{L + 2k}{k\rho^2} \varphi_3 + \frac{2}{\rho} \frac{d\rho}{dx} \frac{d\varphi_3}{dx} - \frac{L}{k\rho^2} \frac{d\varphi_2}{dx} = -\Pi_3 + \Xi_3. \end{cases}$$

Come appare dalle formule (13), Π_2 e Π_3 sono indipendenti dalla curvatura c ; mentre invece nella espressione della Π_4 entra la c . La c è costante per archi circolari, mentre nel caso di archi parabolici ed ellittici (che insieme con gli archi circolari sono quelli che più ci interessano per le applicazioni) è una ben determinata funzione della ascissa curvilinea x . In ambedue i casi però si potrà esprimere con sufficiente approssimazione la c sotto la forma

$$(16) \quad c = c_0 - c_1 x^2.$$

Nel caso della parabola, la cui direttrice ha l'equazione $\eta = f \frac{\xi^2}{a^2}$ (f frequenza, $2a$ corda) sarà (se l'arco è molto ribassato):

$$(17) \quad c_0 = \frac{2f}{a^2}, \quad c_1 = \frac{12f^3}{a^6};$$

mentre nel caso in cui la direttrice è una semiellisse di semiassi f ed a , si potrà ritenere:

$$(18) \quad c_0 = \frac{f}{a^2}, \quad c_1 = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{f}{a^2} - \frac{a}{f^2} \right).$$

Incominciamo col supporre lo spessore dell'arco, e quindi anche ρ costante. Gli integrali φ_i hanno le espressioni

$$(19) \quad \begin{cases} \varphi_1 = \frac{kB_1}{2(L + 2k)\rho^2} x^2 + \frac{B_2}{\rho^2} x + B_3, \\ \varphi_2 = -\frac{L}{(L + 2k)A} \{B_5 e^{Ax} + B_6 e^{-Ax}\} - \frac{L + 2k}{L} B_7 x + B_8, \\ \varphi_3 = B_5 e^{Ax} - B_6 e^{-Ax} + B_7, \quad \text{essendo } A = \frac{2}{\rho} \sqrt{\frac{L + k}{L + 2k}}, \\ \varphi_4 = -\frac{kB_1}{6(L + 2k)\rho^2} x^3 - \frac{B_2}{2\rho^2} x^2 - B_3 x + B_1 x + B_4; \end{cases}$$

c

$$(20) \left\{ \begin{aligned} B_1 &= -\frac{1}{k} - \int_0^x \Pi_4 dx + C_1, \\ B_2 &= \frac{k}{(L+2k)} \int_0^x x \Pi_4 dx + C_2, \\ B_3 &= -\frac{k}{2(L+2k)\rho^2} \int_0^x x^2 \Pi_4 dx + C_3, \\ B_4 &= -\frac{k}{6(L+2k)\rho^2} \int_0^x x^3 \Pi_4 dx + \int_0^x x \Pi_4 dx + C_4, \\ B_5 &= \frac{1}{2A} \int_0^x e^{-Ax} (\Xi_3 - \Pi_3) dx - \frac{L(L+2k)}{8k(L+k)} \int_0^x e^{-Ax} \Pi_2 dx + C_5, \\ B_6 &= \frac{1}{2A} \int_0^x e^{Ax} (\Xi_3 - \Pi_3) dx + \frac{L(L+2k)}{8k(L+k)} \int_0^x e^{Ax} \Pi_2 dx + C_6, \\ B_7 &= \frac{L(L+2k)}{4k(L+k)} \int_0^x \Pi_2 dx + C_7, \\ B_8 &= \frac{L}{(L+2k)A^2} \int_0^x (\Xi_3 - \Pi_3) dx + \frac{(L+2k)^2}{4k(L+k)} \int_0^x \Pi_2 x dx + C_8, \end{aligned} \right.$$

essendo $C_i (i = 1, 2, 3, \dots, 8)$ le otto costanti di integrazione, che saranno determinate dalle condizioni $L_b = 0$ ad ambedue le estremità.

Anche il caso di spessore (gradualmente) variabile dà luogo a espressioni esplicite degli integrali, che si possono ottenere dal caso trattato, applicando ancora una volta un criterio di approssimazione successiva.

Meccanica (Idrodinamica). — *Sul vortice elicoidale*. Nota di C. AGOSTINELLI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. M. PANETTI.

I. CONDIZIONI DI INTEGRABILITÀ DELLE EQUAZIONI IDRODINAMICHE DI EULERO. — In una Memoria ⁽²⁾ in corso di pubblicazione nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », ho dimostrato che, in coordinate cilindriche, le condizioni di integrabilità dell'equazione idrodinamica di Eulero ⁽³⁾

$$(I) \quad \frac{1}{2} \text{grad} (v^2) + (\text{rot } v) \wedge v + \frac{\partial v}{\partial t} = \text{grad } U - \frac{1}{\rho} \text{grad } p,$$

nell'ipotesi che le forze di massa ammettano un potenziale U , che la densità ρ del fluido sia costante, e che il vortice non dipenda esplicitamente del tempo, risultano

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{v_2}{q_1^2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial q_2} - \frac{\partial v_2}{\partial q_3} \right) - v_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial q_3} - \frac{\partial v_3}{\partial q_1} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_3} \left[v_1 \left(\frac{\partial v_2}{\partial q_1} - \frac{\partial v_1}{\partial q_2} \right) - \right. \\ \left. - v_3 \left(\frac{\partial v_3}{\partial q_2} - \frac{\partial v_2}{\partial q_3} \right) \right] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial q_3} \left[v_3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial q_3} - \frac{\partial v_3}{\partial q_1} \right) - \frac{v_2}{q_1^2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial q_1} - \frac{\partial v_1}{\partial q_2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{v_2}{q_1^2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial q_2} - \frac{\partial v_2}{\partial q_3} \right) - \right. \\ \left. - v_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial q_3} - \frac{\partial v_3}{\partial q_1} \right) \right] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial q_1} \left[v_1 \left(\frac{\partial v_2}{\partial q_1} - \frac{\partial v_1}{\partial q_2} \right) - v_3 \left(\frac{\partial v_3}{\partial q_2} - \frac{\partial v_2}{\partial q_3} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_2} \left[v_3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial q_3} - \frac{\partial v_3}{\partial q_1} \right) - \right. \\ \left. - \frac{v_2}{q_1^2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial q_1} - \frac{\partial v_1}{\partial q_2} \right) \right] = 0, \end{array} \right.$$

alle quali va aggiunta l'equazione di continuità $\text{div } v = 0$, che nelle medesime coordinate porge

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial q_1} (q_1 v_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{v_2}{q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} (q_1 v_3) = 0,$$

(1) Nella seduta del 3 maggio 1936.

(2) C. AGOSTINELLI, *Sopra alcuni notevoli moti fluidi vorticosi*. (In corso di pubblicazione nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo »).

(3) Per la forma vettoriale delle equazioni idrodinamiche di Eulero cfr.: C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Elementi di calcolo vettoriale*, p. 193 (Zanichelli, Bologna, 1920) vedi anche T. BOGGIO, *Dimostrazione assoluta delle equazioni classiche dell'idrodinamica*. (« Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino », vol. XLV, 1910).

ove i parametri q_1, q_2, q_3 stanno rispettivamente ad indicare, in coordinate cilindriche, il raggio vettore r , l'anomalia θ , e la coordinata z , mentre v_1, v_2, v_3 sono le componenti covarianti della velocità, cioè, se P è il punto che descrive il campo del moto,

$$(4) \quad v_1 = \mathbf{v} \times \frac{\partial P}{\partial q_1}, \quad v_2 = \mathbf{v} \times \frac{\partial P}{\partial q_2}, \quad v_3 = \mathbf{v} \times \frac{\partial P}{\partial q_3}.$$

Partendo dalle equazioni (2) e (3) ho determinato, nella Memoria citata, una soluzione delle equazioni idrodinamiche di Eulero che comprende come caso particolare quella relativa ai vortici di Hill.

In questa Nota invece, utilizzando le stesse equazioni, mi sono proposto di assegnare una soluzione completa della (1), corrispondente al vortice elicoidale, e a tal fine ho ammessa l'ipotesi che il vortice abbia componente costante secondo l'asse z e che le componenti della velocità siano indipendenti dall'anomalia (parametro q_2).

2. VORTICE ELICOIDALE. — L'ipotesi che il vortice abbia componente costante secondo l'asse z , equivale a supporre

$$\text{rot } \mathbf{v} \times \frac{\partial P}{\partial q_3} = \frac{1}{q_1} \text{rot } \mathbf{v} \times \frac{\partial P}{\partial q_1} \wedge \frac{\partial P}{\partial q_2} = \frac{1}{q_1} \left(\frac{\partial v_2}{\partial q_1} - \frac{\partial v_1}{\partial q_2} \right) = 2\omega_0 (\text{costante}),$$

ovvero

$$(5) \quad \frac{\partial v_2}{\partial q_1} - \frac{\partial v_1}{\partial q_2} = 2\omega_0 q_1.$$

Ammettendo poi che le componenti della velocità siano indipendenti da q_2 , dovranno essere nulle tutte le derivate parziali rispetto a q_2 , per cui la (5) porge subito

$$(6) \quad \frac{\partial v_2}{\partial q_1} = 2\omega_0 q_1; \quad (6') \quad v_2 = \omega_0 q_1^2 + V_2(q_3) + f(t),$$

ove V_2 è funzione incognita di q_3 ed f è un'arbitraria funzione del tempo.

Le (2) e (3) diventano quindi

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(2\omega_0 q_1 v_1 + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial q_3} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial q_3} \left[v_3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial q_3} - \frac{\partial v_3}{\partial q_1} \right) - \frac{2\omega_0 v_2}{q_1} \right] + \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{v_2}{q_1^2} \frac{\partial v_2}{\partial q_3} + v_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial q_3} - \frac{\partial v_3}{\partial q_1} \right) \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(2\omega_0 q_1 v_1 + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial q_3} \right) &= 0, \end{aligned} \right.$$

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial q_1} (q_1 v_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (q_1 v_3) = 0.$$

Cerchiamo una soluzione di questo sistema ponendo nella (6') $V_2(q_3) = 0$, cioè

$$(9) \quad \frac{\partial v_2}{\partial q_3} = 0.$$

La componente v_2 della velocità risulta così determinata dalla

$$(10) \quad v_2 = \omega_0 q_1^2 + f(t),$$

mentre la prima e terza delle (7) diventano

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial q_3}(q_1 v_1) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial q_1}(q_1 v_1) = 0,$$

le quali porgono immediatamente

$$(12) \quad v_1 = \frac{a}{q_1},$$

con a costante, o eventualmente funzione del tempo.

La (8), per la seconda delle (11), dà inoltre $\frac{\partial v_3}{\partial q_3} = 0$, e in virtù di questa, della (9) e della (12), la seconda delle (7) porge

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{q_1} \frac{\partial v_3}{\partial q_1} \right) = 0,$$

dalla quale si ottiene

$$(13) \quad v_3 = F(t) - b q_1^2,$$

con b costante arbitraria, ed $F(t)$ funzione per ora arbitraria del tempo.

Le (10), (12) e (13), forniscono così la soluzione delle equazioni di Eulero

$$(14) \quad v_1 = \frac{a}{q_1}, \quad v_2 = \omega_0 q_1^2 + f(t) \quad ; \quad v_3 = F(t) - b q_1^2,$$

cioè, in forma vettoriale

$$(14') \quad \mathbf{v} = \frac{a}{q_1} \text{grad } q_1 + [\omega_0 q_1^2 + f(t)] \text{grad } q_2 + [F(t) - b q_1^2] \text{grad } q_3.$$

Da questa si ottiene facilmente, in base a note formule di calcolo vettoriale ⁽¹⁾

$$(15) \quad \text{rot } \mathbf{v} = \text{grad } (q_1^2) \wedge \text{grad } (\omega_0 q_2 - b q_3),$$

(1) Cfr. C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Analisi vettoriale generale (Trasformazioni Lineari)*, p. 182 [2]. (Zanichelli, Bologna, 1929).

la quale dice che le *linee vorticoso* sono le *eliche cilindriche* di equazioni

$$q_1^2 = \text{cost} \quad ; \quad q_3 = \frac{\omega_0}{b} q_2 + \text{cost},$$

e la soluzione (14) corrisponde pertanto al *moto vorticoso elicoidale*.

È noto altresì che le *superficie fluide* $\lambda = \text{cost}$ devono soddisfare all'equazione ⁽¹⁾

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial q_1} v_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial q_2} \cdot \frac{v_2}{q_1^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial q_3} v_3 = 0,$$

la quale, in base alle (14) ammette la soluzione particolare

$$(16) \quad \lambda = q_1^2 - 2 \int_0^t a dt = r_0^2 (\text{costante}),$$

e si tratta perciò di cilindri circolari di asse χ .

3. MOTO ALL'ESTERNO DEL VORTICE ELICOIDALE. — Proponiamoci ora di determinare una soluzione irrotazionale dell'equazione (1) di Eulero all'esterno del cilindro vorticoso di raggio r , per la (16) definito dalla

$$(16'') \quad r^2 = 2 \int_0^t a dt + r_0^2.$$

All'esterno di detto cilindro esisterà allora il *potenziale φ di velocità*, il quale, per la continuità della velocità attraverso il detto cilindro, dovrà per le (14), soddisfare alle condizioni

$$(17) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right)_{q_1=r} = \frac{a}{r} \quad ; \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right)_{q_1=r} = \omega_0 r^2 + f(t) \quad ; \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right)_{q_1=r} = F(t) - br^2;$$

inoltre dovrà essere soluzione dell'equazione di Laplace $\Delta_2 \varphi = 0$, che in coordinate cilindriche porge notoriamente

$$(18) \quad \frac{\partial}{\partial q_1} \left(q_1 \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{q_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(q_1 \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) = 0.$$

Le condizioni (17) sono, in generale, incompatibili colle soluzioni della (18); ma cercando una soluzione della (18) che sia combinazione lineare di tre funzioni, ciascuna delle quali contenga uno solo dei parametri

(1) Cfr. C. AGOSTINELLI, loc. cit.

q_1, q_2, q_3 , e che nello stesso tempo soddisfi alle condizioni (17), essa risulta data, a meno di una inessenziale funzione arbitraria del tempo, dalla (1)

$$(19) \quad \varphi = a \log q_1 + (\omega_0 r^2 + f) q_2 + (F - br^2) q_3.$$

All'esterno del cilindro (16') si ha perciò la soluzione

$$(20) \quad v_{e1} = \frac{a}{q_1} \quad ; \quad v_{e2} = \omega_0 r^2 + f \quad ; \quad v_{e3} = F - br^2;$$

cioè, sotto forma vettoriale,

$$(20') \quad \mathbf{v}_e = \text{grad} [a \log q_1 + (\omega_0 r^2 + f) q_2 + (F - br^2) q_3].$$

4. CALCOLO DELLA PRESSIONE.

a) *Pressione all'interno del vortice elicoidale.* Per calcolare la pressione idrodinamica $P_i = p - \rho U$, all'interno del vortice, osserviamo intanto che dalle (14') e (15), (ricordando che a può essere funzione del tempo), si ricava

$$v_i^2 = \frac{a^2}{q_1^2} + \left(\omega_0 q_1 + \frac{f}{q_1} \right)^2 + (F - bq_1^2)^2,$$

$$(\text{rot } \mathbf{v}_i) \wedge \mathbf{v}_i = \text{grad} \left[2a (\omega_0 q_2 - bq_3) - \omega_0 (\omega_0 q_1^2 + 2f \log q_1) + \right. \\ \left. + b \left(F - \frac{1}{2} bq_1^2 \right) q_1^2 \right],$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = \text{grad} \left(\frac{da}{dt} \log q_1 + \frac{df}{dt} q_2 + \frac{dF}{dt} q_3 \right),$$

e perciò la (1) porge

$$(21) \quad P_i = \Pi_i - \frac{1}{2} \rho \left[\frac{a^2}{q_1^2} + \left(\omega_0 q_1 + \frac{f}{q_1} \right)^2 + 4a (\omega_0 q_2 - bq_3) - \right. \\ \left. - 2\omega_0 (\omega_0 q_1^2 + 2f \log q_1) + 2 \left(\frac{da}{dt} \log q_1 + \frac{df}{dt} q_2 + \frac{dF}{dt} q_3 \right) \right],$$

con Π_i funzione arbitraria del tempo.

(1) È utile rilevare che la ricerca di soluzione della (18) del seguente tipo:

$$\varphi = f_{12}(q_1, q_2) + f_{23}(q_2, q_3) + f_{13}(q_1, q_3),$$

o più in particolare del tipo:

$$\varphi = f_1(q_1) \cdot f_2(q_2) + F_2(q_2) \cdot F_3(q_3) + \Phi_1(q_1) \cdot \Phi_3(q_3),$$

le quali soddisfino alle condizioni (17), conduce sempre alla soluzione (19).

b) *Pressione all'esterno.* In questo caso per la (20'), e osservando che per la (16') è $\frac{dr^2}{dt} = 2a$, si ottiene

$$\text{grad}(\mathbf{v}_e^2) = \text{grad} \left[\frac{a^2}{q_1^2} + (\omega_0 r^2 + f) \frac{1}{q_1^2} + (F - br^2)^2 \right],$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} = \text{grad} \left[\frac{da}{dt} \log q_1 + \left(2\omega_0 a + \frac{df}{dt} \right) q_2 + \left(\frac{dF}{dt} - 2ab \right) q_3 \right], (\text{rot } \mathbf{v}_e = 0),$$

e dalla (1) si ricava pertanto

$$(22) \quad P_e = \Pi_e - \frac{1}{2} \rho \left[\frac{a^2}{q_1^2} + (\omega_0 r^2 + f)^2 \frac{1}{q_1^2} + 4a(\omega_0 q_2 - bq_3) + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{da}{dt} \log q_1 + \frac{df}{dt} q_2 + \frac{dF}{dt} q_3 \right) \right],$$

essendo anche Π_e funzione arbitraria del tempo.

Osserviamo ora che P_e dovrà essere all'infinito una quantità finita, e ciò richiede che sia nullo il coefficiente da/dt di $\log q_1$, e nullo il coefficiente $\frac{dF}{dt} - 2ab$, di q_3 , cioè che si abbia

$$a = \text{cost} \quad , \quad (23) \quad F = 2abt + c,$$

con c nuova costante. È superfluo avvertire che non è necessario che si annulli il coefficiente di q_2 , quando si faccia variare questo parametro, in tutto il campo del moto, da zero a 2π .

È da notare inoltre che per la continuità della pressione attraverso la superficie cilindrica che limita il vortice dovrà aversi $(P_i)_{q_1=r} = (P_e)_{q_1=r}$, la qual cosa implica che sia

$$\Pi_e = \Pi_i + \rho \omega_0 (\omega_0 r^2 + 2f \log r),$$

e quindi infine le (21) e (22) diventano

$$P_i = \Pi_i - \frac{1}{2} \rho \left\{ \frac{a^2}{q_1^2} + \left[\omega_0 q_1 + \frac{f(t)}{q_1} \right]^2 + 2 \left(2a\omega_0 + \frac{df}{dt} \right) q_2 - \right. \\ \left. - 2\omega_0 (\omega_0 q_1^2 + 2f \log q_1) \right\},$$

$$P_e = \Pi_i + \rho \omega_0 (\omega_0 r^2 + 2f \log r) - \frac{1}{2} \rho \left[\frac{a^2}{q_1^2} + (\omega_0 r^2 + f) \frac{1}{q_1^2} + \right. \\ \left. + 2 \left(2a\omega_0 + \frac{df}{dt} \right) q_2 \right],$$

ove per la (16') è $r^2 = 2at + r_0^2$.

Giova inoltre rilevare che in base ai valori trovati di r^2 e di F , (23), la terza delle (20) dà $v_{e3} = c - br_0^2$; cioè è costante la componente secondo l'asse z della velocità all'esterno del cilindro vorticoso; e se si vuole che all'infinito la corrente sia puramente traslatoria nella direzione z , per la seconda delle (20) si dovrà porre $f = -\omega_0 r^2 = -\omega_0 (2at + r_0^2)$.

Meccanica. — *Rotazioni plastiche.* Nota di B. FINZI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

Si consideri il movimento di un mezzo plastico e viscoso, i cui punti descrivono circonferenze coassiali, mentre ogni quantità locale dipende soltanto dal tempo e dalla distanza dall'asse.

Dimostreremo che le equazioni indefinite di questi movimenti sono lineari, del tutto identiche a quelle relative al caso di un fluido soltanto viscoso, salvo l'aggiunta in una di esse di un addendo costante eguale, in valore assoluto, al doppio della costante di plasticità.

Constateremo allora facilmente che, nel moto stazionario, se il mezzo può ritenersi incompressibile e le forze esterne di campo sono conservative, l'integrale generale si identifica con una soluzione trovata da Cisotti ⁽²⁾ per i fluidi soltanto viscosi, soggetti però a potenziali non uniformi ⁽³⁾.

Mi limito in questa Nota a discutere la soluzione precedente, riserbandomi di studiare in una prossima ricerca i moti variabili, sviluppando il caso fisicamente notevole relativo alla dispersione di un vortice.

I. EQUAZIONI DEI MEZZI PLASTICI. — Diciamo x^k ($k = 1, 2, 3$) le coordinate generali di un punto P di un corpo plastico. Nella metrica euclidea $ds^2 = a_{ik} dx^i dx^k$, siano v_i ($i = 1, 2, 3$) le componenti della velocità di P al tempo t . Gli sforzi saranno caratterizzati da un tensore doppio simmetrico

$$(1) \quad \Phi_{ij} = \Phi_{ji} = pa_{ij} + \varphi_{ij}.$$

Lo scalare p rappresenta la pressione, e corrisponde alla media aritmetica degli sforzi in un punto, cioè

$$(2) \quad 3p = \Phi^k_k;$$

il tensore simmetrico φ_{ij} , che, per (2), ha invariante lineare $\varphi^i_i = 0$, dipende dalla plasticità e dalla viscosità del mezzo, e dipende in modo essenziale dal tensore simmetrico $\xi_{hk} = \frac{1}{2}(v_{h|k} + v_{k|h})$ rappresentante la velocità

(1) Nella seduta del 3 maggio 1936.

(2) CISOTTI, questi « Rendiconti », ser. 5^a, XXXIII, 253, 1924.

(3) CALDONAZZO, questi « Rendiconti », ser. 6^a, V, 152, 1927.

di deformazione. Il tensore φ_{ij} si annulla se il mezzo non è nè plastico nè viscoso, e si annulla pure con la velocità di deformazione. Esso è somma del tensore ψ_{ij} , caratterizzante gli sforzi dovuti alla sola plasticità, e di quello χ_{ij} , caratterizzante gli sforzi dovuti alla sola viscosità: $\varphi_{ij} = \psi_{ij} + \chi_{ij}$.

Gli sforzi ψ_{ij} sono formalmente così esprimibili:

$$(3) \quad \psi_{ij} = c_{ij}^{hk} \xi_{hk}.$$

Il tensore c_{ij}^{hk} rispecchia le caratteristiche di isotropia o di anisotropia del mezzo, ma *non dipende soltanto* dalla natura plastica di questo. In mezzi isotropi (essendo l'invariante φ_i^i nullo indipendentemente dalla viscosità del mezzo, onde anche l'invariante $\psi_i^i = 0$) potremo scrivere (3), con facili calcoli, così:

$$(4) \quad \psi_{ij} = \frac{2}{3} M \xi_k^k a_{ij} - 2 M \xi_{ij},$$

nella quale M , anche in mezzi omogenei, *non* è una costante, ma una funzione del posto, essenzialmente *positiva*, ignota *a priori*.

Gli sforzi χ_{ij} , dovuti alla sola viscosità, potranno essere espressi da una formula analoga alla (3), nella quale però il corrispondente tensore c_{ij}^{hk} dipende soltanto dalla natura viscosa del mezzo, e, in un mezzo isotropo omogeneo, se μ è una costante che rappresenta il coefficiente di viscosità, sarà notoriamente

$$(5) \quad \chi_{ij} = \frac{2}{3} \mu \xi_k^k a_{ij} - 2 \mu \xi_{ij}.$$

Otterremo dunque, tenendo conto della plasticità e della viscosità,

$$(6) \quad \varphi_{ij} = (M + \mu) \left(\frac{2}{3} \xi_k^k a_{ij} - 2 \xi_{ij} \right).$$

Un'altra condizione dovremo porre, atta ad eliminare l'arbitrarietà di M : la condizione che Mises⁽¹⁾ trasse dalla prima condizione di plasticità di Tresca⁽²⁾. Questa afferma che il secondo invariante dell'omografia degli sforzi ψ_{ij} , recanti il contributo della plasticità, è costante, e precisamente opposto al doppio del quadrato della costante h di plasticità. Da questa condizione, ricordando che l'invariante $\psi_i^i = 0$, si ricava:

$$(7) \quad \psi_{ij} \psi^{ij} = 2 h^2,$$

che afferma essere costante l'invariante quadratico degli sforzi ψ_{ij} .

(1) MISES, « Göttingen Nachr. », 582, 1913.

(2) TRESCA, « Comptes Rendus », 68, 1197 (1869), 70, 27, 288, 368 (1870); ST. VENANT, « Journ. de math. », 16, 308, 473 (1871); LEVY, « Journ. de math. », 16, 369 (1871).

Siamo ora in grado di scrivere le equazioni indefinite di movimento. Se ρ è la densità del mezzo, U il potenziale delle forze unitarie di campo, si ha:

$$(8) \quad \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_{ijk} v^k = (U - p)_{,i} - \psi_{ij}^{,i} - \chi_{ij}^{,j},$$

a cui aggiungiamo l'equazione complementare, stabilente un legame finito fra ρ e p , e l'equazione che traduce il principio di conservazione della massa:

$$(9) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)^{,i} = 0.$$

Volendo poi rendere esplicita la (8), scriveremo, grazie a (4), (5), (7):

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_{ijk} v^k &= (U - p)_{,i} + (M + \mu) \left(\frac{1}{3} v_{jji}^{,j} + v_{ijj}^{,i} \right) - \frac{2}{3} M_{ji} v_j^{,j} + \\ &+ M^{ij} (v_{ijj}^{,j} + v_{jjj}^{,i}) \quad , \quad M^2 (v_{ijj}^{,i} v^{jj} + v_{ijj}^{,j} v^{ii} - \frac{2}{3} v_i^{,i} v_j^{,j}) = h^2. \end{aligned} \right.$$

Si tratta dunque, in generale, di integrare (noto ρ in funzione di p) le cinque equazioni differenziali, formate dalle quattro (10) e dalla (9), nelle cinque incognite: v_1, v_2, v_3, p, M .

L'integrazione deve essere eseguita tenendo conto delle condizioni iniziali e di quelle che prefissano al contorno la velocità, con l'avvertenza di assumere il segno di h in modo che la funzione M risulti positiva. Si rilevi però che, se le condizioni al contorno permettono un moto rigido in tutto il campo C , oppure le condizioni di raccordo cinematico permettono un moto cosiffatto in una regione C' di esso, in C , oppure in C' , il moto non è plastico, ma è semplicemente rigido, quando sia soddisfatta la seguente ulteriore condizione: gli sforzi elastici che si destano in C , o in C' , hanno invariante quadratico minore di $2h^2$. Il movimento plastico effettivo avrà luogo soltanto là dove almeno una delle condizioni precedenti non è soddisfatta.

2. EQUAZIONI DELLE ROTAZIONI PLASTICHE. — Supponiamo ora che le traiettorie siano circonferenze di comune asse z , mentre la velocità periferica v , la pressione p , la densità ρ , il potenziale (uniforme) U , la funzione M dipendono soltanto dal tempo t e dalla distanza r dall'asse. Riferendosi a coordinate cilindriche r, θ, z , per cui $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$, si otterrà che è nulla ogni componente dipendente dall'indice 3, e:

$$(11) \quad v_1 = 0 \quad , \quad v_2 = rv \quad , \quad \xi_{11} = \xi_{22} = 0 \quad , \quad 2\xi_{12} = rv' - v,$$

dove l'apice indica derivazione rispetto ad r . Da (4) e (5) si ricava:

$$(12) \quad \psi_{11} = \psi_{22} = \chi_{11} = \chi_{22} = 0, \quad \psi_{12} = -M(rv' - v), \\ \chi_{12} = -\mu(rv' - v),$$

onde da (7):

$$(13) \quad \psi_{12} = \mp hr,$$

dove vale il segno superiore o l'inferiore, a seconda che $rv' - v$ è positivo o negativo.

Sostituendo in (8) e (9) si ricava:

$$(14) \quad \begin{cases} -\rho v^2 = r(U - p)' \\ \rho r\dot{v} = \pm 2h + \mu r(v' + vr^{-1})' \end{cases} \quad (15) \quad \dot{p} = 0.$$

In queste relazioni il punto indica derivazione rispetto a t , e, nell'addendo $\pm 2h$, si deve assumere il segno superiore o l'inferiore, a seconda che $rv' - v$ è positivo o negativo.

Le equazioni (14), che avrebbero potuto ricavarsi direttamente dalle (10), sono le equazioni di quelle che diciamo « rotazioni plastiche ». Esse differiscono dalle equazioni relative alle rotazioni viscosse per l'aggiunta alla seconda di queste del termine costante $\pm 2h$, dovuto alla plasticità.

Se il mezzo è incomprimibile, o può ritenersi tale ($v_{ij}^j = 0$), ρ è costante e p è indipendente da ρ , onde basta integrare l'equazione lineare differenziale del secondo ordine, costituita dalla seconda delle (14), per determinare v ; dopo di che la prima delle (14) fornisce p con una semplice quadratura, e, grazie a (12), (13) e (1), si determinano gli sforzi.

3. MOTO STAZIONARIO. — L'equazione indefinita relativa al moto stazionario di un mezzo plastico incomprimibile è la seguente:

$$(16) \quad \mu r(v' + vr^{-1})' = \mp 2h.$$

Da essa si deduce che, in assenza di viscosità, il moto stazionario di un mezzo plastico è impossibile; mentre il moto è indeterminato, se, insieme alla viscosità, manca la plasticità, se cioè il fluido è perfetto.

L'integrale generale di (16), per $\mu \neq 0$, se I e A denotano costanti, *a priori* arbitrarie, si esprime così:

$$(17) \quad v = \frac{I}{2\pi r} + Ar \mp \frac{h}{\mu} r \log r.$$

La soluzione trovata, per $h = 0$ (ma $\mu \neq 0$), è quella che rappresenta le rotazioni viscosse, corrispondenti a potenziali uniformi⁽¹⁾; mentre, per $h \neq 0$,

(1) Si noti che, mentre per un fluido perfetto v è funzione arbitraria di r , per un

essa corrisponde alla soluzione di Cisotti⁽¹⁾ per rotazioni soltanto viscoso, ma relative al caso che il potenziale non sia uniforme⁽²⁾: basta all'uopo identificare la costante di polidromia del potenziale con $\pm 2h$.

Supponendo la costante arbitraria I , caratterizzante la singolarità (vortice) lungo l'asse, positiva, si constata tosto che l'espressione

$$(18) \quad rv' - v = -\frac{I}{\pi r} \mp \frac{h}{\mu} r$$

è negativa nelle vicinanze dell'asse; onde, entro un cilindro d'asse z e di raggio R , tale che

$$(19) \quad R^2 = \frac{\mu I}{\pi h},$$

si dovrà prendere il segno inferiore nella soluzione (17), mentre (con $I \geq 0$) non si potrà prendere in nessun luogo il segno superiore.

Determiniamo ora il movimento, assegnando l'intensità I del vortice lungo l'asse ed imponendo che all'infinito regni la quiete. Entro un cilindro d'asse z e raggio b , *a priori* arbitrario, ma non nullo e non superiore ad R , la soluzione sarà data dalla (17), nella quale si prenderà il segno inferiore, e si determinerà A in modo che, per $r = b$, $v = 0$; fuori di questo cilindro, $v = 0$. Dunque:

$$(20) \quad \begin{cases} \text{per } 0 < r < b, & v = \frac{I(b^2 - r^2)}{2\pi r b^2} - \frac{h}{\mu} r \log \frac{b}{r}, \\ \text{per } r \geq b, & v = 0. \end{cases}$$

La determinazione del raggio b d'azione plastica è, a rigore, estranea al problema relativo al moto stazionario di un mezzo plastico. Essa può compiersi riferendosi alla genesi di questo movimento, qualora lo si pensi ottenuto dalla degenerazione di una iniziale deformazione elastica. La costante b risulta allora eguale al raggio del cilindro, entro il quale l'invariante quadratico del tensore degli originari sforzi elastici superava $2h^2$, mentre esternamente ad esso questo invariante non superava tale limite.

Manifestamente la soluzione (20), quando si disponga opportunamente della costante I , è atta a rappresentare il movimento esternamente ad un cilindro rigido circolare, di raggio $a < b$ e d'asse z , uniformemente rotante, con velocità angolare ω , attorno all'asse. Risulta

$$(21) \quad I = \frac{2\pi a^2 b^2}{b^2 - a^2} \left(\omega + \frac{h}{\mu} \log \frac{b}{a} \right).$$

fluido viscoso, anche se la sua viscosità tende a zero (fluido limite di Oseen), v è funzione determinata di r , corrispondente ad una rotazione viscosa.

(1) CISOTTI, loc. cit.

(2) CALDONAZZO, loc. cit.

È pure evidente come la soluzione ora considerata serva a rappresentare il movimento nella regione compresa fra due cilindri rigidi coassiali: l'interno rotante, coincidente con quello precedentemente considerato di raggio a , l'esterno fisso, avente raggio $c \geq b$.

Calcoliamo ora il momento, M_a , delle forze esterne atte a mantenere in rotazione il cilindro di raggio a . In virtù di (12), (18) e (13), risulta $M_a = 2\mu I$; ossia, per (21):

$$(22) \quad M_a = \frac{4\pi a^2 b^2}{b^2 - a^2} \left(\mu\omega + b \log \frac{b}{a} \right).$$

Si noti che, in assenza di plasticità ($h = 0$), M_a ed ω risultano proporzionali, e la (22) si muta nella soluzione di Stokes ⁽¹⁾, relativa al problema la cui impostazione risale a Newton ⁽²⁾. Se il mezzo è plastico, il movimento può aver luogo soltanto se M_a supera un valore H proporzionale ad b , dato da (22) ponendovi $\omega = 0$. Superato questo valore, la dipendenza fra M_a ed ω è lineare, rappresentabile cioè con una retta d'intercetta H sull'asse M_a , e parallela a quella (passante per origine) che rappresenta la dipendenza fra M_a ed ω per fluidi viscosi.

Il comportamento illustrato, ben caratteristico della plasticità, è analogo a quello che si verifica nel noto scorrimento fra due piani paralleli, l'uno fisso e l'altro mobile. Come nel caso ora accennato, la (22) può servire a determinare sperimentalmente le due costanti μ ed h relative ad un mezzo plastico e viscoso.

(1) STOKES, «Cambridge Trans.», VIII, 287 (1845), IX, 8 (1851).

(2) NEWTON, *Principia*, lib. II, prop. 51.

Meccanica. — *Procedimenti per ricerche sperimentali su suoli elastici.* Nota di C. JODI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. P. BURGATTI.

1. Nei problemi di strutture appoggiate su suoli elastici è uso corrente in tecnica di adottare per la funzione di influenza che li caratterizza una legge che potrebbe dirsi di elasticità *locale*. Se ci riferiamo a una striscia larga 1 e indichiamo con x e ξ due determinazioni della coordinata corrente lungo la striscia, con $c(x, \xi)$, al solito, l'abbassamento, o cedimento in x prodotto dal carico 1, sussiste la espressione

$$(1) \quad c(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{C} & \text{per } x = \xi \\ 0 & \text{per } x \neq \xi \end{cases}$$

dove C è la costante elastica del suolo (la *Bettungsziffer* dei tedeschi). Questa legge, manifestamente contraria ad ogni considerazione intuitiva, eccezione fatta per i liquidi, in quanto elimina ogni collaborazione del terreno circostante alla zona caricata, dà, *in media*, risultati sufficienti ai bisogni della pratica: infatti, dalle applicazioni sistematiche iniziate dallo Zimmermann nell'ambito del materiale fisso ferroviario, a quelle fatte alle fondazioni su piattabande finite o indefinite (Ritter, Pasternak, Danusso), alle piastre elastiche (Lewe, Schleicher), alla teoria istituita per la realizzazione effettiva dei bacini di carenaggio (Franzius, Krall), si può dire che la (1) abbia fatto a dovizia l'esperienza nel campo dei fatti.

Riprendere la questione potrebbe quindi sembrare ozioso. Ma va rilevato che sono principalmente le difficoltà della determinazione dei dati sperimentali, estremamente variabili da suolo a suolo, che hanno condotto, o conducono, a superare le critiche su quella ipotesi; sicchè sovente si assiste a prove di elasticità dei terreni fatte, con poca convinzione, su una zona limitatissima (dell'ordine dei decimetri quadrati) per decidere sulla costante elastica da adottare nel calcolo di una platea di fondazione di area enormemente più grande; queste prove sono confortate unicamente dalla circostanza fortunata che gli sforzi dipendono dalla radice quarta di quella C , chè notoriamente la teoria matematica dell'elasticità insegna che l'abbassamento di un'area uniformemente caricata non è costante per tutti i punti dell'area, come darebbe la (1), e che il massimo dipende non solo dalla pressione, ma anche dall'area di ca-

(1) Nella seduta del 3 maggio 1936.

rico. Comunque quei risultati della teoria classica non sembrano accettabili, in quanto che, se si volesse esprimerli con una schematizzazione del tipo (1), porterebbero a ritenere che la costante C del suolo decresce con la radice quadrata dell'area; in altre parole secondo la teoria classica, se un'area, di 1 mq. si abbassa sotto la pressione p di $\frac{p}{C}$, l'area F sotto la stessa

pressione si abbassa di $\sqrt{F} \frac{p}{C}$. In verità troppo, e questo hanno chiara-

mente dimostrato recenti esperienze, promosse dalla Silm (Società Italiana Lavori Marittimi) di Roma come preliminari al calcolo di un grande bacino di carenaggio attualmente in costruzione, eseguite, su aree intorno ai 250×47 mq. sul grande Bacino di Venezia, da G. Krall ⁽¹⁾, il carico essendo agevolmente ottenuto vuotando e riempiendo completamente il bacino. È perciò che ci si propone nella presente Nota di portare un qualche contributo alla questione, cercando di istituire la ricerca sperimentale del nucleo o funzione di influenza da sostituire a quella tipica 1: \sqrt{r} (r essendo la distanza tra il punto caricato e quello osservato) offerta dalla teoria matematica. Per questo nucleo ammetteremo si possa sempre assumere una legge del tipo $c(x - \xi)$, che il Volterra ⁽²⁾ ha caratterizzato come appartenente al cosiddetto «ciclo chiuso» e introdotto in meccanica ereditaria. Quegli stessi procedimenti si riportano agevolmente nella questione che si passa a trattare.

2. Si consideri la solita striscia di suolo larga 1, fissandovi un'origine O della coordinata x ; sia ξ una qualunque sua determinazione. Ciò posto, si carichi la striscia con un carico qualunque $p = p(\xi)$ a partire da O fino al punto x ; in x si misuri l'abbassamento $w(x)$, facendo poi variare x via via. Si avrà allora per la sovrapposizione degli effetti

$$w(x) = \int_0^x c(x - \xi) p(\xi) d\xi.$$

Posto $x - \xi = z$ e ristabilito ξ al posto di z , si ha

$$(2) \quad w(x) = \int_0^x c(\xi) p(x - \xi) d\xi;$$

è questa una equazione integrale di 1^a specie, dalla quale, essendo noto p e misurato w , dobbiamo ricavare $c(\xi)$. Per la speciale forma attribuita a

(1) G. KRALL, *Problemi statici delle costruzioni marittime (I bacini di carenaggio)*. «Memorie della Reale Accademia d'Italia», vol. V, estratto n. 2, anno 1933.

(2) V. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*. Paris, Gauthiers-Villars, 1913.

$c(x - \xi)$ è fortunatamente possibile ricondursi a una equazione di 2ª specie del Volterra. Deriviamo infatti rispetto ad x ; si ha

$$w'(x) = \int_0^x c(\xi) p'(x - \xi) d\xi + c(x) p(0).$$

Ammessso $p(0) \neq 0$, si può porre

$$\frac{w'(x)}{p(0)} = f(x), \quad \frac{p'(x - \xi)}{p(0)} = K(x - \xi).$$

Si perviene così all'equazione a cui si mirava

$$(3) \quad f(x) = c(x) + \int_0^x K(x - \xi) c(\xi) d\xi$$

nella funzione incognita $c(x)$; essa si risolve coi noti metodi classici; notevole è quello delle approssimazioni successive, perseguibile per via numerica con relativa speditezza.

Osserviamo che, $p(x)$ essendo arbitrario, parrebbe sia conveniente assumere $p = \text{costante}$, con che la (2) darebbe senz'altro

$$(4) \quad c(x) = f(x) = \frac{w'(x)}{p};$$

anzi questa avrebbe il vantaggio che le osservazioni $w(x)$ si potrebbero eseguire tutte nello stesso punto $x=0$, chè evidentemente $w(0) = w(x)$; ora, se in linea teorica la (4) è ineccepibile, nella realtà la operazione di derivazione praticata sopra una serie discreta di valori sperimentali esalta gli errori di osservazione; perciò è meglio assumere una p generica, onde attenuare, con provvida operazione di integrazione, come richiede il metodo delle successive approssimazioni con cui si affronta la equazione integrale (3), le manchevolezze dell'osservazione rilevate dalla derivazione.

Se si assume p lineare, allora $K(x - \xi) = \lambda$ costante e la (3) diviene

$$f(x) = c(x) + \lambda \int_0^x c(\xi) d\xi,$$

cioè con nucleo -1 . Questa si risolve esattamente; i nuclei iterati sono difatti $K_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{(x - \xi)^n}{n!}$ e il nucleo risolvete è $H = e^{-\lambda(x - \xi)}$; è pertanto

$$c(x) = f(x) - \lambda \int_0^x e^{-\lambda(x - \xi)} f(\xi) d\xi.$$

Volendo invece ricorrere alle approssimazioni successive, si ha

$$c(x) = f(x) - \lambda \int_0^x f(\xi) d\xi + \lambda^2 \int_0^x d\eta \int_0^\eta f(\xi) d\xi - \dots,$$

dove nel 2° membro figurano le funzioni primitive di f dei vari ordini; esse sono ricavabili senza errore sensibile nei modi noti, algebrici o geometrici.

3. Una forma che può convenire di dare al nostro nucleo $c(x - \xi)$ è quella esponenziale, la quale si può ritenere abbastanza rispondente alla realtà e nello stesso tempo si presta bene ai calcoli, ponendo cioè

$$(5) \quad c(x - \xi) = \frac{1}{C} e^{-\alpha(x - \xi)}.$$

Col metodo precedente si ricavano allora le costanti C e α . Però questo caso si può trattare meglio a sè al modo seguente:

Si carichi con carico uniforme p un tratto l della solita striscia di suolo di larghezza unitaria. L'abbassamento $w(x)$ nel punto generico del tratto sarà

$$w(x) = \frac{p}{C} \int_0^x e^{-\alpha(x - \xi)} d\xi + \frac{p}{C} \int_x^l e^{-\alpha(\xi - x)} d\xi = \frac{p}{C\alpha} [2 - e^{-\alpha x} - e^{-\alpha(l - x)}].$$

Basta misurare w in due punti per ricavare C e α ; scelto uno degli estremi del tratto caricato e il punto di mezzo e posto

$$w_0 = w(0) = w(l), \quad w_1 = w\left(\frac{l}{2}\right),$$

si ricava

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{2}{l} \log \left\{ \frac{2w_0}{w_1} - 1 \right\} \\ C = \frac{4p}{\alpha} \frac{w_1 - w_0}{w_1^2} \end{cases}$$

cioè già sotto forma esplicita.

Meccanica. — *Su un teorema di statica del sig. van den Dungen.*

Nota di G. LAMPARIELLO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Osservazioni meridiane di Giove e Vesta nel 1935.*

Nota di L. GIALANELLA, presentata dal Socio G. ARMELLINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisica (Ottica). — *La ricerca del potere risolutivo dei materiali sensibili fotografici con un nuovo tipo di interferometro*⁽¹⁾.

Nota di R. BRUSCAGLIONI, presentata⁽²⁾ dal Socio U. BORDONI.

La ricerca del potere risolutivo dei materiali sensibili fotografici era eseguita fino ad ora con metodo fotografico, proiettando, sulla superficie emulsionata, l'immagine di una mira a tratti di larghezza variabile in moto noto. Osservando con forte ingrandimento il fotogramma ottenuto si determinava fino a quale finezza di tratti lo strato di emulsione era stato capace di registrare distinte le immagini dei singoli tratti, deducendone il potere risolutivo.

Le difficoltà che il metodo, apparentemente così semplice, presenta, sono molte. È evidente intanto la necessità di usare obbiettivi da proiezione molto ben corretti e ben montati, per ottenere immagini ben definite, anche nei tratti più fini della immagine. Per ottenere questo non si può pensare a ricorrere ad obbiettivi di piccola apertura, poichè occorre evitare che i tratti dell'immagine risultino poco nitidi per effetto della diffrazione; evidentemente occorrerà che la larghezza minima del tratto chiaro dell'immagine sia inferiore al diametro d del dischetto chiaro di diffrazione dato in funzione dell'apertura α dell'obiettivo dalla formula:

$$(1) \quad d = \frac{2,44}{\sin \alpha} \lambda$$

da cui si deduce α in funzione della minima larghezza l_m dei tratti da risolvere:

$$\sin \alpha \cong \frac{5}{l_m} \lambda.$$

Il limite teorico della finezza massima dei tratti proiettabili con questo sistema è quindi dato da: $l_m = 5\lambda$ e da tale limite in pratica occorrerà tenersi lontani, anche perchè con obbiettivi a forte apertura si riduce troppo la profondità di fuoco. Ridotte profondità di fuoco rendono delicata la messa a punto della superficie di fronte all'obiettivo usato per la proiezione.

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Nazionale di Ottica di Firenze-Arcetri.

(2) Nella seduta del 5 aprile 1936.

Anche contentandosi di $l_m = 10\lambda$, occorrerà un'apertura sen α eguale circa ad $1/2$ con profondità di fuoco ridottissima ed evidentemente inferiore a 20λ ossia meno di circa un centesimo di millimetro.

La messa a punto della superficie emulsionata di fronte all'obbiettivo da proiezione, è sempre perciò molto delicata.

E si noti che la lunghezza minima dei tratti di 10λ non è certamente sempre sufficiente; basta pensare che esistono emulsioni fotografiche che raggiungono e sfruttano, sia pure in maniera particolare, poteri risolutivi che superano la $\frac{\lambda}{2}$ come avviene nelle lastre tipo *Lipmann* per fotografia a colori.

Usando poi obbiettivi a forte apertura viene fatto di domandarsi se la mancata registrazione dei tratti della mira non sia dovuta a fenomeni di diffusione nel seno della gelatina, esaltati dalla forte apertura dell'onda incidente.

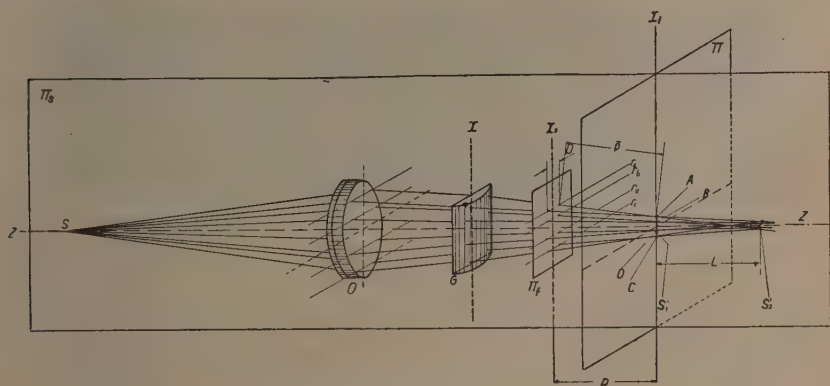


Fig. 1.

In altre parole se, con un apparato avente un obbiettivo da proiezione di apertura $1/2$ e che proietti dei tratti con larghezza minima di $\frac{0,5}{100}$ mm. si determina un potere risolutivo di $3/100$ mm. è da domandarsi quale sarebbe il potere risolutivo determinato con un obbiettivo che permettesse di proiettare solo tratti non inferiori a $2/100$ di mm. e che fosse quindi di apertura minore, con fenomeni di diffusione, alone ecc. più ridotti per la più ridotta apertura dell'onda.

Si aggiunga infine che a prova avvenuta sussiste sempre il dubbio se la mancata registrazione dei tratti più fini dell'immagine è dovuta a mancanza di potere risolutivo della superficie emulsionata o a non sufficientemente precisa messa a punto del piano della lastra di fronte all'obbiettivo da proiezione.

Il metodo che esporremo in seguito per la ricerca del potere risolutivo delle superficie emulsionate elimina quasi tutti gli inconvenienti del metodo ora esaminato.

L'interferometro da noi progettato per questo scopo, è un derivato dell'interferometro di Young; il suo schema è riprodotto in fig. 1.

Il piano π_s è il piano di simmetria di tutto il sistema; in O si ha un adatto sistema convergente otticamente corretto per la posizione S della sorgente, in G è posta una lente cilindrica che insieme al sistema ottico in O dà due pseudo-immagini di S in S'_1 ed in S'_2 focali astigmatiche del fascio luminoso emergente. Occorre naturalmente che il sistema sia correttamente progettato in modo che tutte le focali dei singoli pennelli elementari coincidano e sia eliminata ogni presenza di coma, cosa abbastanza facile a farsi. L'asse della lente cilindrica x_1 è contenuto nel piano di simmetria del sistema e di conseguenza sul piano π giace anche la focale S'_1 .

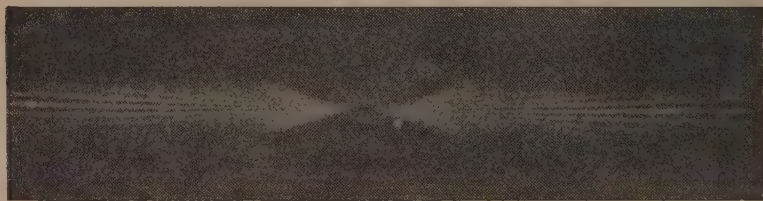


Fig. 2.

Al posto dell'unica coppia di fori dell'interferometro di Jounq poniamo per ora sul piano π_p una serie di coppie di fori simmetricamente disposte rispetto al piano π_s di simmetria del sistema, su una serie di rette r_a, r_b, r_c, r_d , parallele fra loro. È facile dimostrare che: 1° ciascuna coppia di fori dà sul piano π , nei punti A, B, C, D, se la sorgente S è puntiforme, un sistema di frange di interferenza, visibili in luce bianca; 2° che tutti i sistemi di frange risultano distinti; 3° che la frequenza delle frange è con molta approssimazione proporzionale alla distanza fra i fori di ciascuna coppia corrispondente; 4° che le distanze dall'asse z dei punti A, B, C, D ecc., dove si formano i fenomeni interferenziali, sono proporzionali alle distanze delle rette r_a, r_b, r_c ecc. dall'asse z .

Ne consegue che, se alle varie coppie di fori si sostituisce una coppia di fenditure simmetriche rispetto all'asse x_1 e di forma opportuna, sarà possibile ottenere un sistema di frange rettilinee, convergenti opportunamente. È facile dimostrare che si ottiene lo scopo, con approssimazione largamente sufficiente, se le fenditure hanno l'asse curvato ad iperbole equilatera.

La larghezza minima delle frange dipende evidentemente dalla larghezza massima D_{\max} fra i punti più lontani utilizzati delle due fenditure. L'apertura γ di onda occorrente per ciascuna coppia di fori è data da:

$$\gamma = D/p$$

essendo p la distanza del piano dei fori (vedi fig. 1) dal piano π , e la frequenza delle frange ottenute sarà:

$$A = \gamma\lambda.$$

Desiderando quindi ottenere frange aventi larghezza minima di 5 micron basta che il sistema ottico composto dell'obbiettivo O e della lente G fornisca un'onda dell'apertura di $1/10$ e facilmente si potrà scendere con onde di più forte apertura a larghezze di frange anche inferiori.

Nella fig. 2 è riprodotto, molto ingrandito, un interferogramma ottenuto con questo tipo di interferometro. Il sistema di frange risulta doppio poichè doppio era il sistema di fenditure usato, formato cioè da quattro rami di iperbole, simmetrici rispetto agli assintoti, anzichè di due soli rami. Tale raddoppiamento, permettendo una più facile determinazione del punto di convergenza delle frange, rende evidentemente più agevole l'uso dell'interferometro per la ricerca del potere risolutivo delle superficie emulsionate.

È evidente che con questo metodo si ottengono i seguenti vantaggi:

1) La delicatezza nella messa a punto è assai modesta non essendo le frange localizzate in un sol piano.

2) Gli errori di messa a punto, se sufficientemente grandi da fare scomparire le frange (il che avviene solo se il piano dell'emulsione è posto in un piano dove i fasci luminosi provenienti dalle due fenditure sono separati) sono inequivocabilmente denunziati dalla registrazione separata sull'emulsione fotografica delle sezioni dei due fasci.

3) L'apertura dell'onda incidente è ridottissima, e ridotta al minimo in ciascun punto è l'inclinazione dei fasci che producono i fenomeni interferenziali con riduzione al minimo degli eventuali fenomeni di diffusione e di alone.

Fisica (Matematica). — *Sulla viscosità dei liquidi*. Nota II di P. GUARESCHI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nella mia Nota ⁽²⁾ sulla viscosità dei gas ho scritto la condizione di costanza del momento delle quantità di moto delle molecole e cioè $m\bar{v}l = \frac{H}{n\pi}$ e quindi ho scritto per la viscosità l'espressione generale

$$(1) \quad \eta = \frac{Hc}{n\pi\alpha}$$

dove i simboli hanno i significati illustrati nella Nota suddetta.

Da quanto verrò esponendo si vedrà come gli stessi concetti si possano applicare alla viscosità dei liquidi e si calcolerà così con la (1) la loro viscosità.

Ammettiamo che sia ancora valida per i liquidi la formula generale (1) per una determinata temperatura, e confrontiamo i valori calcolati con quelli sperimentali; vedremo che per dati valori di n e del coefficiente di associazione i valori calcolati sono molto prossimi a quelli sperimentali.

Ciò premesso, consideriamo la (1); e poichè $c = \frac{N}{V}$ dove c rappresenta il numero di molecole per unità di volume, N è il numero di Avogadro e V è il volume molecolare del liquido, si avrà

$$(2) \quad \eta = \frac{H}{n\pi\alpha} \frac{N}{V}$$

Possiamo verificare allora, conoscendo i valori di tali grandezze per ogni liquido o metallo fuso, il valore della viscosità in rapporto ai valori sperimentali e, ponendo in un primo tempo $\alpha = 1$ per tutti i liquidi, calcolare il valore di α che, come si vede, non si discosta di molto dai valori dati da diversi autori.

(1) Nella seduta del 3 maggio 1936.

(2) P. GUARESCHI, *Sulla viscosità dei gas*. « Rendiconti R. Accademia dei Lincei », vol. XXIII, fasc. 8, p. 603.

TABELLA I.

LIQUIDO	Tempe- ratura $t^{\circ}\text{C}$	Volume molecolare $V\left(\frac{\text{cm}^3}{\text{gr. mol.}}\right)$	η_s (sperimentale)	η_c (calcolato) per $\frac{1}{n\alpha} = 1$ $\eta = \frac{2.32}{V}$	η_c (calcolato) per $\eta = \frac{2.32}{Vn}$	n	α_s (sperimentale)	α_c (calcolato) $\frac{\eta_c}{\eta_s} = \alpha_c$

Liquidi non associati o quasi

Tetracloruro di carbonio	20° C	96.5	969·10 ⁻⁵	2400·10 ⁻⁵	800·10 ⁻⁵	3	0.94 (R. S.)	0.83
Benzene	0° C	89	900	2600	870	3	1.01 (R. S.)	0.96
Etere etilico	0°	103	284	2250	292	6	0.99 (R. S.) 1.08 (R. S.)	1.03
Solfuro di carbonio	20°	61.7	367	3780	378	6	1.07 (M. L.)	1.03
Cloroformio	0°	80.5	699	2880	960	3	1.35 (M. L.)	1.38

Liquidi associati

Acqua	0°	18	1793·10 ⁻⁵	1290·10 ⁻⁴	4300·10 ⁻⁵	3	2.91 (R. S.) 1.91 (T.) 2.2-2.3 (E.) 1.56 (M. L.) 1.26 (R. S.)	2.4
Acetone	0°	73	394·10 ⁻⁵	3180·10 ⁻⁵	530·10 ⁻⁵	5	1.23 (B.) 1.53 (T.) 1.79 (B.)	1.35
Alcool metilico	0°	40.5	808	5700	1910	3	2.99 (M. L.) 1.74 (B.)	2.36
Alcool etilico	0°	57.5	1790	4000	4000	1	2.74 (M. L.) 3.05 (M. L.)	2.24
Alcool propilico	0°	73.3	2255	3160	9550	1/3	5.05 (Ba.)	4.23
Alcool isopropilico	0°	73.3	2369	2520	9550	1/3	3.89 (M. L.) 1.94 (R. S.)	3.84
Alcool butilico	0°	92	2947	2520	7550	1/3	3.53 (M. L.)	2.56
Alcool isobutilico	0°	92	3906	2520	7550	1/3	1.95 (R. S.)	1.93

Nella tabella I abbiamo calcolato i valori della viscosità di alcuni liquidi con a fianco i valori sperimentali e i relativi coefficienti di associazione molecolare, determinati da diversi sperimentatori e con sistemi di determinazione diversi. Come si vede anche per uno stesso liquido, i valori trovati da diversi autori presentano scarti sensibili spiegabili con la difficoltà delle esperienze. Debbo notare però che se è lecito fare la media di valori trovati sperimentalmente con sistemi differenti di determinazione, si ottiene allora un valore medio che è, si può dire, coincidente con quello da me calcolato. Infatti si può osservare dalla tabella II i valori medi sperimentali e quelli da me calcolati.

TABELLA II.

LIQUIDO	Temperatura ° C	α (sperimentale)	α (medio)	α (calcolato)
Acqua	0°	2.91 (R. S.) 1.91 (T.)—2.2 e 2.3 (E.)	2.37	2.40
Etere etilico . . .	0°	0.99 (R. S.) 1.08 (R. S.)	1.03	1.03
Acetone	0°	1.56 (M. L.) 1.26 (R. S.) 1.23 (B.) 1.53 (T.)	1.39	1.35
Alcool metilico . .	0°	1.79 (B.)—2.99 (M. L.)	2.39	2.36
Alcool etilico . . .	0°	1.74 (B.)—2.74 (M. L.)	2.24	2.24
Alcool propilico . .	0°	3.05 (M. L.)—5.05 (Ba.)	4.05	4.23
Alcool butilico . .	0°	1.94 (R. S.)—3.53 (M. L.)	2.23	2.56
Tetracloruro di carbonio	20°	0.94 (R. S.)	—	0.83
Cloroformio	0°	1.35 (M. L.)	—	1.38
Benzene	0°	1.01 (R. S.)	—	0.96
Solfuro di carbonio	20°	1.07 (R. S.)	—	1.03
Alcool isopropilico .	0°	3.89 (M. L.)	—	3.84
Alcool isobutilico .	0°	1.95 (R. S.)	—	1.93

In maggioranza i valori di α sono stati determinati da Ramsay e Shields (R. S.), ma altri valori furono determinati con metodi diversi da MacLeod, Bingham, Traube, Walden, Trouton, Edser e Batschinski, indicati con le iniziali dei nomi.

Dalla tabella sovrascritta si può osservare quanto segue:

Dalla formula $\eta = \frac{H}{\pi} \frac{N}{V} \frac{1}{\alpha n} = K \frac{N}{V} \frac{1}{\alpha n}$, dove $K = \frac{H}{\pi}$, si vede che per i liquidi non associati cioè per quelli in cui α è approssimativamente uguale all'unità, con l'aumento del volume molecolare diminuisce il valore

di n . Mentre per i liquidi associati in cui $\alpha > 1$ con l'aumento di α e di V il valore di n diminuisce fino al valore $1/3$ corrispondente a quello dei gas alla temperatura normale.

D'altra parte la variazione di n che per molti liquidi è un numero intero, spiega la variazione della viscosità con la temperatura nel senso che n varia in più o in meno a secondo di un aumento o diminuzione della temperatura.

Giova riportare anche alcuni valori calcolati, sia di η che di α , per i metalli allo stato fuso secondo la tabella III.

TABELLA III.

METALLO	Temperatura assoluta T	Volume molecolare V ($\frac{\text{cm}^3}{\text{gr. mol.}}$)	η_s (sperimentale) 10^5	η_c (calcolato) per $\frac{1}{\alpha n} = 1$ $\eta = \frac{2.32}{V}$	n	α_s (sperimentale) secondo i valori di Ramsay e Shields	α_c (calcolato) $\frac{\eta_c}{\eta_s} = \alpha_c$
Bismuto	577	21.2	1660 · 10 ⁻⁵	10900 · 10 ⁻⁵	1	7	6.6
Cadmio	594	13	1440	17800	1	10	12
Rame	1337	7.12	3410	32500	1	non ben determinato ma oltre 5.30	9.2
Piombo	650	18.3	2116	12600	1	non ben determinato ma oltre 4.52	6
Antimonio . . .	893	18	1304	12900	1	10	9.9
Mercurio	273	14.1	1680	16500	6	1.7	1.64

Da questa tabella III è possibile osservare come soltanto per il mercurio in cui il coefficiente di associazione è prossimo all'unità si abbia un valore di n molto maggiore degli altri metalli. Questi allo stato fuso vengono ad avere un valore di n anche più basso della media degli altri liquidi.

CONCLUSIONE. — Dai valori della viscosità dei liquidi, calcolati con la (2), in confronto con i valori sperimentali, sia della viscosità che dei coefficienti di associazione, si può concludere che conoscendo ad una data temperatura il valore del coefficiente α di associazione molecolare è possibile calcolare appunto con la (2) il valore della viscosità dei liquidi quando

si dia un valore appropriato al numero n di giri che la molecola deve compiere intorno ad un centro di figura durante il suo spostamento corrispondente al suo percorso libero che nel caso di un liquido è molto minore al libero percorso delle molecole gassose. Si può concludere che nei liquidi il trasporto della quantità di moto è fatto prevalentemente per rotazione delle molecole che non per traslazione. La formula (2) che nella mia

Nota (1) è espressa da $\eta = \frac{K}{n\alpha} \frac{N}{V}$ è dunque ancora valida per i liquidi cioè η è ancora una funzione della concentrazione molecolare o numero di molecole per unità di volume e del coefficiente di associazione α .

Abbiamo già detto che H rappresenta una costante o momento della quantità di moto molecolare che sarà ancora costante anche per i liquidi e poichè abbiamo posto

$$(1) \quad H = \frac{m_H}{m_e} h \quad \text{dove} \quad \frac{m_H}{m_e} = 1840$$

(rapporto fra la massa dell'atomo di idrogeno a quella dell'elettrone) si potrà scrivere $K = \frac{H}{\pi} = \frac{m_H}{\pi m_e} h$ (dove h è la costante di Planck = $6.55 \cdot 10^{-27}$) e allora si avrà l'espressione generale (sia per i gas che per i liquidi) della viscosità e cioè

$$\eta = \frac{m_H}{m_e} \frac{h}{\pi n \alpha} \frac{N}{V} = \frac{1840}{\pi} \frac{h}{n \alpha} \frac{N}{V}.$$

Per tutti i gas essendo $n = \frac{I}{3}$ e $V = \text{costante}$ sarà sufficiente, per calcolare η ad una determinata temperatura conoscere il valore di α corrispondente a tale temperatura.

(1) P. GUARESCHI, *Sulla viscosità dei gas*. Loc. cit.

NOTA I. — I valori della viscosità sono stati calcolati nella tabella I con la (2) cioè $\eta = \frac{H}{\pi} \frac{1}{n \alpha} \frac{N}{V}$ dove sostituendo il valore di H dato nella mia Nota succitata si ha

$$\frac{H}{\pi} N = KN = 2.32 \quad \text{e allora} \quad \eta = \frac{2.32}{n \alpha V}.$$

Le lettere a fianco dei valori sperimentali di α , indicano i nomi degli sperimentatori e cioè R. S. = Ramsay e Shields, T. = Traube, E. = Edser, M. L. = MacLeod, B. = Bingham e Ba. = Batschinski.

NOTA II. — Da notare nella tabella I come la differenza fra i valori della viscosità fra due liquidi isomeri dipenda unicamente dal valore del coefficiente α di associazione molecolare.

Per i liquidi è necessario conoscere oltre al valore di α anche quello di n è di V .

I valori di n sono stati, per alcuni liquidi, calcolati nelle tabelle I e III della presente Nota.

Fisica. — *Sulla diffusione dei neutroni lenti.* Nota di G. C. WICK, presentata dal Socio O. M. CORBINO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geologia. — *Giacimento sottomarino a «Cyprina islandica, L.» nel golfo di Terranova Pausania (Sardegna)*⁽¹⁾. Nota di A. C. BLANC, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. G. STEFANINI.

Nella primavera del 1934 il sig. F. Settepassi, di Viareggio, collezionista di molluschi, mi affidava l'esame di alcune conchiglie marine provenienti dalla Sardegna, e che egli aveva riconosciute estranee alla fauna mediterranea vivente.

Le conchiglie erano state estratte da una draga che, durante il dicembre 1933, era adibita alla escavazione di una secca esistente a circa 2 m. di profondità nel golfo di Terranova Pausania, a circa 300 m. a sud del punto di attracco del postale. La draga lavorava per fare un fondo di circa 4 m. ed estraeva un limo argilloso bluastro contenente numerose grandi conchiglie. Il capo-pesca Raffaele Franceschi, di Viareggio, che aveva fatto scalo con la sua motobarca a Terranova Pausania, e che era fornitore abituale di conchiglie del Settepassi, ne raccolse alcune, e glielne consegnò al suo ritorno a Viareggio⁽³⁾.

Purtroppo soltanto i più grandi esemplari hanno destato l'interesse del raccoglitore: le poche conchiglie di piccole dimensioni che ho potuto determinare, si trovavano, incrostate da residui di limo, nell'interno di quelli.

La fauna da me esaminata comprende le forme seguenti:

<i>Anomia ephippium</i> , L.	una valva
<i>Clamys septemradiata</i> , Müller	una valva
<i>Modiola modiolus</i> , L.	sette valve
<i>Cyprina islandica</i> , L.	tredecim valve
<i>Dosinia cupinus</i> , L.	una valva

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia della R. Università di Pisa.

(2) Nella seduta del 3 maggio 1936.

(3) I particolari del trovamento mi sono stati riferiti personalmente dal sig. Raffaele Franceschi.

<i>Venus casina</i> , L. (var. <i>siciliana</i> Ar. e Ben.?)	una valva
» <i>ovata</i> , Pennt. var. <i>paucicostata</i> B. D. D.	due valve
<i>Isocardia cor</i> , L.	un esemplare completo
<i>Turritella communis</i> , Risso	cinque esemplari

Com'è noto *Cyprina islandica* e *Modiola modiolus* sono fra i più tipici rappresentanti della fauna di carattere atlantico-boreale, che ha assunto un grande sviluppo nel Mediterraneo alla fine del Pliocene ed all'inizio del Quaternario, e che caratterizza i giacimenti attribuiti ai piani Calabrian (Gignoux) e Siciliano (Döderlein)⁽¹⁾.

Il significato di *Cyprina islandica* quale fossile caratteristico è ben noto. *Modiola modiolus*, altrettanto tipica, è tutt'altro che comune: in Italia la sua presenza è stata segnalata la prima volta da Philippi, sotto il nome di *Modiola grandis*, Phil.⁽²⁾ Seguenza⁽³⁾ e De Stefano⁽⁴⁾ l'hanno rinvenuta a Carubare, presso Reggio, e Seguenza⁽⁵⁾ presso Messina. Bellini⁽⁶⁾ la cita nelle formazioni recenti del golfo di Napoli e Cerulli Irelli⁽⁷⁾ ne ha determinato soltanto un frammento nel giacimento di Monte Mario a Roma. Tutte queste località sono da attribuirsi, secondo Gignoux, al piano Calabrian, salvo forse quello di Ischia, che lo stesso autore ritiene possa essere Siciliano.

La distribuzione attuale della specie, estinta nel Mediterraneo, è strettamente limitata all'Atlantico boreale, non essendo mai stata segnalata, a quanto pare, a sud dell'Inghilterra.

La presenza, nel Mediterraneo, di giacimenti fossiliferi a *Cyprina islandica*, sommersi, non è un fatto nuovo: è noto il giacimento a *Cyprina islandica* nel sottosuolo di Livorno, e che affiora, in condizioni analoghe a quello di Terranova Pausania, a pochi metri sott'acqua, nel porto. Basandosi sulla fauna, e soprattutto sulle osservazioni stratigrafiche del De Stefani⁽⁸⁾, che ha

(1) La loro presenza nel Mediterraneo pliocenico inferiore è dubbia, e sarebbe in tutti i modi rarissima (vedi M. GIGNOUX, *Les formations marines pliocènes et quat. de l'Italie du Sud et de la Sicile*. Lyon, 1913, p. 391 e 424).

(2) R. A. PHILIPPI, *Enumeratio molluscorum Siciliae*. Berlino, 1836-1844.

(3) G. SEGUENZA, *Le formazioni terziarie della provincia di Reggio Calabria*. «Atti R. Accad. Naz. dei Lincei», ser. 3^a, VI. Roma, 1880.

(4) G. DE STEFANO, *Gli strati a Pinna di Morrocu (Reggio)*. «Boll. Soc. Geol. It.». XVIII, 1899.

(5) G. SEGUENZA, *Studi stratigrafici sulla formazione pliocenica dell'Italia Meridionale*, «Boll. R. Comit. Geol. d'Italia», IV-VIII, 1873-77.

(6) R. BELLINI, *La faune des mollusques fossiles neogènes du périmètre du golfe de Naples*. «Ann. Soc. Royale Zool. et Malac. de Belgique», XXXVIII, 1903.

(7) S. CERULLI-IRELLI, *Fauna malacologica mariana*. «Paleontographia Italica», XXII, 1907.

(8) C. DE STEFANI, *I terreni e le acque clorodiche della Salute in Livorno*. «Atti Soc. Tosc. Ic. Nat.», Mem. XXIII, 1907, p. 8, e *Sunto geologico dei Monti Livornesi*. «Ibid», XXVII, 1911, p. 13.

notato la sua posizione discordante sui sedimenti pliocenici o più antichi, il Gignoux lo ha riconnesso, con qualche riserva, al piano Siciliano ⁽¹⁾.

Pruvot et Robert hanno segnalato l'esistenza di un deposito fossilifero sottomarino, alla profondità di 200 m. al largo del Capo de Creus, presso la frontiera franco-spagnola. Questo si stende fra il piede della massa rocciosa del Capo e i depositi di fango profondo che in quel punto risalgono fino all'isobata — 200 m. Sul fondo, cosparso di ciottolini di quarzo, furono dragate numerose conchiglie subfossili, tra le quali *Clamys islandica*, Müll., *Modiola modiolus*, L., *Cyprina islandica*, L., *Isocardia cor*, L. ecc. ⁽²⁾. Trattasi dunque anche in questo caso, di una fauna della zona sub-litorale, a carattere atlantico-boreale, che Gignoux ritiene molto analoga a quella del giacimento siciliano tipico di Ficarazzi.

Rammerterò inoltre il ritrovamento della *Neptunea sinistrorsa*, Desh. dragata alquanto più ad est dallo stesso Pruvot, la *Magellania cranium*, Müll. pescata allo stato fossile al largo di Marsiglià da Marion ⁽³⁾, ed il giacimento a *Terebratula septata*, Phil. segnalato a oltre 500 m. di profondità, ai piedi della falesia di Peyssonel, all'estremità orientale del golfo del Leone ⁽⁴⁾. Trattasi sempre di specie ritenute estinte nel Mediterraneo e che abbondano nelle faune calabriane e siciliane.

I frequenti rinvenimenti di questa fauna sul fondo marino attorno al quale si affacciano costiere ove non persiste alcuna traccia di sedimenti pliocenici o quaternari antichi mi sembra assai notevole. Per Haug ed i suoi discepoli il fatto si spiega con dei movimenti epirogenici post-siciliani, e con degli sprofondamenti tectonici che hanno fatto scendere i sedimenti considerati a quote inferiori a quelle a cui essi si erano originariamente depositi: bisognerebbe, a mio avviso, lasciare una giusta parte anche all'opera di demolizione dei sedimenti litorali per parte delle acque correnti, ed in genere delle altre azioni dinamiche che devono essersi svolte in modo particolarmente intenso e relativamente rapido durante le successive regressioni e trasgressioni quaternarie ⁽⁵⁾. L'assenza di sedimenti di una determinata età su di un litorale è ad ogni modo un elemento quanto mai poco sicuro per poter affermare che quel litorale non era parzialmente sommerso durante quell'età: una pratica dimostrazione ne è costituita dalla recente segnalazione da me effettuata assieme a G. Tavani, sui Monti d'Oltre Serchio ⁽⁶⁾.

La raccolta di ben tredici valve di *Cyprina islandica* e di sette valve di *Modiola modiolus* (bellissimi esemplari di grandi dimensioni: diametro

(1) M. GIGNOUX, op. cit., p. 340.

(2) Vedi E. HAUG, *Traité de Géologie*, III, 1920, p. 1865.

(3) Vedi M. GIGNOUX, op. cit., p. 340.

(4) Vedi E. HAUG, loc. cit.

(5) Vedi A. C. BLANC, *Lo studio stratigrafico di pianure costiere*. « Boll. Soc. Geol. It. », LIV, 1935.

(6) A. C. BLANC e G. TAVANI, *Una fauna marina nelle breccie ossifere dei Monti d'Oltre Serchio*. « Proc. Verb. Soc. Tosc. Sc. Nat. », 14 marzo 1935.

ventrodorsale mm. 65, diametro antero posteriore mm. 144), in uno stato di conservazione così perfetto da escludere un avvenuto rimaneggiamento del deposito, indica l'esistenza nel golfo di Terranova Pausania, di un ricco giacimento fossilifero, di età calabriana o siciliana. La faunetta da me determinata non contiene elementi sufficienti per poterla assegnare piuttosto ad uno che all'altro di questi due piani. È ben noto quanto sia delicata la distinzione tra le loro due faune e, nel nostro caso, su un numero così esiguo di specie, l'assenza di forme plioceniche, che sono poi già relativamente scarse nel Calabriano superiore, non costituisce, a parer mio, un argomento sufficiente per la sua attribuzione al Siciliano. Essa costituisce ad ogni modo la prima testimonianza di lembi fossiliferi di età sicuramente calabriana o siciliana sulle coste della Sardegna.

Il carattere batimetrico di questa fauna consentirebbe di ritenere, senza bisogno di invocare movimenti tectonici, che essa si è depositata in quel mare pliocenico superiore o quaternario inferiore, la cui linea di riva ha scolpito i suoi segni sia nella morfologia della prossima costiera corsa, sia alla Capraia, ove di recente Rovereto ed Airoidi ne hanno felicemente tentata la datazione ⁽¹⁾.

Uno studio più completo della fauna del giacimento qui segnalato, corredata da osservazioni stratigrafiche, potrà chiarirne più esattamente l'età e forse contribuire a risolvere la controversa questione dell'esistenza, sulla costiera orientale dell'isola, di altri lembi o pliocenici o pleistocenici antichi, negata dal Lovisato ⁽²⁾, dal De Stefani ⁽³⁾ ecc., già sospettata dal de la Marmora ⁽⁴⁾, e sostenuta, di poi, soprattutto dal Fossa Mancini ⁽⁵⁾.

Mineralogia. — *Carbon fossile nel mesozoico di Longobucco in Calabria.*
Nota di F. PENTA, presentata dal Socio F. MILLOSEVICH.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) G. ROVERETO e M. AIROLDI, *Note geomorfologiche e petrografiche sull'Isola di Capraia*. « Atti R. Accad. Naz. dei Lincei », ser. 6^a, V, fasc. IX, 1934.

(2) D. LOVISATO, *Cenni geologici sulla Sardegna*. Cagliari, 1888 e *Brani sparsi di geologia sarda*. « Rend. R. Accad. Naz. dei Lincei », VII, 1891.

(3) C. DE STEFANI, *Cenni preliminari sui terreni cenozoici della Sardegna*. « Atti R. Accad. Naz. dei Lincei », VII, 1891.

(4) A. DE LA MARMORA, *Voyage en Sardaigne*. Torino, 1857.

(5) E. FOSSA MANCINI, *Il terziario nei dintorni di Orosei (Sardegna Orientale)*. « Rendic. Accad. Naz. dei Lincei », XXXIII, 1924.

Fisiologia. — *Sulla sopravvivenza del « Bufo vulgaris » alla pneumectomia bilaterale.* Nota di A. GALAMINI e E. SERIANNI, presentata⁽¹⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Nel corso di ricerche eseguite per studiare la resistenza al trattamento insulinico di rospi, che avevano subito asportazione bilaterale dei polmoni in confronto con rospi normali, avevamo osservato una lunga sopravvivenza in alcuni animali operati di controllo non trattati con insulina. Ci parve interessante esaminare più profondamente il fatto ed istituimmo ricerche adatte allo scopo.

Operammo n. 10 rospi di asportazione bilaterale del polmone nel novembre 1934 e li ponemmo insieme con n. 10 rospi normali in una vasca sul cui fondo era stato posto uno strato di verdura. Ogni giorno gli animali erano lavati; la verdura era rinnovata di tempo in tempo.

Due degli animali non operati e uno operato, essendo fuggiti dalla vasca morirono per essiccamento: cinque operati e quattro non operati morirono relativamente presto a varia distanza di tempo. Gli altri otto sopravvissero a lungo: nel gennaio 1936, dopo 14 mesi erano ancora vivi.

Furono sacrificati e all'autopsia non si osservò macroscopicamente nulla di notevole. Si fece l'esame istologico dei seguenti organi di due animali operati e di uno non operato: cute, pancreas, stomaco, fegato, rene.

Non si notarono differenze rilevanti e comunque tali da essere assunte come dovute all'asportazione dei polmoni.

Ci riserviamo di ritornare sull'argomento dopo avere eseguito nuovi esperimenti. Per ora ci sembra interessante richiamare l'attenzione sul fatto, che non ci risulta già osservato, e cioè che rospi senza polmoni possono sopravvivere per molti mesi in buono stato di salute.

Animali in tali condizioni potranno essere utili per lo studio di funzioni accessorie dei polmoni e forse anche per lo studio di eventuali adattamenti dei processi della respirazione interna.

(1) Nella seduta del 5 aprile 1936.

Fisiologia. (Chimica biologica). — *Ulteriori osservazioni sul comportamento dei corpi creatinici, del solfo, del fosforo e del cloro urinarii nel digiuno e nella rialimentazione* ⁽¹⁾. Nota di V. ZAGAMI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Studiando il comportamento del metabolismo azotato durante i processi ricostruttivi abbiamo notato — come è stato riferito in una precedente Nota ⁽³⁾, — che nei ratti, rialimentati, dopo digiuni più o meno spinti, con dieta sintetica, in cui la caseina rappresentava l'unica sorgente azotata, ma in cui erano presenti contemporaneamente, in opportune proporzioni, glicidi, lipidi, vitamine e sali minerali, si aveva sempre una sovra-ritenzione di azoto, rispetto alla quota perduta durante il digiuno.

Lo stesso fenomeno si verificava negli animali rialimentati con la stessa dieta, ma priva del tutto o quasi di costituenti minerali.

Al contrario gli animali rialimentati con dieta, in cui la gelatina — in luogo della caseina — rappresentava la sorgente azotata, e in cui erano parimenti presenti tutti gli altri costituenti sopra accennati, non hanno presentato alcuna tendenza a recuperare la quota di azoto perduta durante il digiuno, anzi hanno continuato, durante tutto il periodo di rialimentazione o parte di esso, ad eliminare quantità di azoto superiori a quelle introdotte.

A chiarire il significato della sovra-ritenzione azotata, che si aveva nella rialimentazione effettuata con dieta a caseina — sia in presenza che in assenza di sali minerali — abbiamo stimato utile studiare, negli stessi animali da esperimento, accanto al comportamento dell'azoto totale, anche quello dei corpi creatinici, del solfo, del fosforo e del cloro dell'urina; e già in due precedenti Note ^(4,5) abbiamo riferito i primi risultati in merito ottenuti.

Al medesimo fine di metterci in grado di meglio interpretare il fenomeno della sovra-ritenzione azotata, abbiamo creduto non privo di interesse studiare, anche nella condizione di rialimentazione con dieta a gelatina — in cui il fenomeno in parola mancava del tutto —, il comportamento degli stessi costituenti urinarii sopra accennati.

Le esperienze sono state condotte su due ratti albin, maschi, in buone condizioni di nutrizione, giovani, ma a sviluppo completo e a peso corporeo pressochè costante.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 19 aprile 1936.

(3) V. ZAGAMI, A. CURATOLO, V. CAPRARO, *Sul Comportamento del metabolismo azotato durante i processi ricostruttivi nella rialimentazione dopo digiuno*. «Bull. R. Acc. Med. di Roma», 1935, 61, 370; «Arch. Biol.», 1936.

Su ogni ratto abbiamo eseguito tre successivi periodi di osservazioni sperimentali, preceduti, — come nelle ricerche precedenti^(1, 2) — da uno preparatorio, di almeno dieci giorni, in cui non si eseguivano determinazioni.

Nel primo periodo (pre-periodo di osservazione), della durata di 9 giorni, e immediatamente successivo a quello preparatorio, gli animali sono stati alimentati con una dieta sintetica, qualitativamente completa, e così composta: caseina g. 20, amido g. 59, olio di ulive g. 10, lievito di birra g. 5, miscuglio salino di Pappenheimer, Mc Cann e Zucker g. 4, olio di fegato di merluzzo cc. 2, acqua cc. 80. Da notare, che il miscuglio salino da noi adoperato conteneva solfati soltanto in quantità minime (0,025 %) sotto forma di solfato di manganese e solfato di allume-potassico, e non conteneva fosfati.

Nel secondo periodo (periodo di inanizione), immediatamente successivo al primo, gli animali sono stati lasciati a digiuno, con sola acqua a volontà, per 6 giorni, in maniera da subire una perdita del peso corporeo del 20,69-23,02 %.

Nel terzo periodo (periodo di rialimentazione) gli animali sono stati rialimentati con la stessa dieta ricevuta nel primo periodo, ma privata della caseina, e contenente in sostituzione una pari quantità di gelatina.

Durante i vari periodi, a giorni alterni, per ogni animale si raccoglievano tutte le feci e le urine emesse nelle 48 ore, e si procedeva alla determinazione dell'N-totale con il micro-Kjeldahl; nell'urina poi si procedeva alla determinazione dell'N-creatininico e dell'N-creatinico col metodo di Folin, a quella del S-minerale, del S-coniugato e del S-neutro col metodo di Fiske; a quella del P col metodo di Bell-Doisy, modificato da Briggs; e a quella del Cl col metodo di Volhard.

Con il micro-Kjeldahl si determinava anche l'N-totale dell'alimento.

Ci limitiamo qui a presentare schematicamente, nelle tabelle annesse, solo i valori medi, riservandoci di esporre per esteso nel lavoro completo tutti i risultati ottenuti.

Diremo anzitutto, che, per ciò che concerne l'eliminazione dei costituenti urinarii studiati, il comportamento nel digiuno è stato perfettamente identico a quello già da noi descritto nelle due precedenti citate Note.

Per quanto si riferisce invece all'eliminazione di essi durante il periodo di rialimentazione effettuata con dieta a gelatina sono risultati i fatti seguenti:

1) *Corpi creatinici*. Nel periodo di rialimentazione (esteso per 28 giorni) con dieta a gelatina, durante il quale si è avuto sempre o quasi sempre bilancio di azoto negativo — rispetto ai valori del pre-periodo di osservazione, durante il quale gli animali erano alimentati con dieta a caseina e mostra-

(1) V. ZAGAMI, *Sul comportamento dei corpi creatinici, del solfo e del cloro urinarii nel digiuno e nella rialimentazione*. «Rend. R. Acc. Naz. Lincei», 1936, in corso di stampa.

(2) V. ZAGAMI e V. CAPRARO, *Ancora sul comportamento dei corpi creatinici, del solfo, del fosforo e del cloro urinarii nel digiuno e nella rialimentazione*. «Rendic. R. Acc. Naz. Lincei», 1936, in corso di stampa.

TABELLA I.

Indicazione del periodo sperimentale	Data	Giorni di espe- rienza	Peso del corpo g	Medie g		
				N- totale ingerito g	N	
					Urinario g	Fecale g

Periodo I. Periodo di osservazione (dieta a caseina).	6-15 marzo	9	300 → 295	0,4761	0,4022	0,1750
» II. Periodo di inanizione . . .	15-21 marzo	6	295 → 220	0	0,1750	0,1750
» III. Periodo di rialimentazione (dieta a gelatina). . . .	21 marzo-18 aprile	28	220 → 225	0,3944	0,3567	0,1750

Periodo I. Periodo di osservazione (dieta a caseina)	6-15 marzo	9	295 → 290	0,4686	0,3869	0,1750
» II. Periodo di inanizione . . .	15-21 marzo	6	290 → 230	0	0,1129	0,1750
» III. Periodo di rialimentazione (dieta a gelatina). . . .	21 marzo-18 aprile	28	230 → 245	0,4864	0,4245	0,1750

Medie cor

Periodo I. Periodo di osservazione (dieta a caseina)	—	9	297 → 292	0,4723	0,3945	0,1750
» II. Periodo di inanizione . . .	—	6	292 → 225	0	0,1439	0,1750
» III. Periodo di rialimentazione (dieta a gelatina). . . .	—	28	225 → 235	0,4405	0,3906	0,1750

TABELLA I.

e	so	n-	s-	o.	Bilancio	N- totale complessi- vamente perduto (—) o rite- nuto (+)	Peso complessiv. perdu- to (—) o guadagnato (+)	Medie giornaliere										Rapporto N-totale S-totale dell'urina
								Corpi creatinici dell'urina			Solfo dell'urina					Cl della urina	P della urina	
								N- creati- ninico	N- creati- nico	N- creati- ninico + creati- nico	S- acido mine- rale	S- acido coniu- gato	S- acido totale	S- neutro	S- totale acido + neutro			
g	g	g	mg	mg	mg	mg	mg	mg	mg	mg	mg	mg	mg					

50	+ 0,0010	+ 0,0084	— 5	10,36	0,35	10,71	8,89	2,19	11,08	2,50	13,58	67,03	11,1	29,6
37	— 0,1837	— 1,1025	— 75	3,06	5,16	8,22	5,79	2,05	7,84	2,48	10,32	9,14	16,3	16,9
09	— 0,0166	— 0,4631	+ 5	5,97	5,61	11,58	11,93	1,59	13,52	2,09	15,61	63,59	indos.	22,8

44	+ 0,0245	+ 0,1953	— 5	7,25	0,74	7,99	11,33	2,22	13,55	2,40	15,95	63,02	11,1	24,2
98	— 0,1198	— 0,7192	— 60	2,86	1,30	4,16	4,43	1,63	6,06	0,72	6,78	5,24	11,3	16,6
50	+ 0,0213	+ 0,6061	+ 15	7,34	5,56	12,90	14,31	2,85	17,16	1,12	18,28	78,92	indos.	23,2

N. 7 e 8.

59	+ 0,0127	+ 0,1018	— 5	8,80	0,55	9,35	10,11	2,20	12,31	2,45	14,76	65,02	11,1	26,9
17	— 0,1517	— 0,9108	— 67	2,96	3,23	6,19	5,11	1,84	6,95	1,60	8,55	7,19	13,8	16,7
79	+ 0,0023	+ 0,0715	+ 10	6,65	5,59	12,24	13,12	2,22	15,34	1,60	16,94	71,25	indos.	23,0

TABELLA II.

Indicazione dei rapporti	Ratto n. 7			Ratto n. 8			Medie generali		
	Periodo I (dieta a caseina)	Periodo II (dieta a caseina)	Periodo III (dieta a gelatina)	Periodo I (dieta a caseina)	Periodo II (dieta a caseina)	Periodo III (dieta a gelatina)	Periodo I (dieta a caseina)	Periodo II (dieta a caseina)	Periodo III (dieta a gelatina)
$\frac{\text{N-creatininico}}{\text{N-totale}} \times 100$	2,58	1,74	1,68	1,87	2,53	1,73	2,22	2,13	1,70
$\frac{\text{N-creatininico}}{\text{N-totale}} \times 100$	0,08	2,56	1,57	0,19	1,15	1,31	0,14	2,06	1,44
$\frac{\text{N-creatininico} + \text{N-creatinico}}{\text{N-totale}} \times 100$	2,66	4,70	3,25	2,06	3,68	3,04	2,36	4,19	3,14
$\frac{\text{N-creatininico}}{\text{N-creatininico} + \text{N-creatinico}} \times 100$	96,7	37,2	51,6	90,7	68,7	56,9	93,7	52,9	54,2
$\frac{\text{N-creatinico}}{\text{N-creatininico} + \text{N-creatinico}} \times 100$	3,3	62,8	48,4	9,3	31,3	43,1	6,3	47,1	45,8

TABELLA III.

Indicazione dei rapporti	Ratto n. 7			Ratto n. 8			Medie generali		
	Periodo I (dieta a caselina) Pre-periodo di osservazione	Periodo II Periodo di inanizione	Periodo III (dieta a gelatina) Periodo di rialimentazione	Periodo I (dieta a caselina) Pre-periodo di osservazione	Periodo II Periodo di inanizione	Periodo III (dieta a gelatina) Periodo di rialimentazione	Periodo I (dieta a caselina) Pre-periodo di osservazione	Periodo II Periodo di inanizione	Periodo III (dieta a gelatina) Periodo di rialimentazione
$\frac{S\text{-acido}}{S\text{-totale}} \times 100$	81,6	76,0	86,6	85,0	89,4	93,9	83,3	82,7	90,2
$\frac{S\text{-neutro}}{S\text{-totale}} \times 100$	18,4	24,0	13,4	15,0	10,6	6,1	16,7	17,3	9,8
$\frac{S\text{-minerale}}{S\text{-acido}} \times 100$	80,2	73,9	88,2	83,6	73,1	83,4	81,9	73,5	85,8
$\frac{S\text{-accoppiato}}{S\text{-acido}} \times 100$	19,8	26,1	11,8	16,4	26,9	16,6	18,1	26,5	14,2

vano perfetto bilancio di azoto, — si è avuto un aumento dell'azoto dei corpi creatinici eliminati giornalmente con la urina (da una media di mg. 9,35 nel pre-periodo ad una media di mg. 12,24 nel periodo di rialimentazione). Precisamente si è avuto una lieve diminuzione dell'N-creatininico (da mg. 8,80 a mg. 6,65) e un aumento notevole dell'N-creatinico (da mg. 0,55 a mg. 5,59); cosicchè mentre l'N-creatininico rappresentava normalmente il 93,7% e l'N-creatinico il 6,3% dell'azoto complessivo dei corpi creatinici, nel periodo di rialimentazione invece gli stessi rapporti corrispondevano a 54,2% per l'N-creatininico e a 45,8% per l'N-creatinico.

Durante il periodo di rialimentazione si è avuto pure un aumento dell'azoto dei corpi creatinici rispetto all'N-totale dell'urina (da 2,36% a 3,14%), e tale aumento è da ascriversi unicamente all'N-creatinico, che è passato da 0,14% a 1,44%, poichè l'N-creatininico ha subito invece diminuzione (da 2,22% a 1,70%).

Il comportamento dell'azoto dei corpi creatinici e il rapporto di questo con l'N-totale dell'urina nel periodo di alimentazione con dieta a gelatina è stato nettamente diverso da quello presentato dagli animali rialimentati con dieta completa a caseina, e perfettamente identico — a parte la differenza di grado — a quello presentato dagli animali rialimentati con dieta priva di componenti minerali e a quello presentato dagli stessi animali in periodo di inazione.

2) *Solfo*. Nel periodo di rialimentazione con dieta a gelatina — rispetto ai valori del pre-periodo di osservazione — si è avuto un aumento del S-totale eliminato giornalmente con le urine (da una media di mg. 14,76 ad una media di mg. 16,94). Tale aumento è da ascriversi unicamente al S-ossidato (da mg. 12,31 a mg. 15,34, in media), perchè il S-neutro nello stesso periodo di tempo ha subito invece una diminuzione (da mg. 2,45 a mg. 1,60, in media); cosicchè, mentre nel pre-periodo di osservazione il S-neutro rappresentava il 16,7% del S-totale, nel periodo di rialimentazione con dieta a gelatina rappresentava invece il 9,8%.

Insignificante variazione ha presentato il rapporto N-totale / S-totale dell'urina.

3) *Fosforo*. Nel periodo di rialimentazione con dieta a gelatina la eliminazione del fosforo con l'urina, che durante il digiuno si era elevata da mg. 11,3 a mg. 13,8 (in media) al giorno, si è ridotta a tracce indosabili.

4) *Cloro*. L'eliminazione del cloro non ha subito durante il periodo di rialimentazione con dieta a gelatina alcuna variazione rispetto a quella che era nel pre-periodo di osservazione con dieta a caseina.

Discuteremo in una prossima Nota i presenti risultati insieme con quelli già riferiti nelle Note precedenti.

Fisiologia (Chimica fisiologica). — *Sul valore alimentare e nutritivo della ghianda, e sulla possibilità di utilizzarla nell'alimentazione umana*⁽¹⁾. Nota di V. FIGURA, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Nella presente Nota vogliamo riferire, in linea preliminare e molto sintetica, intorno ad alcune nostre ricerche riflettenti il valore nutritivo della ghianda e la possibilità di utilizzarla come alimento umano: suggerite dal particolare momento, che attraversiamo, esse sono state eseguite per consiglio e sotto la diretta guida del prof. Amantea, e ci proponiamo di esporle dettagliatamente in una prossima pubblicazione completa sull'argomento.

La ghianda, allo stato naturale, pur rappresentando un alimento di nota e fondamentale importanza per molti animali (suini, equini, bovini, roditori ecc.), nei riguardi dell'uomo non è commestibile, perchè sgradevole al gusto, dato lo speciale sapore aspro, astringente, amarognolo: il carattere astringente è dovuto alla presenza di sostanze tanniche (6-9 %); il sapore amaro è dovuto alla presenza di una particolare sostanza isolata dal Greber, la quercina.

Pertanto, volendo utilizzare la ghianda per l'alimentazione umana, si imponeva anzitutto di privarla, o impoverirla per lo meno, di dette sostanze. Non avendo trovato nella vasta letteratura consultata nessun metodo per ottenere completo questo scopo, dopo una lunga serie di tentativi, che qui per brevità non si riportano, abbiamo finito con l'adottare precisamente la tecnica seguente, che ci si è rivelata adatta, e ci ha infatti dato buoni risultati:

1° TEMPO. — Bollitura in acqua di fonte per 10'-15' minuti. Ha lo scopo di agevolare la estrazione delle sostanze tanniche, che in acqua calda sono più solubili, di trasformarle nei loro prodotti d'idrolisi, di modificare o intaccare in qualche modo l'impalcatura cellulosica della ghianda, rendendo più efficaci i trattamenti successivi.

2° TEMPO. — Immersione in soluzione di NaOH a 0,4-0,5 % per quattro giorni cambiando la soluzione ogni 24 ore. È noto che il tannino a freddo, in ambiente alcalino, si scinde nei suoi prodotti di idrolisi (acido gallico, glucosio); ed inoltre, se si prepara una soluzione di tannino chimicamente pura e si assaggia, essa ha un sapore aspro, astringente, caratteristico, mentre

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 3 maggio 1935.

se si aggiunge una soluzione anche debole di NaOH, questo sapore completamente scompare.

3° TEMPO. — Bollitura per 20'-25' minuti in acqua di fonte. Si pratica per i medesimi motivi accennati per il primo tempo, allo scopo di rendere più sicuro e completo il risultato.

4° TEMPO. — Immersione per 4-5 giorni in acqua di fonte, cambiando l'acqua ogni 24 ore. Nel caso che alla fine del terzo tempo la ghianda presentasse ancora un residuo di sapore amarognolo, conviene aggiungere per due giorni all'acqua, il 25 % di NaCl. Col suddetto lavaggio finale si asportano i prodotti d'idrolisi delle sostanze tanniche eventualmente rimasti. Per quanto riguarda il trattamento con NaCl al 2 %, è noto che esso da lungo tempo è adottato comunemente in pratica, per privare di sostanze amare materiali che le contengono. Anche nel nostro caso, il metodo ha bene corrisposto.

Alla fine di questo trattamento la ghianda risulta ridotta in buona forma commestibile.

Ci preme di mettere in rilievo, che, trovato il modo per rendere commestibile la ghianda, la nostra attenzione è stata rivolta in una duplice direzione: da un lato allo studio sperimentale del suo valore alimentare, dall'altro all'accertamento della possibilità di darle forme adatte, per renderla gradita al nostro gusto.

Per lo studio adeguato del valore alimentare e nutritivo della ghianda, abbiamo adottato la tecnica, che già da alcuni anni si segue nell'Istituto di Chimica fisiologica della R. Università di Roma, e che ha già fornito numerosi buoni risultati, specialmente a V. Zagami e a V. Famiani, ai cui lavori⁽¹⁾ rimandiamo per la esatta descrizione. In sostanza il metodo implica lo studio — in adeguate condizioni di esperienza — dell'accrescimento di giovanissimi ratti, alimentati esclusivamente col materiale studiato, in confronto con l'accrescimento di altri, alimentati col materiale medesimo, ma integrato mercè aggiunta di opportuni correttivi (caseina, olio di fegato di merluzzo, sali minerali, da soli o associati), servendo di controllo pei singoli gruppi un ultimo lotto di animali tenuti a dieta ordinaria mista e molto variata.

Per le nostre ricerche si sono utilizzati complessivamente 54 ratti albin, dello stesso ceppo e della stessa età (4 settimane circa), e si è protratto il periodo di osservazione fino a 80 giorni. I risultati ottenuti, brevemente riassunti, sono i seguenti: la ghianda trattata e resa commestibile con il metodo sopra descritto, a differenza di quella allo stato naturale (che si è rivelata poco accetta), è stata mangiata volentieri dagli animali di esperimento, senza provocare apprezzabili disturbi, digestivi o comunque riferi-

(1) V. FAMIANI, *Sul valore alimentare del grano*. « Il problema alimentare », 1932, 2, p. 55; V. ZAGAMI, *Sul valore alimentare dei semi di « Cicer Arietinum L. »*. « Il problema alimentare », 1931, 1, p. 150.

bili ad una qualsiasi sua azione tossica o dannosa. Dal punto di vista del valore alimentare e nutritivo, la ghianda si è dimostrata, *da sola*, alimento incompleto, per una deficienza mista, sicuramente proteica e salina, probabilmente anche vitaminica. È tuttavia da rilevare, che la deficienza di sali minerali è forse giustificata — in parte almeno — dal particolare trattamento, cui è stata necessità sottoporla, per renderla commestibile, e che, come si è visto, implica un prolungato lavaggio a più riprese.

In ogni modo una volta corrette le sue deficienze, essa è stata bene gradita dagli animali durante l'intero periodo di esperimento, permettendo loro uno sviluppo sotto qualsiasi riguardo normale (e si noti che le diete così corrette, contenevano dal 74 % all'84 % di ghianda a seconda dei casi). Precisamente gli animali così trattati si sono sviluppati bene, presentando normalmente la muta del primo pelo, nonché la discesa dei testicoli (i maschi), la schiusura dell'ostio vaginale, la gravidanza e l'allattamento (le femmine). La documentazione esauriente di tali fatti sarà fornita nel lavoro completo.

Arrivati a questo punto si trattava di proseguire, prendendo in attenta considerazione il lato pratico dell'argomento, ossia la possibilità di utilizzare la ghianda — resa commestibile e bene studiata dal punto di vista del valore alimentare e nutritivo — nella alimentazione umana.

Ma a tale scopo abbiamo dovuto invocare la preziosa collaborazione di un egregio e noto tecnico della cucina, il cav. Amedeo Pettini (primo cuoco di S. M. il Re d'Italia), il quale ce l'ha concessa larga e premurosa, con il più encomiabile disinteresse. Egli, impiegando intelligentemente il materiale da noi allestito, e tenendo anche presenti nostri suggerimenti e proposte, è riuscito a dare alla ghianda svariate gradevolissime forme, sotto cui presentarla alla nostra mensa: ne ha fatto biscotti, torte dolci, focacce salate ecc., di vero gradimento non solo all'occhio, ma soprattutto al gusto e bene digeribili. Di particolare rilievo ci sembra, che egli ha anche potuto preparare un tipo di pasta, col 40 % di ghianda, che a parte il colore brunoastro, ha tutte le migliori caratteristiche di cottura, di sapore e di digeribilità, che possano desiderarsi. Ha tenuto inoltre presente la nostra proposta di utilizzare la ghianda nella panificazione: questo lato del problema è di ovvio grande interesse, e sono in corso prove al riguardo. Cosicché il cav. Pettini, che personalmente e separatamente illustrerà l'argomento dal proprio punto di vista tecnico, ci ha fornito in modo esauriente la dimostrazione dell'ampia possibilità di preparare la ghianda in forme più che gradite al palato umano.

Chi scrive ha potuto per sei giorni alimentarsi con la pasta, le torte e le focacce dal cav. Pettini allestite, sostituendole *totalmente* al pane e alle paste ordinarie, e accertarne così su se stesso, la perfetta digeribilità, mantenendosi in pieno benessere e aumentando anche di peso.

In conclusione dalle nostre ricerche è risultato:

1° che è possibile con mezzi semplici e non costosi rendere la ghianda commestibile;

2° che la ghianda così trattata rappresenta, è vero, da sola, un alimento incompleto (per una deficienza sicuramente proteico-salina, e probabilmente anche vitaminica); ma si può agevolmente correggerne le deficienze, e allora diventa atta ad assicurare il completo normale sviluppo di giovanissimi ratti albin;

3° che la ghianda resa commestibile, si presta a essere variamente manipolata e preparata in modo da riuscire gradita all'uomo, che può assumerne anche in larga misura, senza alcun disturbo, anzi con vantaggio.

Fisiopatologia. — *Sui movimenti dei teleostei in rapporto con lesioni sperimentali degli apparati periferici di moto e di senso.* - IV. *Lesioni labirintiche* ⁽¹⁾. Nota di CARLO RIZZO, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Da alcuni anni vado studiando la fisiopatologia del movimento e dell'equilibrio nei teleostei, analizzando la statica e il nuoto di questi pesci in condizioni normali e seguendone le patologiche modificazioni in differenti condizioni sperimentali.

Così ho precisato su teleostei di varie specie: *Julis giosfredi*, *Julis vulgaris*, *Cyprinus carpio* ecc. (comunicando i miei risultati anche al I Congresso internazionale di Neurologia: Berna, 1931) che sottili agopunture encefaliche trans-craniche possono determinare una serie di disturbi i quali, in ordine di frequenza, sono:

a) una quasi costante ipertonia pleurotonica, cioè un incurvamento laterale;

b) un movimento di rotazione sull'asse longitudinale del corpo: disturbo anch'esso frequentissimo;

c) un meno frequente movimento di maneggio;

d) una tendenza obbligata alla verticalizzazione, sicchè in certi casi gli animali stanno col muso in alto, fino a raggiungere e, di quando in quando, a sorpassare il pelo dell'acqua, ma più spesso sono rivolti col muso contro il fondo della vasca;

e) l'inclinazione laterale del corpo del pesce, osservabile anche nei periodi di riposo dell'animale, durante i quali esso poggia addirittura col fianco sul fondo della vasca;

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Milano e nella Clinica Neuropsichiatrica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 3 maggio 1936.

f) un più raro atteggiamento anormale in flessione della pinna dorsale, flaccidamente abbassata verso il lato opposto a quello che presenta la concavità pleurotonica;

g) infine, una deviazione oculare obbligata, rarissima.

Al riscontro autopsico ho potuto, poi, sicuramente accertare che i vari disordini ora illustrati erano stati sempre provocati da lesioni distruttive, determinate dalle agopunture, interessanti — indifferentemente — la base mesencefalica o il cervelletto (porzione valvolare). Nella maggior parte dei casi i disordini comparvero omolateralmente alla lesione cerebellare e controlateralmente a quella mesencefalica.

Questi risultati sperimentali mi autorizzano a concludere, fra l'altro, che tanto la base del mesencefalo quanto il cervelletto hanno un'importanza assai grande sulle funzioni statiche nonchè sulla motilità dei pesci; mentre, al riguardo, nè il telencefalo nè il tetto ottico esercitano alcuna influenza, come ho potuto constatare praticando le stesse agopunture in queste regioni. E tutto, ciò conferma — anche nei vertebrati inferiori — la grande dignità funzionale della regione mesencefalo-cerebellare agli effetti della regolazione dei movimenti e dell'equilibrio, come si va sempre meglio dimostrando anche per i vertebrati superiori e per l'uomo.

Arrivato a questo punto delle mie ricerche — le quali confermano solo in parte i risultati degli studiosi che mi hanno preceduto e che per brevità ometto di ricordare — mi parve utile vedere se disturbi analoghi o identici a quelli prodotti dalle encefalo-punture potessero determinarsi anche mediante lesioni dei principali apparati periferici di moto e di senso. E ciò al fine di analizzare un eventuale rapporto — agli effetti del movimento e dell'equilibrio — fra cotesti apparati ed i centri nervosi di cui avevo già veduto la grande importanza per la regolazione, nei pesci, della statica e del movimento.

Con questo intento ho successivamente esaminato la possibile importanza delle varie pinne, degli occhi e degli organi della linea laterale, ed ho comunicato i principali risultati dei miei esperimenti nel « Bollettino della Società Italiana di Biologia sperimentale », annate 1928-1932. In nessun caso — e si trattò sempre delle specie di teleostei già ricordate — i fenomeni osservati erano per nulla paragonabili a quelli presenti negli animali encefalo-lesi.

Da ultimo ho eseguito numerose lesioni labirintiche: e di questi esperimenti (comunicati, in parte, al XV Congresso internazionale di Fisiologia: Leningrado-Mosca, 1935) dò conto nella presente Nota.

Sulle solite specie di teleostei ho praticato labirinto-lesioni unilaterali, generalmente mediante un sottile punteruolo arroventato. La regione lesa corrispondeva alla porzione cranica retro-orbitaria, immediatamente davanti

all'inserzione superiore dell'opercolo. La sola difficoltà — facilmente superata dopo qualche prova preliminare — consisteva nel produrre il trauma non così profondamente da ledere anche il fusto encefalico, né così superficialmente da non raggiungere il labirinto.

Gli animali labirinto-lesi e che sopravvissero al trauma (il che avvenne nella grande maggioranza dei casi) si comportarono, dopo un fugace periodo di choc, in una delle due maniere seguenti:

1. Il teleosteo si riprende quasi immediatamente, e non mostra altre conseguenze della lesione se non una leggera inclinazione del corpo verso il lato operato. L'inclinazione si va poi correggendo, fin'anche a scomparire del tutto. Ciò avvenne nei due terzi dei miei esperimenti.

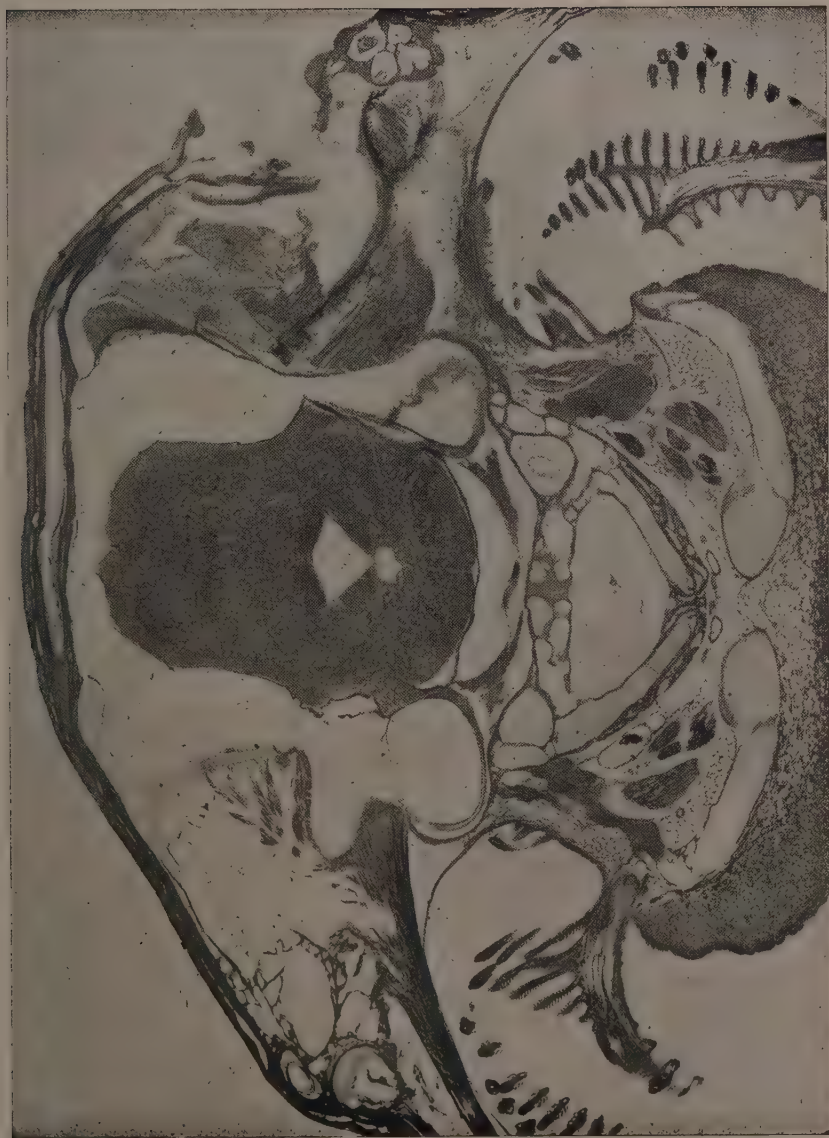
2. Nel rimanente dei casi l'animale presenta — omolateralmente al labirinto offeso — una sintomatologia qualitativamente del tutto identica a quella già descritta a proposito delle lesioni encefaliche; quantitativamente, però, i disturbi natatori mi sembrano meno accentuati che non negli encefalo-punti. Anche nei pesci labirinto-lesi prevalgono, come frequenza, l'ipertonìa pleurototonica e le rotazioni sull'asse longitudinale del corpo; i movimenti di maneggio e la tendenza alla verticalizzazione sono assai meno frequenti.

Ricordo ancora che in due casi (su oltre 50 animali operati) il pleurototono, il maneggio e la rotazione furono controlaterali — anziché omolaterali, come di norma — al labirinto colpito. Suppongo che ciò sia dipeso da un concomitante interessamento dell'encefalo, forse in seguito a qualche emorragia determinatasi nell'interno del cranio. Ho ancora allo studio i relativi documenti autopsici, come pure quelli che si riferiscono agli animali di cui al N. 1 e che presentarono scarse manifestazioni dopo l'interessamento labirintico.

Dopo aver lasciato in vita per parecchi giorni i pesci labirinto-lesi (accertandomi, così, della stabilità dei disordini prodotti dall'intervento sperimentale) li sacrificavo allo scopo di controllare istologicamente la sede esatta ed i limiti delle lesioni. Escisso il capo con un taglio retro-opercolare che comprendesse tutto il fusto dell'encefalo, procedetti poi alle operazioni di decalcificazione e di inclusione in celloidina. Quindi praticai le sezioni seriali, colorandole, infine, coll'ematossilina-eosina o col metodo di van Gieson.

I reperti furono univoci: il labirinto apparve sempre profondamente leso, senza che i fatti distruttivi interessassero l'encefalo né i suoi rivestimenti. La sede ed i limiti delle lesioni appaiono con evidenza anche dalla annessa tavola, ove si osserva, appunto, che il labirinto di destra è parzialmente distrutto, mentre la cavità cranica vera e propria e il suo contenuto sono stati completamente rispettati dal trauma.

Ritengo ancora prematuro (in mancanza di tutti i controlli istologici e, soprattutto, in mancanza di precisi dati sugli effetti delle lesioni labirintiche bilaterali) trarre tassative conclusioni dai risultati sin qui ottenuti.



Sezione frontale trans-cranica di *Cobraeus carpio* con lesione del labirinto destro.

Mi sembra, comunque, evidente — in conformità, a questo proposito, colle vedute del Loeb e di ten Cate i quali sperimentarono sui selaci sezionandone un nervo acustico — che anche nei teleostei il labirinto abbia una fondamentale importanza nella regolazione e conservazione del tono e dell'equilibrio, per cui la sua distruzione unilaterale riproduce con grande esattezza quegli stessi disordini della statica e del movimento osservabili dopo lesioni mesencefaliche e cerebellari.

Se, poi, si tratti — nei due casi — di fenomeni assolutamente identici (e dovremmo pensare, allora, che l'encefalo-lesione e la lesione labirintica agirono alterando punti diversi di un medesimo sistema coordinatore del tono e del moto), ovvero si tratti di disturbi solo apparentemente simili, ma aventi un differente significato, non posso ancor dirlo. I risultati dei miei numerosi esperimenti di punture mesencefaliche, cerebellari ecc. nonchè di lesioni distruttive del labirinto, mi farebbero propendere (indipendentemente dalle considerazioni che si possono dedurre dagli studi degli autori che mi hanno preceduto) per la prima ipotesi.

Mi occorrono, ad ogni modo, altri dati sperimentali e, specialmente, anatomici: dati che ho già raccolto in gran parte e che mi propongo di vagliare per farne oggetto di una successiva comunicazione.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente sen. MILLOSEVICH annuncia la morte del Socio Straniero IVAN PETROVICH PAVLOV e invia alla Sua memoria un reverente saluto.

Il Corrisp. BAGLIONI rievoca brevemente la figura dell'eminente Scienziato e mette in rilievo l'importanza della sua opera scientifica nel campo della fisiologia e della medicina, ricordando specialmente le sue classiche esperienze sulle ghiandole salivari.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio ENRIQUES legge anche a nome dei Colleghi CASTELNUOVO e BOMPIANI la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria di I. Conforto dal titolo « Sui fasci d'Halphen i cui punti base appartengono ad una cubica ellittica degenerare ».

L'Assemblea approva.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta le opere giunte in dono segnalando una numerosa serie di opuscoli del Corrisp. PELLOUX; un volume su l'« Utilizzazione dei soffioni boraciferi » del Socio GINORI-CONTI; l'opera del Comitato dell'Istituto degli Ingegneri Civili di Londra sul deterioramento delle strutture metalliche esposte all'azione dell'acqua di mare; il volume III degli « Annals of the Dearborn Observatory » riguardante le parallassi stellari.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci ARMELLINI, BOMPIANI, CORBINO, GIORGI, LEVI-CIVITA, MILLOSEVICH.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL' ACCADEMIA

presentate nella seduta del 3 maggio 1936

- DE' CONNO E., TARSTANO L. e LONGO L. — Il terreno assegnato alla Stazione Sperimentale per le Piantе Officinali annessa al R. Orto Botanico di Napoli. (Estr. dal «Bull. dell'Orto Botanico della R. Università di Napoli». Tomo XIII, pp. 99-110). Napoli, 1935. 8°.
- DISCON S. M. and GROSE H. J. — Deterioration of structures of timber, metal, and concrete exposed to the action of sea-water. London, 1935. 8°, pp. I-XVI, 1-138.
- GINORI CONTI GIOVANNI. — Utilizzazione dei soffici boraciferi. Storia, sviluppi, possibilità future. Firenze, 1936. 4°, pp. 1-156.
- GLODEN A. — Sobre las identidades numéricas. (Estr. da «Matemática elemental». Nums. 1-2 de 1936). Madrid, 1936. 8°, pp. 1-4.
- GROSE H. J. — Vedi DISCON S. M.
- LONGO L. — Vedi DE' CONNO E.
- LOUIS JEAN. — Revision des espèces Congolaises du genre *Erithrina* L. (Estr. du «Bulletin du Jardin Botanique de l'État». Vol. XIII, pp. 295-319). Bruxelles, 1935. 8°.
- MENZEL DONALD H. and PEKERIS CHAIM L. — Absorption coefficients and hydrogen line intensities. (Reprinted from the «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society». Vol. 96, pp. 77-111). S. l. 1935. 8°.
- NORMAN D., WHIPPLE F. L. and STERNE T. E. — Prismatic deviation as a function of cosmical orientation. (Reprinted from the «Proceedings of the National Academy of Sciences». Vol. XXII, pp. 15-19). S. l. 1936. 8°.
- PAOLI GUIDO. — Nota sui generi *Spalacommimus* Karsch e *Bradyopisthius* Karsch. (Orthopt. Phasgonur). (Estr. dagli «Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova». Vol. LVIII, pp. 101-114). Genova, 1936. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — La Valle d'Aosta. Descrizione geografica. (Estr. dalla «Rivista militare Italiana». Anno 1904). Roma, 1901. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — Appunti sopra alcuni minerali delle Cetine di Cotorniano presso Rosia (in Provincia di Siena). (Estr. dai «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei». Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Serie 5ª, vol. X, pp. 10-14). Roma, 1901. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — Scheelite ed altri minerali rinvenuti in una roccia proveniente dal traforo del Sempione (versante italiano). (Estr. dal «Bollettino del Naturalista». Anno XXI, n. 7). Siena, 1901. 8°, pp. 1-2.
- PELLOUX ALBERTO. — Contributi alla mineralogia della Sardegna. I. Atacamite, valentinite, leadhillite, caledonite, linarite ed altri minerali dell'Argentina della Nurra (Portotorres). (Estr. dai «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei». Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. XIII, 2° sem., serie 5ª, pp. 34-42). Roma, 1934. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — La collezione mineralogica Traverso del Museo Civico Genovese nel 1907. (Estr. dagli «Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova». Vol. III). Genova, 1907, 8°, pp. 1-40.
- PELLOUX ALBERTO. — Contributi alla mineralogia della Sardegna. (Estr. dai «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei». Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Serie 5ª, vol. XVII, 2° sem., pp. 70-74). Roma, 1908. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — Spangolite di Arenas e polibasite del Sarrabus in Sardegna.

- (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova ». Vol. IV, pp. 194-200). Genova, 1909. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — Contributi alla descrizione dell'anglesite sarda. I. Anglesite di Monte Scorra, Masua e S. Giovanni d'Iglesias. (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova ». Serie 3ª, vol. V, pp. 149-155). Genova, 1911. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — Connellite di Arenas in Sardegna. (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova ». Serie 3ª, vol. V, pp. 205-208). Genova, 1912. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — Sopra alcuni minerali dell'arcipelago della Maddalena (Sardegna). (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova ». Serie 3ª, vol. V, pp. 273-281). Genova, 1912. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — Variscite del Sarrabus (Sardegna). (Estr. dagli « Annali del Museo di Storia Naturale di Genova ». Serie 3ª, vol. V, pp. 470-472). Genova, 1912. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — Sulla senarmontite di Su Suergiu (Gerrei) e di Su Lonnarriu (Sarrabus) in Sardegna. (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova ». Serie 3ª, vol. VI, pp. 19-21). Genova, 1913. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — Nuove forme della romeina di S. Marcel in Valle d'Aosta. (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova ». Serie 3ª, vol. VI, pp. 21-24). Genova, 1913. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — Sopra alcuni minerali dei dintorni di S. Vincent e Châtillon in Valle d'Aosta. (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova », Serie 3ª, vol. VI, 25-33). Genova, 1912. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — Nota preliminare sulla fosfoderite della miniera di S. Giovanni presso Gonnessa (Sardegna). (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova ». Serie 2ª, vol. VI, pp. 46-48). Genova, 1913. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — Nota preliminare sulla brucite idromagnesite ed altri minerali della miniera di Monte Ramazzo presso Borzoli (Liguria). (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova ». Serie 3ª, vol. VI, pp. 34-37). Genova, 1913. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — Anatasio dell'Alpe Pirlò in Val Malenco. (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova ». Serie 3ª, vol. VI, pp. 193-196). Genova, 1914. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — G. B. Traverso. 26 settembre 1843-1° giugno 1914. (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova », Serie 3ª, vol. VI, pp. 183-192). Genova, 1914. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — Catalogo delle collezioni di minerali esposte dall'ufficio invenzioni per le armi e munizioni alla esposizione di Genova 1919. Genova, 1919. 8°, pp. 1-32.
- PELLOUX ALBERTO. — Cenni descrittivi sulla morfologie di Castiglione. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ». Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Serie 5ª, vol. XXVIII, 2° sem., pp. 503-505). Roma, 1919. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — La sellaite del marmo di Carrara. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ». Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Serie 5ª, vol. XXVIII, 2° sem., pp. 284-277). Roma, 1919. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — Ulteriore relazione sulla ricerca di molibdenite presso Gonnosfanadiga (Sardegna). Roma, 1922. 8°, pp. 1-2.
- PELLOUX ALBERTO. — La regione ofiolitica del Bracco e la miniera di rame di Deiva nella Liguria orientale. (Estr. dalla « Rassegna Mineraria metallurgica e chimica ». Vol. LXIV). Roma, 1926. 8°, pp. 1-18°.
- PELLOUX ALBERTO. — The minerals of Vesuvius. (From the « American Mineralogist ». Vol. XII, pp. 14-21). Menasha, 1927. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — Sferocobaltite ed altri minerali della Valle del Neva (Estr. dalle « Memorie dell'Accademia Lunigiana

- nese di Scienze G. Capellini». Vol. VIII, pp. 42-55). La Spezia, 1927. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — Brevi notizie di mineralogia italiana. (Estr. dal «Periodico di Mineralogia». Anno I). s. l. 1930. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — Caledonite e leadhillite della miniera di Tiny nella valle di Oridda (Domusnovas), Sardegna. (Estr. dal «Periodico di Mineralogia». Anno I, n. 3). s. l. 1930. 8°, pp. 1-7.
- PELLOUX ALBERTO. — Brevi notizie di mineralogia italiana. (Estr. dal «Periodico di Mineralogia». Anno I, n. 2). s. l. 1930. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — Sulla lava di Lazzaria in territorio di Velletri e sui suoi minerali secondari. (Estr. dal «Bollettino della Società Geologica Italiana». Volume XLIV, pp. 53-56). s. l. 1930. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — Brevi notizie di mineralogia italiana. Zaratite di Cogne (Valle d'Aosta). (Estr. dal «Periodico di Mineralogia». Anno XI, n. 1). s. l. 1931. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — Armatomo ed altri minerali del giacimento di grafite di Cesieri (Valle del Chisone). (Estr. dal «Periodico di Mineralogia». Anno XI, n. 3). s. l. 1931. 8°, pp. 1-5.
- PELLOUX ALBERTO. — Rocce e minerali (Spedizione scientifica all'Oasi di Cufra, marzo-luglio 1931). (Estr. dagli «Annali de Museo Civico di Storia Naturale di Genova»). Vol. LV, pp. 259-267). Genova, 1932. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — Contributi alla mineralogia albanese. (Estr. dal «Periodico di Mineralogia». Anno III). s. l. 1932. 8°, pp. 1-11.
- PELLOUX ALBERTO. — I caolini e le argille refrattarie della Sardegna. (Estr. dagli «Atti del I Congresso Internazionale del vetro e della ceramica tenutosi a Milano dal 16 al 25 settembre 1933»). Milano, 1933. 8°, pp. 1-14.
- PELLOUX ALBERTO. — Itinerari per le escursioni del XLVII Congresso della Società Geologica Italiana. (Estr. dal «Bollettino della Società Geologica Italiana». Vol. LIII). Roma, 1934. 9°, pp. 1-19.
- PELLOUX ALBERTO. — Sulla geologia ed i giacimenti di minerali e materiali litoidi delle regioni di Sestri Levante e Chiavari. (Estr. dal «Bollettino della Società Geologica Italiana». Vol. LIII, pp. LVIII-LXIII). Roma, 1934. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — Tinzonite o parsettensite della miniera di Cassagna (Liguria Orientale). (Estr. dal «Bollettino della Società Geologica Italiana». Volume LIII, pp. 235-238). Roma, 1934. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — I minerali uraniferi e le sorgenti di acque radioattive della miniera di Lurisia presso Roccaforte di Mondovì. (Estr. dagli «Atti della Società Ligustica di Scienze e Lettere di Genova»). Vol. XIII). Pavia, 1934. 8°, pp. 1-34.
- PELLOUX ALBERTO. — Necrologia di Adolfo Ciampi. (Estr. dal «Bollettino della Società Geologica Italiana». Vol. LIII, pp. 109-112). Roma, 1935. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — Necrologia di Henry Stephens Washington. (Estr. dal «Bollettino della Società Geologica Italiana». Vol. LIII, pp. CII-CVII). Roma, 1935. 8°.
- PELLOUX ALBERTO. — Contributi alla mineralogia Albanese (Nota II). Minerali del giacimento a solfuri arseniali di Komana nella Valle del Drin. (Estr. dal «Periodico di Mineralogia». Anno III, n. 2). s. l. 1932. 8°, pp. 1-15.
- PELLOUX ALBERTO. — Sulla scheelite delle miniere del Gerrei in Sardegna. (Estr. dai «Rendiconti della R. Accademia Naz. dei Lincei». Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Serie 5^a, vol. XXII, pp. 554-556). Roma, 1935. 8°.
- POKERIS CHAIM L. — Vedi MENZEL DONALD H.
- POMEY J.-B. — Calcul des probabilités. Paris, Éditeur Gauthier-Villars, 1936. 8°, pagine 1-85.
- SHAPLEY HARLOW. — Summary of investigations of variable Stars. (Reprinted from the «Proceedings of the National Academy of Science». Vol. XXII, pp. 8-14). Washington, 1936. 8°.
- STANER P. — L'acacia «Galles» du Congo. (Extr. des «Annales de la Société scientifique de Bruxelles». Série B. Sciences physiques et naturelles, t. LV, pp. 310-314). Bruxelles, 1935. 8°.

- STANER P. — Les Thyméléageés de la flore du Congo Belge. (Extr. du « Bulletin du Jardin botanique de l'État ». Vol. XIII, pp. 321-372). Bruxelles, 1935, 8°.
- STANER P. — Plantes Congolaises a fruits comestibles. (Publications de l'Institut National pour l'étude agronomique du Congo Belge. Série Scientifique, n. 4). Gembloux. s. d. 8°, pp. 1-56.
- STANER P. — Révision des espèces Congolaises du genre *Dombeya* Cao. (Extr. des « Annales de la Société scientifique de Bruxelles ». Sér. B. Sciences physiques et naturelles, t. LV, pp. 56-66). Louvain, 1935, 8°.
- STERNE T. E. — Vedi NORMAN D.
- SUSANNA VITTOBIO. — Ricerche farmacologiche sul Boldo e sulla canapa indiana coltivati nella Stazione Sperimentale per le piante officinali annesse al R. Orto Botanico di Napoli. (Estr. dal « Bull. dell'Orto Botanico della R. Università di Napoli ». T. XIII, pp. 91-97). Napoli, 1936, 8°.
- TARSITANO L. — Vedi DE' CONNO E.
- TROMPEO BENEDETTO. — Cenni biografici letti dal Dott. collegiato Cav. Giacomo Gibello. Torino, 1874, 8°, pp. 1-54.
- TROMPEO BENEDETTO. — Memoria sulla voce considerata nel triplice rapporto fisiologico-patologico-pratico. Torino, 1822, 8°, pp. 1-42.
- TROMPEO BENEDETTO. — Avvertimenti sul modo di antivenire e curare il cholera morbus prima dell'arrivo del medico. I. Sopra i sintomi che sogliono precederlo. (Estr. dalla « Voce della Libertà »). Torino, 1854, 8°, pp. 1-8.
- TROMPEO BENEDETTO. — Annotazioni sulla conferenza sanitaria internazionale convenuta in Parigi. (Estr. dalla « Gazzetta medica italiana - Stati Sardi ». Anno III, n. 2-3). Torino, 1852, 8°, pp. 1-19.
- TROMPEO BENEDETTO. — Villa Cristina. (Estr. dalla « Gazz. Piemontese », n. 167, s. d. t. 8°).
- TROMPEO BENEDETTO. — Saggio sull'utilità degli studi delle costituzioni mediche riguardanti specialmente la Provincia di Biella, letto alla R. Accad. Medico-Chirurgica di Torino nella tornata del 9 gennaio 1857. (Estr. dal « Giornale delle Scienze Mediche della R. Accad. Medico-Chirurgica di Torino ». Fasc. 1. 1857). Torino, 1857, 8°, pp. 1-25.
- TROMPEO BENEDETTO. — Dell'opportunità di conservare le tradizioni mediche a fine di ovviare ai pericoli degli eccessi dei novatori. (Estr. dal « Giornale della R. Accademia di Medicina di Torino ». Fasc. 9. 1862). Torino, 1862, 8°, pp. 1-14.
- TROMPEO BENEDETTO. — Cenni sull'igiene della gente di mare dedicati a S. A. R. il Duca di Genova. Torino, 1854, 8°, pp. 1-71.
- TROMPEO BENEDETTO. — Sunto della memoria di Eusebio Salverte sui rapporti della medicina colla politica. Torino, 1848, 8°, pp. 1-30.
- TROMPEO BENEDETTO. — Cenno sulla pellagra Landese, letto nella tornata del 15 giugno 1849 dell'Accad. R. Medico-Chirurgica di Torino. (Estr. dal « Giornale delle Scienze Mediche della R. Accademia Medico-Chirurgica di Torino »). Torino, s. d. 8°, pp. 1-10.
- TROMPEO BENEDETTO. — Sunto analitico del programma della conferenza sanitaria internazionale sedente in Parigi. (Estr. dal « Giornale delle Scienze mediche della R. Accademia Medico-Chirurgica di Torino ». Fasc. 20, 1851). Torino, 1851, 8°, pp. 1-9.
- TROMPEO BENEDETTO. — Prospetto statistico del Regio Manicomio di Torino nell'anno 1829. Torino, 1850, 8°, pp. 1-57.
- TROMPEO BENEDETTO. — Istruzione sul modo d'antivenire e curare il colera morbo prima dell'arrivo del medico. Torino, 1855, 8°, pp. 1-4.
- TROMPEO BENEDETTO. — Sul trentesimo Congresso scientifico di Francia tenutosi in Ciambri (Savoia) dal 10 al 20 agosto 1863. (Estr. dal « Giornale della Reale Accademia di Medicina di Torino ». N. 17. 1863). Torino, 1863, 8°, pp. 1-31.
- TROMPEO BENEDETTO. — Discorso pronunciato nella seduta del 29 aprile 1864. (Estr. dal « Giornale della R. Accademia di Medicina di Torino ». N. 11, 1864). Torino, 1864, 8°, pp. 1-6.
- TROMPEO BENEDETTO. — Necrologia. Il Conte Amedeo Avogadro di Quaregna

- e di Ceretto. (Estr. dal « Giornale delle Scienze Mediche della R. Accademia Medico-Chirurgica di Torino », fasc. XIV. 1856). Quaregna, 1856. 8°.
- TROMPEO BENEDETTO. — Sulla proposta della conferenza internazionale sanitaria di Costantinopoli. (Estr. dal Giornale « La Provincia ». N. 181). Torino, 1865. 8°. pp. 1-8.
- TROMPEO BENEDETTO. — Origine e progressi dell'igiene navale. (Estr. dal « Giornale della Reale Accademia di Medicina di Torino ». N. 3, 1865). Torino, 1865. 8°, pp. 1-9.
- TROMPEO BENEDETTO. — Cenno necrologico del Dottor Cav. Luigi Battaglia. S. d. t. 8°.
- TROMPEO BENEDETTO. — Sulla vita e sulle opere del Dottor Pietro Marianini. (Estr. dal « Cemento ». Anno III). Torino, 1855. 8°, pp. 1-15.
- TROMPEO BENEDETTO. — Statistica delle acque minerali d'Italia 1868. (Estr. dal « Giornale della R. Accademia di Medicina di Torino ». N. 13, 1869). Torino, 1869. 8°, pp. 1-9.
- TROMPEO BENEDETTO. — De la nécessité de créer dans chaque faculté de médecine une chaire de philosophie naturelle inductive etc. (Estr. dal « Giornale delle Scienze Mediche della R. Accademia Medico-Chirurgica di Torino »), sd. sl. 8°, pp. 1-12.
- TROMPEO BENEDETTO. — Cenno storico-statistico sul collegio Puteano in Pisa. Torino, 1870. 8°, pp. 1-14.
- TROMPEO BENEDETTO. — Notizie storiche e biografiche intorno al Conte Gian Francesco Fiocchetto. Torino, 1867. 8°, pp. 1-31.
- TROMPEO BENEDETTO. — Intorno ad alcuni animali reputati velenosi od altrimenti nocivi. (Estr. dal « Giornale della R. Accademia di Medicina di Torino ». N. 15, 1862). Torino, 1862. 8°, pp. 1-41.
- TROMPEO BENEDETTO. — Le trentième Congrès scientifique de France tenu à Chambéry (Savoie) du 10 au 20 août 1863. Turin, 1863. 8°, pp. 1-32.
- TROMPEO BENEDETTO. — Del colera. Lettera al direttore del giornale « La Provincia », S. l. e d. 8°.
- TROMPEO BENEDETTO. — Discorso. S. l. e d. 8°.
- TROMPEO BENEDETTO. — Instruction pour prévenir et traiter le Cholera-Morbus avant l'arrivée du Médecin. Nice, 1835. 8°.
- TROMPEO BENEDETTO. — Cenno sul Congresso generale d'igiene del Belgio. (Estr. dal giornale « Il Risorgimento ». N. 1475. 1852). Torino, 1852. 8°, pp. 1-4.
- TROMPEO BENEDETTO. — Cenni storico-statistici intorno all'ospedale della Pia Opera di S. Luigi Gonzaga. Torino, 1866. 8°, pp. 1-32.
- TROMPEO BENEDETTO. — Intorno al caso di letargo-mania del Prof. Timermans. (Estr. dal « Giornale della R. Accademia di Medicina di Torino ». N. 8. 1868). Torino, 1868. 8°, pp. 1-12.
- SCARPELLINI CATERINA. — Un omaggio alla memoria di Benedetto Trompeo (Estr. dal « Nuovo giornale illustrato universale ». Anno V). Roma, 1872. 8°, pp. 1-15.
- SCARPELLINI CATERINA. — Cenno necrologico intorno al prof. Pietro Peretti uno dei XL dei vecchi Lincei. (Estr. dal « Giornale Arcadico ». Tomo XXXVI). Roma, 1906. 8°, pp. 1-8.
- WATSON FLETCHER. — Meteor Craters (Reprinted from « Popular Astronomy ». Vol. XLIV), s. l. 1936. 8°, pp. 1-16.
- WHIPPLE F. L. — Vedi NORMAN D.
- WINANTS MARCEL. — Équation hyperbolique du troisième ordre à coefficients constants et de la catégorie III: résolution du problème de Cauchy par la méthode des approximations successives. (Extr. du « Bulletin de l'Académie royale de Belgique ». Classe des Sciences. Serie 5^e, t. XXI, pp. 283-293). Bruxelles, 1935. 8°.
- WINANTS MARCEL. — Résolution du problème (a_0 , IV, I). (Extr. du « Bulletin de l'Académie royale de Belgique ». Classe des Sciences. Series 5^e, t. XXI, pp. 376-384). Bruxelles, 1935. 8°.
- WINANTS MARCEL. — Résolution d'un problème aux limites relatif à l'équations $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$ (Extr. du « Bulletin de l'Académie royale de Belgique ». Classe des Sciences. Serie 5^e, t. XX, pp. 991-998). Bruxelles, 1934. 8°.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 17 maggio 1936 (anno XIV)

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Un contributo alla Cinematica Integrale.*
Nota di W. BLASCHKE, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. E. BOMPIANI.

Consideriamo nello spazio euclideo E_3 la figura formata da un punto x e 3 vettori unitari e_1, e_2, e_3 ortogonali fra di loro. La *densità cinematica* introdotta dal Poincaré per una tale figura si può fissare nel modo seguente:

$$(1) \quad D = \dot{s}_1 \dot{s}_2 \dot{s}_3 \dot{\sigma}_1 \dot{\sigma}_2 \dot{\sigma}_3.$$

\dot{s}_i significa la lunghezza differenziale dello scorrimento lungo l'asse e_i , $\dot{\sigma}_i$ l'angolo della rotazione infinitesimale attorno la retta, che passa per il punto x nella direzione e_i . Il prodotto dei nostri sei differenziali è alternante ⁽²⁾.

In un modo analogo s' introduce la *densità degli elementi lineari sopra una superficie*. Sia x il punto dell'elemento, e_3 il vettore unitario, che determina la direzione della tangente alla superficie. Completiamo $\{x; e_3\}$ a un sistema $\{x; e_1, e_2, e_3\}$ d'assi ortogonali, e_1 essendo da direzione della normale in x alla nostra superficie. Allora

$$(2) \quad E = \dot{s}_2 \dot{s}_3 \dot{\sigma}_1$$

(1) Nella seduta del 3 maggio 1936.

(2) Per la densità cinematica cfr. W. BLASCHKE, « Actualités Scientifiques et Industrielles », 252. Parigi, 1935.

si può usare come densità degli elementi lineari. Utilizzando le proprietà ben note del parallelismo di Levi-Civita si vede che: *E non cambia, quando si piega la superficie* ⁽¹⁾.

Ora consideriamo una figura più complicata, che è formata: da una superficie S_1 fissa, da una superficie mobile come un corpo rigido S_2 e finalmente da un punto x , che è mobile sulla curva d'intersezione $S_1 \cdot S_2$. Sia S_2 la densità cinematica della superficie S_2 e \dot{s} la proiezione dell'elemento lineare descritto dal punto x sulla tangente della curva $S_1 \cdot S_2$; si trova la *relazione fondamentale*

$$(3) \quad S_2 \dot{s} = \sin^2 \sigma \cdot E_1 E_2 \dot{\sigma}.$$

I prodotti sono alternanti; E_i significa la densità dell'elemento lineare formato dal punto x e dalla direzione della intersezione $S_1 \cdot S_2$ in x sulla superficie S_i ; σ è l'angolo delle due superficie nel punto comune x .

Questa nostra relazione (3) offre molte applicazioni attraenti. Integrando s'ottiene un risultato del Santaló ⁽²⁾:

$$\int L S_2 = 2 \pi^2 A_1 A_2,$$

ove L è la lunghezza della curva $S_1 \cdot S_2$ e A_i l'area di S_i . Anche altri risultati del Santaló s'ottengono e si generalizzano in questa maniera. Per esempio si trova una nuova dimostrazione per i risultati menzionati nella mia Nota precedente ⁽³⁾. Particolari darò altrove.

(1) In un modo più generale e intrinseco ho introdotta la densità E in una mia Nota: *Zur Variationsrechnung*. Hamburg. « Abhandlungen », 11 (1936), pp. 359-366, § 5.

(2) L. A. SANTALÓ, « Actualités », 357 (1936), p. 41 (97).

(3) *Cinematica Integrale*. Questi « Rendiconti », 1, 4, 36.

Matematica. — *Sulla integrazione, secondo Volterra di una matrice.* Nota di G. ZWIRNER, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Il sig. B. Hostinský in una sua Nota ⁽²⁾ ha considerato il sistema di equazioni integrali

$$(1) \quad \varphi_{ik} = \epsilon_{ik} + \int_s^t \left[\sum_j^r a_{ij}(u) \varphi_{jk}(s, u) \right] du \quad (\epsilon_{ii} = 1, \epsilon_{ik} = 0 \text{ per } i \neq k)$$

dove $a_{ik}(u)$ sono funzioni date limitate ed integrabili ⁽³⁾ e $\varphi_{ik}(s, t)$ funzioni incognite soddisfacenti alle condizioni $\varphi_{ik}(u, u) = \epsilon_{ik}$, dando per le funzioni $\varphi_{ik}(s, t)$, soluzioni del sistema (1), degli sviluppi in serie che mi propongo far vedere che altro non sono che gli sviluppi dati dal Peano in un suo lavoro sopra l'integrazione delle equazioni differenziali lineari ⁽⁴⁾.

Scriviamo infatti la (1) sotto la forma

$$(1') \quad B(s, t) = U + \int_s^t A(u) B(s, u) du,$$

dove $A(u)$ indica una matrice d'ordine n i cui elementi $a_{ik}(u)$ sono funzioni date limitate ed integrabili nell'intervallo (s, t) , U la matrice identica ed $B(s, t)$ una matrice dello stesso ordine i cui elementi $b_{ik}(s, t)$ sono funzioni incognite soddisfacenti alla condizione $B(u, u) = U$, e consideriamo il seguente sviluppo in serie del Peano

$$(2) \quad B(s, t) = U + \int_s^t A(u) du + \int_s^t \left[A(u_2) \int_s^{u_2} A(u_1) du_1 \right] du_2 + \\ + \int_s^t \left[A(u_3) \int_s^{u_3} \left(A(u_2) \int_s^{u_2} A(u_1) du_1 \right) du_2 \right] du_3 + \dots$$

(1) Nella seduta del 17 maggio 1936.

(2) B. HOSTINSKÝ, *Sur l'intégration des substitutions linéaires*. « Atti della Reale Accademia dei Lincei », ser. 6^a, 1935, pp. 221-225.

(3) Nella ipotesi della continuità delle funzioni $a_{ik}(u)$ il sistema (1) equivale, come verrà dimostrato nel seguito, ad un sistema di equazioni lineari differenziali.

(4) G. PEANO, *Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari*. « Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino », vol. XXII, 1884, pp. 437-444.

L'uniforme convergenza di tale sviluppo è stata dimostrata dal Peano, nella Nota citata, nella ipotesi della continuità degli elementi della matrice $A(u)$, dato che la matrice $B(s, t)$ doveva risultare l'integrale generale di un sistema di equazioni differenziali lineari. Si può però provare facilmente che tale serie converge uniformemente anche nella sola ipotesi della integrabilità degli elementi della matrice $A(u)$. Infatti, essendo le funzioni $a_{ik}(u)$ della matrice $A(u)$ limitate nell'intervallo (s, t) , detto m il loro massimo modulo ed indicata con $\|m\|$ la matrice d'ordine n e di elemento generico m , il $(p+1)$ -mo termine della serie (2) risulterà, in valore assoluto, minore di

$$\|m\|^p \frac{(t-s)^p}{p!} = \left\| m^p n^{p-1} \frac{(t-s)^p}{p!} \right\|.$$

Ora la serie di termine generale $m^p n^{p-1} \frac{(t-s)^p}{p!}$ è convergente e di somma $\frac{1}{n} e^{nm(t-s)}$, quindi si ha:

$$|B(s, t)| < \left\| \frac{1}{n} e^{nm(t-s)} \right\|$$

dove $|B(s, t)|$ indica la matrice che ha per elementi i moduli degli elementi della matrice $B(s, t)$.

Sostituendo, nell'equazione (1'), al posto di $B(s, t)$, il secondo membro della (2), si verifica che tale equazione risulta soddisfatta.

Il modo più naturale per giungere alla (2) consiste nell'integrare le successive equazioni:

$$B_0 = U, \quad B_1(s, t) = \int_s^t A(u) \cdot B_0 du, \quad B_2(s, t) = \int_s^t A(u) B_1(s, u) du, \dots$$

La (2) è appunto la serie data dal Hostinský⁽¹⁾.

2. Per ottenere lo sviluppo di $B(t, s)$ ($s < t$) basterà scambiare s con t nella formula (2). Si avrà:

$$(3) \quad B(t, s) = U - \int_s^t A(u) du + \int_s^t \left[A(u_2) \int_{u_2}^t A(u_1) du_1 \right] du_2 - \\ - \int_s^t \left[A(u_3) \int_{u_3}^t \left(A(u_2) \int_{u_2}^t A(u_1) du_1 \right) du_2 \right] du_3 + \dots$$

(1) Il HOSTINSKÝ dà, s'intende, lo sviluppo in serie di un elemento generico della matrice $B(s, t)$.

ossia, scrivendo u_i in luogo di u_{n-i+1}

$$(3') \quad B(t, s) = U - \int_s^t A(u) du + \int_s^t \left[A(u_1) \int_{u_1}^t A(u_2) du_2 \right] du_1 - \\ - \int_s^t \left[A(u_1) \int_{u_1}^t \left(A(u_2) \int_{u_2}^t A(u_3) du_3 \right) du_2 \right] du_1 + \dots$$

Moltiplicando le serie (2) e (3) si ottiene

$$(4) \quad B(s, t) \cdot B(t, s) = U$$

cioè la permutazione di s con t nella espressione della matrice $B(s, t)$ è equivalente all'inversione di tale matrice. Tale proprietà fu già rilevata dal Peano.

Indicato inoltre con u un punto interno all'intervallo (s, t) , si ha:

$$(5) \quad B(s, t) = B(u, t) \cdot B(s, u).$$

Relazione che si verifica facilmente moltiplicando le serie che danno gli sviluppi di $B(u, t)$ e $B(s, u)$.

3. L'equazione integrale

$$(6) \quad C(s, t) = U + \int_s^t C(s, u) \cdot A(u) du$$

ammette la soluzione

$$(7) \quad C(s, t) = U + \int_s^t A(u) du + \int_s^t \left[\int_s^{u_2} A(u_1) du_1 A(u_2) \right] du_2 + \\ + \int_s^t \left[\int_s^{u_3} \left(\int_s^{u_2} A(u_1) du_1 A(u_2) \right) du_2 A(u_3) \right] du_3 + \dots$$

ed anche per la funzione $C(s, t)$ valgono le relazioni

$$(8) \quad C(s, t) \cdot C(t, s) = U, \quad C(s, t) = C(s, u) \cdot C(u, t)$$

analoghe alle (4) e (5).

Le formule (3') e (7) mostrano inoltre che

$$(9) \quad B(t, s) = \bar{C}(s, t)$$

dove $\bar{C}(s, t)$ indica l'integrale della (6) relativo alla matrice i cui elementi sono $-a_{ik}(u)$. Per provare la (9) basta trasformare i termini della serie (3') con la formula di Dirichlet.

Le matrici $B(s, t)$ e $C(s, t)$ altro non sono che le matrici chiamate dal Volterra ⁽¹⁾ rispettivamente integrale sinistro e destro della matrice $A(u)$.

4. Le equazioni (1') e (6) non sono essenzialmente diverse. Se B_1 è la matrice trasposta di B , cioè la matrice il cui determinante è ottenuto da quello di B scambiando le orizzontali con le verticali, e se A_1 è la trasposta di A , dalla (1') si deduce

$$B_1(s, t) = U + \int_s^t B_1(s, u) \cdot A_1(u) du$$

che è una equazione analoga alla (6).

5. Se due matrici $A(u)$ e $A'(u)$, di elementi $a_{ik}(u)$ e $a'_{ik}(u)$, soddisfano alle n^2 relazioni

$$|a'_{ik}(u) - a_{ik}(u)| < \varepsilon,$$

dove ε è un numero positivo arbitrario, diremo che differiscono fra loro meno di ε e scriveremo

$$(10) \quad \|A' - A\| < \|\varepsilon\|.$$

Supponiamo ora che sussista la (10), che i moduli degli elementi della matrice A sieno minori di m , cioè, $\|A\| < \|m\|$ e determiniamo un limite superiore per la differenza degli integrali $B(s, t)$ e $B'(s, t)$ relativi alle due matrici $A(u)$ e $A'(u)$. Come vedemmo, il $(p+1)$ -mo termine della serie (2) risulta in valore assoluto più piccolo di $\left\| m^p n^{p-1} \frac{(t-s)^p}{p!} \right\| e$, perciò

$$\|B'(s, t) - B(s, t)\| < \|\varepsilon\| (t-s) + \left\| \sum_{p=2}^{\infty} [m + \varepsilon]^p - m^p \right\| n^{p-1} \frac{(t-s)^p}{p!}$$

ossia

$$(11) \quad \|B'(s, t) - B(s, t)\| < \left\| \frac{1}{n} e^{m(t-s)} (e^{\varepsilon(t-s)} - 1) \right\|.$$

Le relazioni (4), (5), (9) e (11) sono state dimostrate dal Hostinský, nel lavoro citato, per l'elemento generico della matrice $B(s, t)$.

6. Se il secondo membro dell'equazione (1') è derivabile rispetto a t si ottiene l'equazione equivalente

$$(12) \quad \frac{dB}{dt} = A \cdot B.$$

(1) V. VOLTERRA, *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari*. « Memoria della Società italiana delle Scienze », ser. 3^a, to. VI, n. 8, 1887.

Meccanica. — *Su un teorema di statica del sig. van den Dungen.* Nota di G. LAMPARIELLO, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. In una Nota dei « Comptes Rendus » (t. 202, pp. 282-284, 1936) dal titolo *Sur un nouveau principe de mécanique*, il sig. van den Dungen enuncia una proprietà generale dei sistemi meccanici retti da equazioni lineari, applicabile anche ad altri fenomeni fisici lineari.

Per quanto riguarda l'applicazione del principio alla statica, l'autore si limita a trattare una trave elastica su appoggio indeformabile.

L'interesse della Nota, reso ancor più vivo dal desiderio di sviluppare la dimostrazione ivi assai concisamente accennata, mi ha indotto a renderne espliciti i singoli passaggi logici, considerando lo schema tipico di un sistema olonomo ad un numero finito qualunque di gradi di libertà.

Ho potuto così mettere in luce che il principio di sollecitazione minima (o anche soltanto stazionaria), indicato dal sig. van den Dungen, cioè del minimo valore di una certa forza Q , richiede non soltanto un vincolo posizionale (conservazione della corrispondente coordinata lagrangiana q), ma altresì un vincolo energetico, cioè la conservazione (subordinatamente al vincolo posizionale) dell'energia interna del sistema.

2. Equazioni lagrangiane dell'equilibrio ⁽²⁾.

Alcuni richiami sono necessari.

Sia un sistema di quanti si vogliono punti P_i ($i = 1, 2, \dots, N$) sottoposto a vincoli olonomi con $n + 1$ gradi di libertà ($n > 1$).

Indicheremo con

$$q, q_1, q_2, \dots, q_n$$

le $n + 1$ coordinate lagrangiane e supporremo che il sistema sia intrinsecamente conservativo, ammettendo l'esistenza di un'energia interna $\Omega(q, q_1, \dots, q_n)$ dipendente soltanto dalla configurazione del sistema.

(1) Nella seduta del 3 maggio 1936.

(2) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, to. II, parte 1^a, cap. VI, § 2. Bologna, Zanichelli, 1926.

Se F_i è la forza esterna applicata al generico punto P_i le quantità

$$(1) \quad Q = \sum_i^N F_i \times \frac{\partial P_i}{\partial q}, \quad Q_b = \sum_i^N F_i \times \frac{\partial P_i}{\partial q_b} \quad (b = 1, 2, \dots, n)$$

rappresentano notoriamente le componenti lagrangiane della sollecitazione secondo le singole coordinate.

Ciò posto, se la Ω ammette un minimo effettivo nella configurazione

$$(C^0) \quad q = 0, \quad q_b = 0 \quad (b = 1, 2, \dots, n)$$

ivi c'è equilibrio *in assenza di forze esterne* e, per il teorema del Dirichlet, l'equilibrio è stabile. Si può dire che C^0 è uno *stato naturale* del sistema.

In questo stato, poichè la Ω è (in meccanica classica) per sua natura definita a meno di una costante additiva, riterremo $\Omega = 0$.

Se ora si applica al sistema una sollecitazione esterna, di cui le (1) sono le componenti e queste non si annullano tutte in C^0 , l'equilibrio si stabilirà, in generale, in una configurazione C , distinta da C^0 , definita dalle equazioni di Lagrange

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Omega}{\partial q} = Q \\ \frac{\partial \Omega}{\partial q_b} = Q_b \end{cases} \quad (b = 1, 2, \dots, n).$$

La funzione Ω ha, per ipotesi, un minimo effettivo in C^0 .

Ci riferiremo al caso generale in cui tale minimo può essere accertato sui termini di 2° ordine nelle q_b ($b = 1, 2, \dots, n$). Allora in un intorno abbastanza piccolo di questa configurazione, cui intendiamo limitarci, la Ω si ridurrà addirittura ad una forma quadratica definita positiva delle coordinate.

Per il nostro scopo, conviene decomporre Ω nella somma di tre parti

$$\Omega = \Omega' + \Omega'' + \Omega''',$$

essendo

$$\Omega' = \frac{1}{2} \sum_{h,k}^n a_{hk} q_h q_k, \quad a_{hk} = a_{kh}$$

l'energia parziale indipendente da q ,

$$\Omega'' = \frac{1}{2} a q^2$$

quella indipendente dalle q_b ($b = 1, 2, \dots, n$) e

$$\Omega''' = q \sum_b^n b_b q_b$$

l'energia parziale, che può dirsi di *accoppiamento* della q con le q_b ($b = 1, 2, \dots, n$).

I coefficienti

$$a, b_h, a_{hk} \quad (h, k = 1, 2, \dots, n)$$

sono i valori in C^0 delle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial q^2}, \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q \partial q_h}, \quad \frac{\partial^2 \Omega'}{\partial q_h \partial q_k} \quad (h, k = 1, 2, \dots, n).$$

Ciò posto, dalle (2), moltiplicando ambo i membri successivamente per q, q_1, \dots, q_n e sommando, si ha

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q} q + \sum_1^n \frac{\partial \Omega}{\partial q_h} q_h = Qq + \sum_1^n Q_h q_h$$

e quindi, per il teorema di Euler sulle funzioni omogenee,

$$(3) \quad \Omega = \frac{1}{2} Qq + \frac{1}{2} \sum_1^n Q_h q_h.$$

Questa importante relazione lega l'energia interna del sistema agli elementi statici caratteristici della configurazione di equilibrio nello stato deformato.

3. Immaginiamo ora che il sistema sia sottoposto ad una sollecitazione di componenti

$$Q = Q^*, \quad Q_h = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n),$$

di cui solo la prima è non nulla.

Converrà chiamare *semplice* una sollecitazione di questo tipo.

Ad essa corrisponderà una configurazione C^* di equilibrio spostato per la quale i valori $q^*, q_h^* (h = 1, 2, \dots, n)$ delle coordinate sono dati dal sistema

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q} = Q^*$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_h} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

È essenziale osservare che non può essere

$$q^* = 0,$$

poichè altrimenti dalla (3) seguirebbe

$$\Omega = 0 \quad \text{in } C^*$$

e ciò è impossibile per il carattere definito di Ω .

In C^* , l'energia parziale Ω' assume il valore

$$\Omega'^* = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n a_{hh} q_h^* q_h^*$$

e noi considereremo accanto alla C^* , le ∞^{n-1} configurazioni C , tali che siano soddisfatte le condizioni

- a) $q = q^*$
- b) $\Omega' = \Omega'^*$.

Le C si possono pensare ottenute spostando il sistema a partire da C^0 compatibilmente con le condizioni a), b), le quali rappresentano due vincoli, posizionali, il secondo dei quali ha anche significato energetico.

Dalle (2) risulta definita nella generica C una sollecitazione Σ che può dirsi *equilibrante* il sistema nella configurazione C medesima.

Ebbene, vale il seguente

TEOREMA. — Se Q è la prima componente della sollecitazione Σ equilibrante il sistema in C , in C^* la Q è stazionaria.

Infatti, consideriamo, com'è nella natura del teorema, quelle configurazioni C che sono infinitamente vicine a C^* e che si possono quindi immaginare ottenute da questa applicando uno spostamento virtuale.

Dall'equazione dei lavori virtuali

$$-\delta\Omega + Q\delta q + \sum_{h=1}^n Q_h \delta q_h = 0,$$

in cui $-\delta\Omega$ denota il lavoro delle forze interne, segue, in particolare, nel passaggio da C^* alla generica C infinitamente vicina,

$$(4) \quad \delta\Omega = 0,$$

essendo, in C^* , $Q_h = 0$ ($h = 1, 2, \dots, n$) e inoltre $\delta q = 0$ per la a).

Ma dalla (3), variando ambo i membri, in virtù della condizione a) e, tenendo conto ancora una volta, che in C^* le Q_h ($h = 1, 2, \dots, n$) sono nulle, si ha

$$\delta\Omega = \frac{1}{2} q^* \delta Q + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n q_h \delta Q_h,$$

Dunque, la (4) diviene

$$q^* \delta Q + \sum_{h=1}^n q_h \delta Q_h = 0.$$

Ora è facile riconoscere che

$$(5) \quad \sum_{h=1}^n q_h \delta Q_h = 0,$$

in virtù della condizione b).

A tale scopo si osservi che

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_h} = \frac{\partial \Omega'}{\partial q_h} + \frac{\partial \Omega''}{\partial q_h} = \frac{\partial \Omega'}{\partial q_h} + q b_h \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

e quindi, per le (2),

$$Q_h = \frac{\partial \Omega'}{\partial q_h} + q b_h \quad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Variando ambo i membri, in quanto, per a), $\delta q = 0$, si ha, essendo le b costanti,

$$\delta Q_h = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \Omega'}{\partial q_h \partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^n a_{hk} \delta q_k.$$

L'equazione (5) è dunque

$$\sum_{h,k=1}^n a_{hk} q_h \delta q_k = 0,$$

cioè

$$\delta \Omega' = 0,$$

la quale esprime appunto che lo spostamento virtuale da C^* a C lascia invariata l'energia parziale Ω' .

Concludiamo che, spostando il sistema a partire da C^* compatibilmente con le condizioni a), b), si ha

$$(6) \quad \delta Q = 0.$$

Quest'equazione dimostra che sussiste in C^* la stazionarietà della sollecitazione Q .

Si può attribuirle una forma più espressiva, dicendo che

ogni sollecitazione semplice Q^ rende stazionaria la componente Q , corrispondente alla stessa coordinata q , in confronto di tutte le altre sollecitazioni che determinano, in condizioni di equilibrio, lo stesso spostamento della q e che lasciano invariata l'energia parziale Ω' spettante a C^* .*

OSSERVAZIONE. — Nella Nota del sig. van den Dungen si parla più precisamente di minimo della forza Q , il che equivale matematicamente alla condizione che sia positiva la variazione seconda $\delta^2 Q$ (oltre quella di annullamento della variazione prima δQ).

Io non sono riuscito a riconoscere che, tenendo conto dei due vincoli $a), b)$, sia sempre $\delta^2 Q > 0$; perciò ho creduto di poter affermare per ora soltanto la stazionarietà della Q .

Meccanica. — *Dispersione di un vortice in un mezzo plastico.* Nota di B. FINZI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. U. CISOTTI.

In una Nota recente ⁽³⁾ ho stabilito le equazioni indefinite delle rotazioni plastiche, dei movimenti cioè di un corpo plastico e viscoso, i cui punti descrivono circonferenze coassiali, mentre ogni quantità locale dipende soltanto dal tempo e dalla distanza dall'asse. Supponendo che la densità sia la stessa in ogni luogo, e che le forze esterne di campo siano conservative, mi è stato facile, nella Nota ricordata, calcolare il movimento stazionario. Mi propongo ora di studiare il moto variabile, sviluppando più particolarmente il caso relativo alla dispersione di un vortice.

1. *Rotazioni plastiche variabili.* — Nelle rotazioni plastiche la velocità periferica v , la pressione p , e, se le forze esterne di campo sono conservative, il potenziale (uniforme) U dipendono soltanto dal tempo t e dalla distanza r dall'asse; mentre, qualora il moto avvenga come se il mezzo fosse incomprimibile, la densità ρ è costante. Se indichiamo con h la costante di plasticità e con μ il coefficiente di viscosità, le equazioni indefinite delle rotazioni plastiche considerate si scrivono così ⁽⁴⁾:

$$(1) \quad \rho r \frac{\partial v}{\partial t} = \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) \pm 2 h,$$

$$(2) \quad -\rho \frac{v^2}{r} = \frac{\partial (U - p)}{\partial r};$$

e nella (1) l'addendo $\pm 2 h$ deve essere assunto col segno superiore o col segno inferiore, asseconda che

$$(3) \quad \eta = r \frac{\partial v}{\partial r} - v$$

è positivo o negativo.

(1) Per le precauzioni da prendere in casi simili, cfr., per es., le citate *Lezioni* di T. LEVI-CIVITA ed U. AMALDI, to. II, parte 1^a, pp. 44)-450.

(2) Nella seduta del 17 maggio 1936.

(3) Questi «Rendiconti», vol. XXIII, 1936.

(4) Loc. cit., formula (14).

L'equazione lineare differenziale del secondo ordine (1), nell'unica funzione incognita $v = v(r, t)$, permette, insieme alle condizioni iniziali e di contorno, di calcolare il movimento; dopo di che la (2) fornisce p con una semplice quadratura.

Osserviamo che l'equazione (1) differisce da quella relativa alle rotazioni viscosi (quando il potenziale delle forze esterne di campo è uniforme) per l'aggiunta del termine costante $\pm 2h$, dovuto alla plasticità⁽¹⁾. Ne segue che l'integrale generale di (1) potrà esprimersi aggiungendo all'integrale generale dell'equazione delle rotazioni viscosi il termine $\pm \frac{2ht}{\rho r}$. Precisamente:

$$(4) \quad v = u(r, t) \pm \frac{2ht}{\rho r},$$

essendo u integrale generale dell'equazione differenziale seguente:

$$(5) \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right).$$

La determinazione del segno imprecisato nella (4) è identica alla analoga determinazione relativa alla (1).

È noto come l'integrale generale di (5) possa esprimersi mediante funzioni di ordine uno di Bessel e di Neumann. Se ν è il coefficiente cinematico di viscosità (tale che $\nu\rho = \mu$), se $H(\lambda)$ e $K(\lambda)$ sono funzioni, *a priori* arbitrarie, della variabile λ , se A e B sono costanti, *a priori* arbitrarie, si ha:

$$(6) \quad u = \int_0^\infty e^{-\nu\lambda^2 t} [H(\lambda) J_1(\lambda r) + K(\lambda) N_1(\lambda r)] d\lambda + Ar + \frac{B}{r}.$$

Gli elementi arbitrari che compaiono in (6) debbono essere determinati tenendo conto delle condizioni iniziali e di contorno.

2. *Dispersione di un vortice.* — Consideriamo ora il movimento caratterizzato da una singolarità lungo l'asse, mentre all'infinito regna la quiete: è questo lo schema con il quale si può rappresentare un vortice nel mezzo considerato.

(1) La (1) coincide con l'equazione delle rotazioni soltanto viscosi; qualora però il potenziale delle forze esterne di campo non sia uniforme (CALDONAZZO, questi «Rendiconti», vol. V, 1927, p. 152) ed ammetta come costante di polidromia $\pm 2h$. Essa rientra pure nell'equazione delle rotazioni soltanto viscosi, dovute all'azione di forze di campo non conservative, simmetriche rispetto all'asse e agenti tangenzialmente al moto (SONA, «Atti R. Ist. Veneto», vol. XCII, 1932-33, p. 641).

Una prima semplicissima rappresentazione del movimento ci è offerta dalla (6), ponendo in essa $H = K = A = 0$ e $2\pi B = I$, ossia

$$(7) \quad u = \frac{I}{2\pi r}.$$

Ponendo questa soluzione in (4), otterremo un movimento, il quale inizialmente coincide con quello indotto da un ordinario vortice di intensità I , ed invadente tutto lo spazio. Se $I > 0$, nell'intervallo di tempo compreso fra gli istanti $t = 0$ e $t = \tau$,

$$(8) \quad \tau = \frac{\rho I}{4\pi h},$$

risulta:

$$(9) \quad v = \frac{I}{2\pi r} - \frac{2ht}{\rho r},$$

conformemente al fatto che, per (3), η risulta negativo nell'intervallo di tempo considerato. Per $t = \tau$, da (9) risulta $v = 0$; mentre per $t > \tau$ non è possibile, per (3), costruire nessuna soluzione mediante la (4) e la (7).

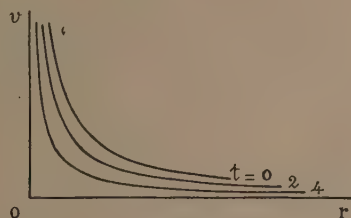


Fig. 1.

Potremo dunque descrivere così il movimento: esso coincide inizialmente con quello irrotazionale indotto da un ordinario vortice di intensità I ; va via via spegnendosi, sempre però invadendo tutto lo spazio, e corrisponde ad un vortice d'intensità sempre minore, eguale a $I - 4\pi\rho^{-1}ht$, fino a che, nell'istante $t = \tau$, il moto s'arresta ovunque. A partire da questo istante, cioè dopo un tempo finito dall'inizio del movimento, la quiete regna ovunque.

La soluzione precedente è ottenuta supponendo che inizialmente tutto lo spazio sia invaso dal movimento. Ora, se si pensa il movimento iniziale ottenuto dalla degenerazione di una originaria deformazione elastica, l'effettivo movimento plastico deve, all'istante $t = 0$, essere contenuto entro un cilindro

di raggio b eguale al raggio d'influenza plastica, mentre per $r \geq b$ il mezzo plastico è in quiete⁽¹⁾.

La soluzione che ubbidisce alle condizioni precedenti è tosto ottenuta da (6), ponendo in essa $H = K = 0$, $2\pi B = I \Rightarrow 2\pi b^2 A$, ossia

$$(10) \quad u = \frac{I}{2\pi r} - \frac{I r}{2\pi b^2}.$$

Ponendo questa soluzione in (4), otterremo un movimento, il quale coincide inizialmente, entro un cilindro di raggio b , con quello definito da (10). Se $I > 0$, nell'intervallo di tempo compreso fra gli istanti $t = 0$ e $t = \tau$ (essendo τ ancora definito dalla (8)), risulta:

$$(11) \quad v = \frac{I}{2\pi r} - \frac{I r}{2\pi b^2} - \frac{2bt}{\rho r},$$

conformemente al fatto che, per (3), η risulta negativo nell'intervallo di tempo considerato.

La (11) definisce il movimento, nell'intervallo di tempo $(0, \tau)$, entro un cilindro di raggio variabile β , tale che

$$(12) \quad \beta^2 = b^2 - \frac{4\pi b^2 bt}{\rho I}.$$

Il raggio di questo cilindro, per $t = 0$, è eguale a b , e si annulla per $t = \tau$. Fuori del cilindro precedente e sul cilindro stesso il mezzo plastico è immobile, perchè, nella regione ove $r > \beta$, è possibile realizzare, in ogni istante, una

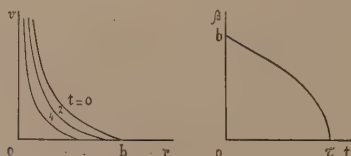


Fig. 2.

deformazione elastica, per la quale il corrispondente invariante quadratico del tensore degli sforzi sia minore di $2b^2$ ⁽²⁾.

Potremo dunque descrivere così il movimento: esso avviene inizialmente entro un cilindro di raggio b , e lungo l'asse vi è una singolarità (vortice) di caratteristica I; va via via spegnendosi, e via via va riducendosi il raggio del cilindro, internamente al quale il moto non è nullo. Per contrapposto

(1) Il raggio d'azione plastica risulta così eguale al raggio del cilindro entro il quale l'invariante quadratico del tensore degli originari sforzi elastici superava $2b^2$, mentre esternamente ad esso questo invariante non superava tale limite (loco primo cit., n. 3).

(2) Loco primo cit., n. 1.

la regione in quiete, inizialmente esterna al cilindro di raggio b , si estende sempre più, invadendo la regione in movimento, fino a che, nell'istante $t = \tau$, ogni moto è spento. A partire da questo istante, cioè dopo un tempo finito dall'inizio del movimento, la quiete regna ovunque.

Le due soluzioni (9) e (11) ora considerate fanno intervenire la plasticità del mezzo, ma non la sua viscosità, la quale ultima si manifesta soltanto negli sforzi che, noto il movimento, si potrebbero facilmente calcolare ⁽¹⁾. Diamo ora una soluzione la quale, anche cinematicamente, dipenda dalla viscosità del mezzo.

Poniamo in (6) H costante, $K = 0$, e scegliamo le costanti A e B in modo che $I = -2\pi b^2 A = 2\pi (B + H)$. Otterremo ⁽²⁾:

$$(13) \quad u = \frac{I}{2\pi r} - \frac{H}{r} e^{-r^2/4\nu t} - \frac{Ir}{2\pi b^2}.$$

La (4), valendosi di (13), rappresenterà un movimento, il quale coincide inizialmente, entro un cilindro di raggio b , con quello definito da (10). Se le costanti I , B ed H sono positive, nell'intervallo di tempo compreso fra gli istanti $t = 0$ e $t = \tau - \frac{\rho H}{2b}$ (essendo τ ancora definito dalla (8)), risulta:

$$(14) \quad v = \frac{I}{2\pi r} - \frac{H}{r} e^{-r^2/4\nu t} - \frac{Ir}{2\pi b^2} - \frac{2bt}{\rho r},$$

conformemente al fatto che, per (3), η è negativo.

La velocità data da (14) si annulla inizialmente per $r = b$, e si annulla, al tempo t , per i valori $r = \beta(t)$, essendo β soluzione dell'equazione

$$(15) \quad \frac{I}{2\pi} - \frac{2bt}{\rho} - \frac{I\beta^2}{2\pi b^2} = H e^{-\beta^2/4\nu t}.$$

Perchè, in modo analogo al caso precedentemente discusso, una rotazione plastica sia effettivamente rappresentata dalla (14) per $r < \beta$, mentre, per

(1) Determinata, mediante (2), la pressione, basta valersi all'uopo delle formule (1), (12) e (13) del loco primo cit.

(2) Basta osservare che

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2 \nu t} J_1(\lambda r) d\lambda = \frac{1}{r} (1 - e^{-r^2/4\nu t})$$

(cfr. MÜLLER, *Einf. in die Theorie der zähen Flüssigkeiten*. Leipzig, 1932, p. 120).

La soluzione (13), per $2\pi H = I$ e $b = \infty$, coincide con quella atta a rappresentare la dispersione di un vortice in un fluido viscoso (Oseen, «Arkiv för matem. ast. och fysik», 7, 1911 e *Hydrodynamik*. Leipzig, 1927, p. 86; cfr. LAMB, *Hydrodynamics*. Cambridge, 1924, p. 559; cfr. MÜLLER, loc. cit., pp. 104-110).

$r \geq \beta$, sia $v = 0$, bisogna che in ogni istante, appartenente all'intervallo di tempo compreso fra l'istante iniziale e quello in cui si spegne ogni moto, la (15) ammetta un'unica soluzione reale e positiva⁽¹⁾. Si rilevi che in tal modo la soluzione (14) rappresenta il movimento, nella regione ove $r < \beta$, in un intervallo di tempo compreso fra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = T$ in cui finisce il movimento, ed in corrispondenza al quale β si annulla. A differenza di quanto avviene nei casi precedentemente discussi, questo istante T non coincide con l'istante τ , ma risulta $T \leq \tau$, e precisamente

$$(16) \quad T = \tau - \frac{\rho H}{2b}.$$

La condizione poi in virtù della quale, in ogni istante t compreso fra 0 e T , la (15) ammette un'unica soluzione reale e positiva, limita i valori della costante positiva H , *a priori* arbitraria. Risulta:

$$(17) \quad H \leq \frac{\nu \rho l^2}{2\pi^2 b^2 h + 2\pi \nu \rho l}.$$

Il movimento potrà dunque essere descritto in modo del tutto analogo a quello precedentemente considerato, corrispondente alla soluzione (11), con l'avvertenza però che la (14) definisce effettivamente il movimento entro

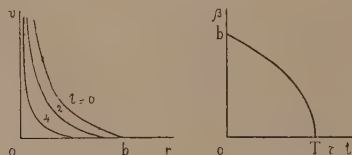


Fig. 3.

un cilindro di raggio decrescente β nell'intervallo di tempo $(0, T)$, e che l'istante in cui regna ovunque la quiete non è l'istante τ , ma bensì l'istante $T \leq \tau$, dato dalla (16).

Osserviamo che la soluzione ora considerata, retta dalla (14), costituisce un'estensione di quella retta dalla (11), con la quale si identifica per $v = 0$ (e quindi, per (17), $H = 0$); mentre a sua volta la soluzione retta dalla (11)

(1) Due soluzioni cosiffatte, β_1 e $\beta_2 > \beta_1$, lascierebbero pensare ad una prima regione, ove $r > \beta_2$, in quiete e in istato di coazione elastica, una seconda, ove $\beta_1 < r < \beta_2$, in movimento plastico, una terza, ove $r < \beta_1$, ancora in quiete e pur essa in istato di coazione elastica. Questo schema non può però fisicamente realizzarsi, perchè, entro la terza regione (se β_1 non è nullo), l'invariante quadratico del tensore degli sforzi, dovuti alla pura deformazione elastica che ivi esisterebbe, non risulterebbe certamente ovunque minore di $2b^2$ (cfr. loco primo cit., n. 1).

costituisce un'estensione di quella retta dalla (9), e si identifica con questa ultima per $b \rightarrow \infty$.

La figura 3 indica come varia la velocità, e si riferisce ad un valore di H eguale al secondo membro della (17). In questo caso, per $b \rightarrow 0$ e $b \rightarrow \infty$ (se $b^2 h \rightarrow 0$, risulta $2\pi H \rightarrow I$, $T \rightarrow \infty$), si trova:

$$(18) \quad v = u = \frac{I}{2\pi r} (1 - e^{-r^2/4vt}),$$

così che la soluzione (14) (per b non nullo e b finito) si presenta come una estensione, che tiene conto della plasticità, della nota soluzione che dà la dispersione di un vortice in un fluido viscoso (1).

Meccanica. — *Su certi integrali capaci di risolvere il problema dinamico delle travi inflesse.* Nota di E. FROLA, presentata (2) dal Socio G. FUBINI.

Considero una trave, comunque vincolata agli estremi, il cui nucleo, o funzione di influenza, relativa ad uno dei piani principali di cui mi occupo, sia $N(x, \xi)$ definito nel quadrato del piano $x\xi$, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq \xi \leq l$ se l è la lunghezza della trave. Considero ancora un carico $p(x, t)$ agente nel punto generico di ascissa x dell'asse della trave, al tempo generico t , nel piano di inflessione di cui mi occupo; carico definito nel piano xt , nella semi striscia $t \geq 0$, $0 \leq x \leq l$.

Sia $y(x, t)$ una possibile inflessione dinamica della trave sotto il nostro carico, applico a $y(x, t)$ ed a $N(x, \xi)$ il teorema di reciprocità di Lord Rayleigh: se indico con $M(x)$ la massa distribuita sulla trave, avrò:

$$(1) \quad y(x, t) = \int_0^l N(x, \xi) M(\xi) \ddot{y}(\xi, t) d\xi + \int_0^l N(x, \xi) p(\xi, t) d\xi$$

indico la derivata fatta secondo il tempo non più con un punto in alto, ma con il simbolo D ; potrò scrivere simbolicamente:

$$(1 \text{ bis}) \quad y(x, t) = D^2 \int_0^l N(x, \xi) y(\xi, t) d\xi + \int_0^l N(x, \xi) p(\xi, t) d\xi$$

ora la (1 bis), se penso D^2 come un qualunque parametro, è un'equazione integrale di Fredholm di 2ª specie il cui nucleo:

(1) OSEEN, LAMB, MÜLLER, loc. cit.

(2) Nella seduta del 17 maggio 1936.

$$Q(x, \xi) = N(x, \xi) M(\xi)$$

è il solito delle vibrazioni libere delle travi, ed ammettente come risolvete:

$$N(x, \xi, \lambda) = \sum \frac{M(\xi) \varphi_m(x) \varphi_m(\xi)}{\lambda + \lambda_m}$$

essendo soddisfatte le note relazioni

$$\int_0^l M(s) \varphi_m(s) \varphi_n(s) ds = \begin{cases} 1 & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} ; \quad \lambda_m > Km^4 \quad (K \text{ opportuna cost.}).$$

Al posto di λ scrivo D^2 , ottenendo il nucleo simbolico:

$$\sum \frac{M(\xi) \varphi_m(x) \varphi_m(\xi)}{D^2 + \lambda_m}$$

resta da attribuire significato alla soluzione simbolica di (1 bis)

$$(2) \quad y(x, t) = \int_0^l N(x, \xi) p(\xi, t) d\xi -$$

$$- D^2 \int_0^l \sum \frac{M(\xi) \varphi_m(\xi) \varphi_m(x)}{\lambda_m + D^2} \int_0^l N(\xi, s) p(s, t) ds, d\xi$$

supponendo di poter invertire le operazioni di \int e di \sum si giunge facilmente a:

$$(2 \text{ bis}) \quad y(x, t) = \sum \frac{p_m(t) \varphi_m(x)}{\lambda_m} - \sum \frac{D^2}{D^2 + \lambda_m} p_m(t) \cdot \frac{\varphi_m(x)}{\lambda_m};$$

$$p_m(t) = \int_0^l p(st) \varphi_n(s) ds.$$

Considero l'espressione:

$$\frac{D^2}{D^2 + \lambda_m} p_m(t)$$

e ne cerco il valore. Per stabilire tale valore restano da fissare le condizioni all'inizio del moto: penso che all'istante $t = 0$, in cui incomincia ad agire il carico, la trave sia in quiete. Sarò dunque condotto a dare a tali termini un significato, per cui la soluzione sarà:

$$(2 \text{ ter}) \quad y(x, t) = \sum \frac{\varphi_m(x)}{\sqrt{\lambda_m}} \int_0^t d\tau \int_0^l \sin \sqrt{\lambda_m} (t - \tau) \cdot \varphi_m(\xi) p(\xi, \tau) d\xi.$$

Essendo le $\varphi_m(x)$ tutte quante limitate in $(0, l)$ e potendosi trovare una opportuna costante (indipendente da m) cui rimangano tutte inferiori, se suppongo $p(x, t)$ anche esso limitato in ogni punto della sua striscia di esistenza, sarà per il comportamento dei λ_m la serie di (2^{ter}) uniformemente ed assolutamente convergente in ogni punto della semi-striscia $0 \leq t, 0 \leq x \leq l$.

Potrò invertire l'operatore di \int con quello di \sum e ricavare:

$$(3) \quad y(x, t) = \int_0^t dr \int_0^l G[x, \xi, (t-r)] p(\xi, r) d\xi$$

dove:

$$G[x, \xi, (t-r)] = \sum \frac{\varphi_m(x) \varphi_m(\xi)}{\sqrt{\lambda_m}} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_m} (t-r).$$

Resta da vedere se (3) è effettivamente la soluzione cercata: se soddisfa alla nostra equazione integrodifferenziale, il che facilmente si verifica sfruttando la totale convergenza delle serie trovate e delle serie dei nuclei di partenza, e se soddisfa alle condizioni all'inizio del moto.

Che per $t=0$ sia $y=0$ è più che evidente. Resta la seconda condizione:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} y(x, t) \right]_{t=0} = 0.$$

Calcoliamo la derivata prima rispetto a t di $y(x, t)$ avremo:

$$\begin{aligned} \dot{y}(x, t) &= \left[\int_0^t d\tau \int_0^l G[x, \xi, (t-\tau)] p(\xi, \tau) d\xi \right]'_t = \\ &= \int_0^t d\tau \int_0^l \dot{G}[x, \xi, (t-\tau)] p(\xi, \tau) d\xi \end{aligned}$$

ed integrando per parti avremo:

$$\begin{aligned} \dot{y}(x, t) &= + \int_0^l G(x, \xi, t) p(\xi, 0) d\xi - \\ &\quad - \int_0^t d\tau \int_0^l G[x, \xi, (t-\tau)] \dot{p}(\xi, \tau) d\xi \end{aligned}$$

essendo $G(x, \xi, 0) = 0$:

Se, come potremo supporre sempre, esiste nell'intorno destro di $t = 0$ la derivata prima del carico sec. t , allora le condizioni all'inizio del moto sono soddisfatte.

Cerco il significato analitico della $G[x, \xi, (t - \tau)]$, per far ciò studio la $G(x, \xi, t)$ dove ho scritto t al posto di $(t - \tau)$.

Essa soddisfa all'equazione (1 bis) resa omogenea, come è evidente sostituendo e facendo anche qui giocare la totale convergenza delle serie; in più essa soddisfa per $t = 0$ alla $G = 0$.

Proviamo ora a derivare rispetto al tempo e a porre $t = 0$, la derivazione termine a termine, benchè non sia affatto lecita dal punto di vista analitico, potrà darci un'indicazione atta a definire la $G(x, \xi, t)$ considerando lo sviluppo come puramente simbolico. Avremo:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} G(x, \xi, t) \right]_{t=0} = \sum \varphi_m(x) \varphi_m(\xi)$$

la serie non converge in alcun modo ed è perciò priva di significato analitico rigoroso, vediamo di interpretarla egualmente. Pensiamo una funzione del tipo impulsivo, che sia nulla in ogni punto di $(0, l)$ eccetto in ξ , e che in tal punto abbia tale singolarità da far saltare il suo integrale di $\frac{1}{M(\xi)}$. Se chiamo con $\delta(x, \xi)$ la funzione impulsiva (il cui integrale salta in ξ di 1) tale funzione potrà scriversi:

$$\sigma(x, \xi) = \frac{\delta(x, \xi)}{M(\xi)}.$$

Calcolo ora i coefficienti dello sviluppo di $\sigma(x, \xi)$ in serie delle $\varphi_m(\xi)$ essi saranno

$$a_m(x) = \int_0^l \sigma(x, \xi) M(\xi) \varphi_m(\xi) d\xi = \int_0^l \delta(x, \xi) \varphi_m(\xi) d\xi = \varphi_m(x)$$

sarà dunque a parte ogni convergenza:

$$\sigma(x, \xi) = \frac{\delta(x, \xi)}{M(\xi)} = \sum \varphi_m(x) \varphi_m(\xi)$$

cioè il medesimo sviluppo simbolico della $\left[\frac{\partial}{\partial t} G(x, \xi, t) \right]_{t=0}$.

Siamo dunque spinti ad affermare che la $G(x, \xi, t)$ è una soluzione dell'equazione integrale omogenea da noi studiata, cioè dell'equazione delle vibrazioni libere della trave, che si annulla per $t = 0$, e tale che la sua

derivata rispetto t per $t = 0$, è nulla in ogni punto di $(0, l)$ eccetto in ξ dove ha una singolarità di tal fatta che:

$$\int_0^l M(x) \left[\frac{\partial}{\partial t} G(x, \xi, t) \right]_{t=0} dx = 1.$$

Da tale definizione analitica traspare il significato fisico della $G(x, \xi, t)$: essa è una vibrazione libera che per $t = 0$ ha inflessione nulla e velocità pure nulla in ogni suo punto eccetto che in ξ , pur avendo in quello stesso istante quantità di moto eguale ad 1; è dunque la vibrazione causata da un urto istantaneo di impulso unitario sul punto ξ supposta la trave inizialmente in quiete.

A conclusione si può affermare che: data una trave in quiete all'istante $t = 0$, e dato il carico che da tale istante agisce su di essa, il moto della trave si ottiene trasformando la funzione carico a mezzo di un operatore, che rispetto all'ascissa spaziale agisce come un operatore alla Fredholm, e che rispetto al tempo agisce alla Volterra. Il nucleo di tale operatore, avente il significato fisico ed analitico di cui si è detto, si può immediatamente costruire note le autofunzioni e gli autovalori della vibrazione libera della trave.

Meccanica. — *Sulla equazione* $(C(x)y'(x))' = -\lambda M(x) \sin y(x)$; $y(0) = y(1) = 0$. Nota di E. FROLA, presentata ⁽¹⁾ dal Socio G. FUBINI.

Alcuni problemi di instabilità elastica si traducono in termini analitici a mezzo della:

$$(1) \quad (C(x)y'(x))' = -\lambda M(x) \sin y(x) \quad ; \quad y(0) = 0, y(1) = 0.$$

L'importanza dei problemi connessi alla (1) mi spinge alla ricerca di risultati per tale equazione, che, per $C(x)$ e $M(x)$ eguali a costanti, si riduce all'equazione del pendolo (per oscillazioni finite) risolubile, come è noto, a mezzo di funzioni ellittiche. Qui suppongo $C(x)$ continuo derivabile e sempre maggiore di zero, in $(0, 1)$; e per $M(x)$ mi basta imporre, oltre alla positività, la integrabilità R in $(0, 1)$.

Invece di (1) posso considerare l'equazione integrale non lineare

$$(2) \quad y(x) = \lambda \int_0^1 N(x, \xi) \sin y(\xi) d\xi$$

che la traduce con le condizioni agli estremi, purchè sia:

$$(3) \quad N(x, \xi) = M(\xi) C(x, \xi)$$

essendo G la funzione di Green per la:

$$(C(x)y'(x))' = 0 \quad ; \quad y(0) = 0, y(1) = 0.$$

Nel corso di questo studio mi occuperò talvolta direttamente di (1), talora di (2), avvertendo che i risultati trovati nella seconda eventualità avranno una portata assai più ampia, potendo estendersi ad equazioni integrali del tipo (2) il cui nucleo non sia però limitato dalle (3).

Nel corso poi della trattazione mi riferirò sovente alle

$$(1 \text{ bis}) \quad (C(x)y'(x))' = -\lambda M(x) y(x) \quad ; \quad y(0) = y(1) = 0$$

$$(2 \text{ bis}) \quad y(x) = \lambda \int_0^1 N(x, \xi) y(\xi) d\xi$$

che chiamerò rispettivamente la (1) e la (2) linearizzate.

(1) Nella seduta del 17 maggio 1936.

Incomincio col constatare che la (1) come la (2) sono evidentemente soddisfatte dalla soluzione banale:

$$y(x) = 0,$$

per enunciare subito il:

TEOREMA I. — L'equazione (2), qualunque sia il nucleo, purchè regolare, non ha nel campo reale altra soluzione che quella banale $y = 0$, se λ non è in valore assoluto più grande, al più eguale, all'autovalore di modulo minimo del nucleo $|N(x, \xi)|$, (per la (1) al più piccolo autovalore di (1 bis));

Osservato che, restando nel campo reale, è sempre:

$$|\operatorname{sen} y(x)| \leq 1,$$

dalla (2) segue:

$$|y(x)| \leq \lambda \int_0^1 N(x, \xi) d\xi,$$

se si è posto:

$$\mathfrak{N}(x, \xi) = |N(x, \xi)|.$$

D'altra parte, sempre nel campo reale,

$$|\operatorname{sen} y(x)| \leq |y(x)|$$

per cui:

$$|y(x)| \leq \lambda^2 \left| \int_0^1 \mathfrak{N}(x, \xi) d\xi \right| \int_0^1 \mathfrak{N}(\xi, \xi_1) d\xi_1 \cdot d\xi = \lambda^2 \left| \int_0^1 \mathfrak{N}_1(x, \xi) d\xi \right|,$$

dove: $\mathfrak{N}_1(x, \xi)$ è l'iterato primo di $\mathfrak{N}(x, \xi)$. Proseguendo in queste sostituzioni si trova facilmente:

$$|y(x)| \leq |\lambda|^{n+1} \int_0^1 \mathfrak{N}_n(x, \xi) d\xi,$$

dove $\mathfrak{N}_n(x, \xi)$ è l'iterato ennesimo di $\mathfrak{N}(x, \xi)$. Dunque $|y(x)|$ resta sempre più piccolo, al più eguale, all'integrale rispetto ξ , da zero ad 1, del termine generico dello sviluppo in serie di potenze di λ del nucleo risolvete di $\mathfrak{N}(x, \xi)$. Ma tale sviluppo, se $|\lambda| < |\lambda_1|$, (λ_1 primo autovalore di $\mathfrak{N}(x, \xi)$) è convergente, ed il suo termine generico tende necessariamente allo zero al crescere di n ; dunque la $y(x)$ è identicamente nulla. (Nel caso di (1) il nucleo essendo positivo si identifica con il suo valore assoluto ed il λ_1 della dimostrazione è proprio il primo autovalore della (1 bis)).

Dal punto di vista delle applicazioni della (1) ai problemi di instabilità elastica, quello che più interessa è trovare una limitazione superiore per λ , al disotto della quale non vi sia altra soluzione che la nulla; ora

il teorema I ci dice che per tale ricerca la sostituzione usuale della (1 bis), linearizzata, alla (1) è più che legittima e che il primo autovalore di (1 bis) ci fornisce il limite cercato.

Assicurato nell'intorno dell'origine $\lambda = 0$, un intervallo $(-|\lambda_1|, +|\lambda_1|)$ tale che al variare in esso di λ non vi può essere soluzione reale per la (1) e per la (2) diversa da zero, mi propongo ora di trovare se al variare di λ fuori di tale intervallo, sorgano delle soluzioni, della (1) o della (2), le quali non siano identicamente nulle. Tra tali soluzioni mi interesso di quelle che per un dato valore di λ sorgono⁽¹⁾ dalla soluzione banale per biforcazione. Tali soluzioni saranno chiamate semplicemente rami. Intenderò la $y(x|\lambda)$ come funzione di x e di λ ; come funzione di x essa sarà continua e munita di derivata prima continua, in tutto $(0, 1)$; e come funzione di λ sarà una funzione analitica.

Penso che vi sia un valore λ^* di λ per cui la soluzione banale possa avere un punto di biforcazione tale che la $y(x|\lambda)$ come funzione di λ abbia un punto critico algebrico, sia cioè nell'intorno di $\lambda = \lambda^*$:

$$y(x|\lambda) = (\lambda - \lambda^*)^\mu [y_0(x) + (\lambda - \lambda^*) y_1(x) + (\lambda - \lambda^*)^2 y_2(x) + \dots]$$

essendo μ , razionale, dato da:

$$(4) \quad \mu = \frac{p}{q} \quad (p, q \text{ interi}).$$

Se $y(x|\lambda)$ è esprimibile con (4), una sua qualsiasi potenza intera $[y(x|\lambda)]^b$ sarà esprimibile con:

$$(4 \text{ bis}) \quad (y(x, \lambda))^b = (\lambda - \lambda^*)^{b\mu} \sum_{r=0}^{\infty} (\lambda - \lambda^*)^r y_r^{[b]}(x),$$

dove $y_r^{[b]}(x)$ è un coefficiente che, pur con qualche materiale difficoltà, posso sempre calcolare in funzione di y_0, y_1, \dots, y_r .

(1) L'equazione (2) non è che un caso particolare di quella più generale studiata dallo SCHMIDT (« Math. Ann. », 65) e ripresa da HAMMERSTEIN (« Acta Mathem. », 54)

$$(a) \quad y(x) = \lambda \int_0^1 N(x, \xi) H(y(\xi), \xi) d\xi.$$

Solo però i risultati di Hammerstein, e precisamente quello che la (a) non può su di una sua soluzione $y(x|\lambda)$ presentare biforcazione se λ non è autovalore di

$$\chi(x) = \lambda \int_0^1 N(x, \xi) \frac{\partial}{\partial y} H(y(\xi)|\xi) \chi(\xi) d\xi,$$

interessano il presente lavoro, in quanto con essi si può dimostrare parte del teorema II, e da essi si deve partire per la dimostrazione del teorema V.

La serie tra parentesi in (4 bis) rappresenterà nel suo cerchio di convergenza una funzione, olomorfa in detto cerchio, che chiamo:

$$(5) \quad y^{[h]}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} y_r^{[h]}(x) (\lambda - \lambda^*)^r.$$

Da (4), (4 bis), (5) si ricava subito:

$$(6) \quad \text{sen } y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-)^m}{(2m+1)!} (\lambda - \lambda^*)^{(2m+1)\mu} g^{[2m+1]}(x|\lambda).$$

Posso allora facilmente scrivere sostituendo (4) e (6) in (2):

$$(7) \quad [\lambda - \lambda^*]^\mu g^{[1]}(x|\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-)^m}{(2m+1)!} (\lambda - \lambda^*)^{(2m+1)\mu} \int_0^1 N(x, \xi) g^{[2m+1]}(\xi|\lambda) d\xi.$$

Allora il secondo membro di (7) deve in $\lambda = \lambda^*$ avere una singolarità dovuta ad un fattore $[\lambda - \lambda^*]^\mu$: deve perciò essere:

$$(2m+1)\mu = \mu + h \quad (h \text{ intero})$$

da cui

$$\mu = \frac{p}{2} \quad (p \text{ intero});$$

si può senz'altro porre $p = 1$, perchè il fatto di essere eventualmente diverso non porta ad altro di essenziale che all'ammettere eguali a zero un certo numero dei primi $y_m(x)$.

Posto in (7) $\mu = \frac{1}{2}$ vengo ad avere:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} y_0(x) &= \lambda^* \int_0^1 N(x, \xi) y_0(\xi) d\xi. \\ y_1(x) &= \lambda^* \int_0^1 N(x, \xi) y_1(\xi) d\xi - \lambda^* \int_0^1 N(x, \xi) \frac{y_0^{[3]}(\xi)}{3!} d\xi + \\ &\quad + \int_0^1 N(x, \xi) y_0(\xi) d\xi, \\ y_2(x) &= \lambda^* \int_0^1 N(x, \xi) y_2(\xi) d\xi - \lambda^* \int_0^1 N(x, \xi) \left[\frac{y_1^{[3]}(\xi)}{3!} - \frac{y_0^{[5]}(\xi)}{5!} \right] d\xi + \\ &\quad + \int_0^1 N(x, \xi) \left[y_1(\xi) - \frac{y_0^{[3]}(\xi)}{3!} \right] d\xi, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

Suppongo dapprima λ^* diverso da un parametro di $N(x, \xi)$, allora la prima delle (8) ci impone:

$$y_0(x) = 0.$$

La seconda avrà il termine noto:

$$-\lambda^* \int_0^1 N(x, \xi) \frac{y_0^{[3]}(\xi)}{3!} d\xi + \int_0^1 N(x, \xi) y_0(\xi) d\xi,$$

nullo, perchè $y_0^{[3]}(x) = [y_0(x)]^3$. Così anche $y_1(x)$ sarà nullo, e, come vedremo, tutte le successive $y_r(x)$. Infatti penso nulli i primi $y_r(x)$: dico che deve essere pure nullo $y_{n+1}(x)$; essendo la $(n+2)$ esima delle (8):

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= \lambda^* \int_0^1 N(x, \xi) y_{n+1}(\xi) d\xi - \\ &- \lambda^* \int_0^1 N(x, \xi) \left[\frac{y_n^{[3]}}{3!} - \frac{y_n^{[5]}}{5!} + \dots (-)^{n+1} \frac{y^{[2n+3]}}{[2n+3]!} \right] d\xi + \\ &+ \int_0^1 N(x, \xi) \left[y_n + \dots (-)^{n+1} \frac{y^{[2n+1]}}{(2n+1)!} \right] d\xi \end{aligned}$$

in essa il termine noto è omogeneo nei coefficienti delle potenze di $(\lambda - \lambda^*)$ di grado inferiore, al più eguale ad n , che compaiono in (4) e (4 bis), ed è quindi nullo, perchè se sono nulli i primi n coefficienti di (4), altrettanto accade per i primi n di ciascuna delle (4 bis). Dunque è $y_{n+1}(x) = 0$.

Segue che se λ^* è diverso da un parametro di $N(x, \xi)$ non vi può essere alcuna biforcazione del tipo cercato ⁽¹⁾.

Pongo ora:

$$\lambda^* = \lambda_r$$

dove λ_r è un autovalore della (2 bis); se, come suppongo, sono verificate le (3), (o se pur non essendo verificate le (3) ci troviamo a poter ammettere quanto segue relativamente al rango di λ_r), il rango di λ_r sarà 1, esisterà per la prima delle (8) la possibilità di una soluzione non nulla solo del tipo:

$$y_0(x) = K f_r(x)$$

dove $f_r(x)$ è la autofunzione di (2 bis) relativa all'autovalore λ_r , normalizzata dalla:

$$\int_0^1 M(x) f_r^2(x) dx = 1.$$

(1) Loc. cit.

Allora, essendo λ_r un autovalore, la 2^a delle (8) non potrà avere soluzione se il suo termine noto non sarà ortogonale a $M(x)f_r(x)$; cioè, dato che:

$$y_0^{[3]}(x) = [y_0(x)]^3,$$

se non sarà:

$$\frac{k^3}{3!} \lambda_r \int_0^1 dx \int_0^1 f_r(x) M(x) C(x, \xi) M(\xi) (f_r(\xi))^3 d\xi = \frac{k}{\lambda_r}.$$

Dalla scritta relazione di ortogonalità posso determinare K in:

$$K = \pm \sqrt{\frac{6}{\lambda_r}} \left[\int_0^1 [f_r(\xi)]^4 M(\xi) d\xi \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Il metodo usato alla determinazione di $y_0(x)$ si estende a quella di $y_1(x)$ infatti la seconda delle (8) avrà una soluzione del tipo:

$$y_1(x) = f(x) + K_1 f_r(x),$$

dove $f(x)$ è facilmente calcolabile, e $f_r(x)$ è di nuovo l'autofunzione di prima, e K_1 un arbitrario coefficiente che cerchiamo di determinare.

Sostituendo l'espressione di $y_1(x)$ nella terza delle (8), ed imponendo nuovamente la condizione di ortogonalità del termine noto di tale equazione a $M(x)f_r(x)$, imposizione necessaria alla risolubilità, vengo ad avere in K_1 una equazione questa volta lineare (come è facile convincersene considerando l'espressione di

$$y_1^{[3]} = 3 y_0 y_1$$

che è l'unico termine, oltre y_0 , in cui compare K_1 ; determino così con K_1 anche univocamente $y_1(x)$.

Il procedimento può seguire, portando alla successiva determinazione delle successive $y_r(x)$, in modo del tutto analogo a quello ora brevemente esposto per la determinazione di $y_1(x)$. Qui però mi interessa soprattutto concludere il seguente

TEOREMA II. — Ogni equazione (2) il cui nucleo abbia solo autovalori λ_r di rango 1, presenta sulla soluzione banale dei punti di biforcazione in corrispondenza ai valori parametrici λ_r ; tali biforcazioni danno origine a dei rami, che intesi come funzioni analitiche di λ , hanno, per ogni x in $(0, 1)$, degli zeri di ordine $1/2$, annullantisi come

$$(\lambda - \lambda_r) \sqrt{\frac{6}{\lambda_r}} \left[\int_0^1 [f_r(\xi)]^4 M(\xi) d\xi \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot f_r(x),$$

dove $f_r(x)$ è l'autofunzione normalizzata di (2 bis) relativa a λ_r .

Nel caso della (I) il ramo sorgente dal primo autovalore di (I bis) è rappresentato in figura.

Sempre nel caso di (I) sui rami, che numereremo col numero d'ordine del relativo autovalore, voglio stabilire alcuni teoremi.

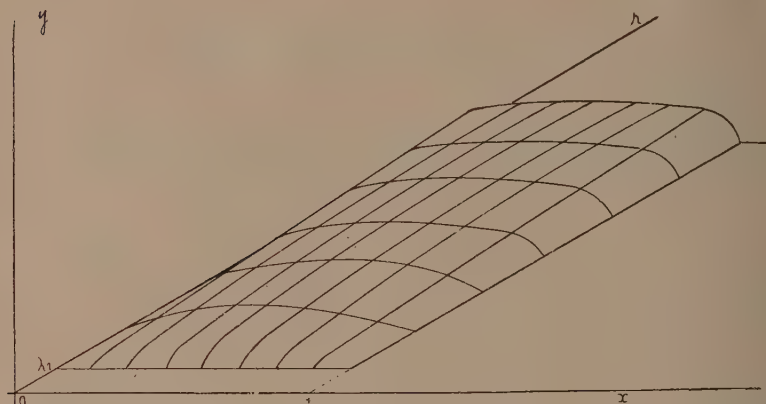


Fig. 1.

TEOREMA III. — Il numero di zeri che ciascun ramo possiede come funzione di x per un dato valore di λ , è per ciascun ramo indipendente da λ . Nessuno di tali zeri può avere molteplicità superiore ad 1.

Incomincio dalla seconda parte del teorema: infatti se, per un certo valore di λ , ci fosse uno zero con molteplicità anche solo 2 in ξ , sarebbe

$$y(\xi) = y'(\xi) = 0;$$

ma allora la $y(x)$ dovrebbe essere identicamente nulla; perchè in ξ soddisferebbe condizioni di Cauchy omogenee, e per il teorema di unicità sulle equazioni differenziali con condizioni di Cauchy, non può differire da:

$$y(x) = 0$$

che soddisfa la (I) e le condizioni di Cauchy in ξ . Ciò premesso passo alla prima parte del teorema. Basta constatare che per la continuità di y in λ , e della sua derivata prima, secondo x , in x e λ , e per il fatto che:

$$y(0) = 0 \quad : \quad y(1) = 0.$$

il numero degli zeri non potrà mai variare senza che si presenti uno zero di molteplicità superiore ad uno.

Dal teorema II, e dal teorema III, segue, tenendo presente che la prima autofunzione di (I bis) è tutta dello stesso segno in $(0, 1)$, il seguente:

Corollario. Il primo ramo della soluzione di (1) non ha nessun punto di zero, può quindi sempre essere pensato positivo.

TEOREMA IV. — La soluzione di (1) in ciascun suo ramo si mantiene inferiore a π , almeno per i valori di λ compresi tra il valore critico per cui sorge il ramo ed il primo eventuale valore per cui vi può essere biforcazione sul ramo stesso.

Suppongo che nell'intervallo considerato dal teorema IV vi sia un λ^* per cui $y(x|\lambda^*) < \pi$; ciò premesso se la y venisse a superare π , per ovvie ragioni di continuità potrei trovare un λ ed un α ed un β per cui:

$$y(\alpha|\lambda) = \pi \quad ; \quad y(\beta, \lambda) = \pi \quad ; \quad 2\pi > y(x, \lambda) > \pi \quad (\alpha < x < \beta).$$

Moltiplico la (1) per y e integro ambo i membri tra α e β ; avrò:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (C(x)y')' y \, dx = -\lambda \int_{\alpha}^{\beta} M(x) \operatorname{sen} y(x) y(x) \, dx,$$

da cui integrando per parti il primo membro, e tenendo conto che:

$$[C(x)y']_{\alpha}^{\beta} = -\lambda \int_{\alpha}^{\beta} M(x) \operatorname{sen} y(x) \, dx,$$

posso ricavare:

$$\int_{\alpha}^{\beta} C(x) y'^2(x) \, dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} M(x) \operatorname{sen} y(x) (y(x) - \pi) \, dx.$$

Ma essendo ovviamente i due membri di segno diverso deve essere impossibile l'esistenza di un tale λ . Per i nostri rami la soluzione ha nell'intorno del punto di biforcazione uno zero, dunque il teorema è pienamente dimostrato.

In particolare il primo ramo ha per ogni valore di λ inferiore a quello di un eventuale punto di biforcazione sul ramo stesso, i suoi valori compresi tra zero e π , e volge sempre la concavità verso il basso.

TEOREMA V. — Sul primo ramo non esistono punti di biforcazione.

I risultati citati nelle note ci dicono che non vi sono punti di biforcazione per una soluzione della (2) se λ non è parametro della equazione omogenea in ζ :

$$(10) \quad \zeta(x) = \lambda \int_0^1 M(\xi) G(x, \xi) \cos y(\xi|\lambda) \cdot \zeta(\xi) \, d\xi; \quad \zeta(0) = 0; \quad \zeta(1) = 0.$$

Se traduco per la (1) ottengo che non vi sono biforcazioni se λ non è autovalore di

$$(10 \text{ bis}) \quad (C(x)\zeta'(x))' = -\lambda M(x) \cos y(x|\lambda) \cdot \zeta(x).$$

Moltiplico in croce (I) e (IO bis), da cui ricavo:

$$(11) \quad \chi [Cy']' \cos y = [C\chi']' \sin y.$$

Se λ è autovalore di (IO bis) esisterà un intervallo $(0, \alpha)$ in cui:

$$\chi(\alpha) = 0; \quad \chi'(\alpha) < 0; \quad \chi(x) > 0 \quad (0 < x < \alpha);$$

Integro (11) tra zero e α ed avrò:

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \chi(Cy')' \cos y \, dx &= [Cy' \chi \cos y]_0^\alpha - \int_0^\alpha Cy' \chi' \cos y \, dx + \int_0^\alpha Cy'^2 \chi \sin y \, dx = \\ &= \int_0^\alpha (C\chi')' \sin y \, dx = [C\chi' \sin y]_0^\alpha - \int_0^\alpha C\chi' y' \cos y \, dx, \end{aligned}$$

in definitiva:

$$\int_0^\alpha Cy'^2 \chi \sin y \, dx = \sin y(\alpha) \chi'(\alpha).$$

Ora tenendo conto dei segni di $\sin y$ e χ in $(0, \alpha)$ vedo che il primo membro è essenzialmente positivo; mentre il secondo negativo, al più nullo, ne segue che non può esistere un tale intervallo $(0, \alpha)$, ma essendo il segno di χ arbitrario deve la χ essere identicamente nulla, cioè λ non può mai essere autovalore della (IO bis).

Discende ora che la restrizione dell'enunciato del teorema IV per il primo ramo può essere soppressa.

TEOREMA VI. — Il primo ramo della soluzione di (I) è funzione crescente di λ .

Derivando (I) rispetto λ , e ponendo $\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \eta$ ho:

$$(C\eta')' = -\lambda M \cos y \, \eta - M \sin y$$

moltiplicando in croce con (I):

$$(12) \quad (C\eta')' \sin y = (Cy')' \cos y \cdot \eta + (Cy')' \sin y.$$

Suppongo esistano un α ed un β tali che:

$$\eta(\alpha) = 0; \quad \eta(\beta) = 0 \quad \eta(x) < 0 \quad (\alpha < x < \beta) \quad \eta'(\beta) > 0 \quad \eta'(\alpha) < 0,$$

integro (12) da α a β , e con integrazioni per parti ricavo:

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta Cy'^2 \eta \, dx &= - \int_\alpha^\beta (Cy')' \sin y \, dx + C(\beta) \eta'(\beta) \sin y(\beta) - \\ &\quad - C(\alpha) \eta'(\alpha) \sin y(\alpha). \end{aligned}$$

Il primo membro per le ipotesi fatte è negativo, il secondo positivo, dunque non potendo esistere l'intervallo (α, β) la η deve essere sempre positiva, il che dimostra il teorema.

Meccanica. — *Vibrazioni indotte da carichi inerti e molleggiati in moto su di un ponte.* Nota di G. KRALL, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Nota ⁽²⁾ apparsa su questi « Rendiconti » ho impostate le equazioni del moto, trasversale nel senso ordinariamente inteso, di una qualunque struttura da ponte percorsa da un carico P , mobile con velocità uniforme v , inerte e parzialmente molleggiato. In una Nota ⁽³⁾ successiva, con riferimento alla circostanza, su cui si soffermano tutte le ricerche intorno a questo fondamentale problema della dinamica dei ponti, in cui la massa e quindi la inerzia del carico è trascurabile, ho tratto una limitazione superiore per le elongazioni del moto vibratorio. Su questa limitazione qui ci attarderemo, da un lato per perfezionarla nell'ambito delle possibili velocità dell'esercizio ferroviario, dall'altro, per trarre alcuni apprezzamenti quantitativi, utili per la considerazione del caso generale, di cui al titolo, che passiamo ad intraprendere.

Arriveremo a risultati non privi d'interesse che realizzano un progresso sensibile sulle conoscenze già acquisite in questo campo di ricerche ⁽⁴⁾ per merito del Bleich e del Timoshenko particolarmente.

Accanto alle formule definitive pei limiti dell'effetto d'inerzia delle masse direttamente applicate (ruote, assi) e di quelle elasticamente sospese, valide utilmente per strutture di tipo qualunque, daremo anche gli spostamenti in funzione del tempo o del posto sul piano di corsa, per ponti a travate semplicemente appoggiate, nella forma più accessibile alla tabellazione.

Quanto alle conclusioni sostanziali della nostra ricerca, si compendiano nei seguenti risultati:

1. Un carico mobile P , qualunque ne sia la velocità nel campo $0 \leq v \leq \infty$ provoca uno spostamento $w_{\max}(x, t)$ nel punto generico di coordinata x , contenuto dalla limitazione

$$(1) \quad w_{\max}(x) \leq P \sqrt{\frac{l}{2} c(x, x) \int_0^1 \omega(x, x) dx},$$

(1) Nella seduta del 17 maggio 1936.

(2) *Sulle equazioni del moto vibratorio di un ponte percorso da carichi inerti e molleggiati.* Questi « Rendiconti », fasc. 2 (1936).

(3) *Limiti per le vibrazioni di un ponte qualunque percorso da carichi mobili con velocità uniforme.* Questi « Rendiconti », fasc. 2 (1936).

(4) BLEICH, *Theorie und Berechnung der eisernen Brücken.* Springer, Berlin, 1924 e TIMOSHENKO, *Technische Schwingungslehre.* Springer, Berlin (1932).

$0 \leq x \leq l$ essendo il campo di variabilità, $c(x, \xi)$ lo spostamento in x , trasversale al piano stradale, provocato in condizioni statiche dal carico $P = l$ in $x = \xi$ (o viceversa), $\omega(x, \xi)$ la rotazione provocata in x dal carico $P = l$ in $x = \xi$ (o viceversa).

2. Se è nota la 1ª vibrazione fondamentale (che è l'unica facilmente calcolabile) si può e si usa studiare il moto vibratorio trattando il problema come ad un solo grado di libertà.

L'errore $\Delta w(x, t)$ commesso, nel problema che ci occupa, è contenuto dalla limitazione

$$(2) \quad \Delta w(x) \leq \sqrt{\frac{l}{2} \left(c(x, x) - \frac{u^2(x)}{\sigma^2} \right) \int_0^l \left(w(x, x) - \frac{\left(\frac{dw}{dx} \right)^2}{\sigma^2} \right) dx},$$

$u = u(x)$ essendo la 1ª autofunzione, σ il corrispondente autovalore, della equazione integrale omogenea, che sintetizza notoriamente il comportamento vibratorio del sistema, dipendentemente dalla funzione di influenza $c(x, \xi)$ e da quella delle masse $\mu = \mu(x)$, precisamente,

$$(3) \quad u(x) = \sigma^2 \int_0^l \mu(\xi) c(x, \xi) u(\xi) d\xi.$$

Per il caso dei ponti a travate semplicemente appoggiate, si constaterà, a titolo di apprezzamento numerico, che questo errore è inferiore al 7,5 % del massimo fornito dalla (1).

3. Se della massa $M = P : g$ del carico P , una parte αM ($\alpha < 1$) è direttamente applicata alla struttura portante (ruote, assi) ed il resto, $(1 - \alpha) M$ è sospeso elasticamente, ove si ponga $c^2 = 1 : \delta$, con δ = spostamento che la forza $P = 1$ provoca nel suo senso d'azione sulla sospensione in questione, si può affermare:

a) che lo spostamento additivo $\Delta_\alpha w(x)$ dovuto all'inerzia di αM è contenuto dal limite

$$(4) \quad \Delta_\alpha w(x) \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{\alpha M}{l \mu_{\min}} \sqrt{\frac{c(x, x)}{c_{\text{med}}}} \cdot w_{\max}$$

w_{\max} essendo il massimo, con riferimento alla coordinata $x^{(1)}$, calcolato con la (1), dello spostamento prodotto dal solo effetto di peso e velocità.

(1) In generale basta porre $x = \frac{l}{2}$.

b) che lo spostamento additivo $\Delta_{1-x} w(x)$ dovuto all'inerzia delle masse $(1-x)M$ elasticamente sospese, è limitato dalla

$$(5) \quad \Delta_{1-x} w(x) \leq \pi^2 \frac{\sqrt{c(x, x) \cdot c_{\text{med}}}}{\delta} \frac{v}{\sigma} w_{\text{max}}.$$

In queste due relazioni (4) e (5), c_{med} è il valore medio di $c(x, x)$, quindi

$$C_{\text{med}} = \frac{1}{l} \int_0^l c(x, x) dx,$$

v è, a meno del fattore $1:2\pi$, la frequenza delle masse sospese, precisamente

$$(6) \quad v = \sqrt{\frac{1}{\delta \cdot (1-x)M}}.$$

Nel materiale mobile ferroviario, si ha generalmente

$$\frac{v}{2\pi} = 2,40 \text{ sec}^{-1}.$$

Infine μ_{min} è il minimo di $\mu = \mu(x)$, praticamente abbastanza prossimo a μ_{med} .

Da queste relazioni estremamente semplici si trae, in base ad una sommaria ispezione della tabella ¹⁾ qui appresso riportata — ciò che del resto

(1) Posto lo spostamento $c(x, x)$ che il carico $P = 1$ provoca nel suo senso d'azione nella forma $c(x, x) = c_0 \cdot 16 \left(\frac{x}{l}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$, indicate con v_k le velocità critiche di cui diremo in seguito, con riferimento ai dati per μ_0 , E , I in funzione di l , ordinari in tecnica dei ponti, si ha:

l	4	6	10	15	20	25	50	100	150	m
$\mu_0 \cdot g$	1,10	1,20	1,42	1,69	1,96	2,23	3,02	4,37	5,06	ton. m ⁻¹
v_k	1152	1210	1368	1350	1440	1440	1692	1944	2160	km h ⁻¹
c_0	0,0772	0,0962	0,1042	0,1368	0,1439	0,1536	0,1613	0,1639	0,1777	cm. ton. ⁻¹
σ	251	176	119	78,5	62,8	50,3	29,5	16,9	12,6	sec ⁻¹

Ricordiamo che la frequenza, cioè il numero di oscillazioni nell'unità di tempo, vale $\sigma:2\pi$.

in linea intuitiva, come ha fatto il Bleich, si può riconoscere con opportune schematizzazioni:

1) che l'effetto delle masse applicate può esser rilevante per ponti di piccola luce e che per questi si impone quindi la sospensione elastica;

2) che pei ponti di grande luce la sospensione diventa inessenziale.

Accanto a queste limitazioni, pel caso delle travate, poniamo alla fine gli spostamenti $\Delta_x w_{\max}$ e $\Delta_{1-x} w_{\max}$ in funzione di t , o se si vuole, essendo $x = vt$, in funzione di x .

La tabellazione di queste funzioni può dare tutti i ragguagli interessanti il costruttore.

Ciò posto, dimostriamo brevemente queste asserzioni.

All'uopo cominciamo col rilevare che, per il moto trasversale provocato da P , mobile con velocità v , si ha per l'elongazione $w(x, t)$ del punto x al tempo t ,

$$(7) \quad w(x, t) = \sum_1^{\infty} u_q(x) \cdot \varphi_q,$$

con le u_q soluzioni della (3) in corrispondenza agli autovalori σ_q e le φ_q soddisfacenti l'equazione,

$$\ddot{\varphi}_q + \sigma_q^2 \varphi_q = P \cdot u_q(vt),$$

quindi eguali a

$$\varphi_q = \frac{P}{\sigma_q} \int_0^t u_q(vt') \sin \sigma_q(t - t') dt'$$

$\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$ essendo i valori iniziali, che competono alla quiete.

Per questo sviluppo, attraverso maggiorazioni rilevate nella citata Nota siamo giunti alla limitazione

$$(8) \quad w(x) \leq \sqrt{\frac{l}{2} \sum_1^{\infty} \frac{u_q^2(x)}{\sigma_q^2} \int_0^l \sum_1^{\infty} \frac{\left(\frac{du_q}{dx}\right)^2}{\sigma_q^2}}$$

dalla quale, in base alle relazioni fondamentali

$$(9) \quad c(x, x) = \sum_1^{\infty} \frac{u_q^2(x)}{\sigma_q^2}, \quad \omega(x, x) = \sum_1^{\infty} \frac{\left(\frac{du_q}{dx}\right)^2}{\sigma_q^2},$$

siamo pervenuti alla (i).

Ciò premesso notiamo che, quando si studia il moto vibratorio di una struttura elastica con intenti che vanno oltre la semplice nozione di limitazioni superiori si considera, quasi sempre, il solo contributo del primo

termine dello sviluppo (7), cioè si considerano, come si suol dire, le vibrazioni secondo la sola armonica fondamentale.

Ora basta osservare il primitivo aspetto (8) della (1) per concludere che, in base alle (9), l'errore commesso viene dato senz'altro dalla relazione (2) c. d. d.

Di che ordine è tale errore?

Per il caso di una trave semplicemente appoggiata di lunghezza l , modulo d'elasticità E , momento d'inerzia I , massa per unità di lunghezza μ_0 , si ha

$$(10) \quad u(x) = \sqrt{\frac{2}{l\mu_0}} \sin \frac{\pi}{l} x, \quad \frac{du}{dx} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{2}{l\mu_0}} \cos \frac{\pi}{l} x, \quad \sigma^2 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{EI}{\mu_0}$$

e, notoriamente,

$$c(x, x) = \frac{1}{l} \frac{x^2(l-x)^2}{3EI}, \quad \int_0^l \omega(x, x) dx = \frac{l^2}{6EI}.$$

Segue dalla (2), se si pone per brevità $\xi = x : l$,

$$\Delta w(x) \leq \frac{l^3}{EI} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\xi^2(1-\xi)^2}{3} - \frac{2}{\pi^4} \right) \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^4} \right)}.$$

Per $x = \frac{l}{2}$, cioè per la mezzeria, si trae, rilevando che lo spostamento

statico vale $w_s\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{l^3}{48EI}$ e $w_{\max}\left(\frac{l}{2}, t\right) \leq 2w_s\left(\frac{l}{2}\right)$,

$$\Delta w\left(\frac{l}{2}\right) < 0,15 w_s\left(\frac{l}{2}\right) = 0,075 w_{\max}\left(\frac{l}{2}\right).$$

Quanto al moto secondo la vibrazione fondamentale si ha, arrestandosi al 1° termine della (7), scritta con riflesso alle specificazioni (10), inerenti alle u ,

$$(11) \quad w(x, t) = \frac{2}{l\mu_0} P \sin \frac{\pi}{l} x \frac{\sin \lambda t - \frac{\lambda}{\sigma} \sin \sigma t}{\sigma^2 - \lambda^2}, \quad \lambda = \frac{\pi v}{l}.$$

Nel caso cosiddetto della risonanza, cioè per $\sigma = \lambda$ ovvero per $v = l : \frac{\pi}{\sigma} = v_k$ la (11) diviene

$$(11a) \quad w(x, t) = \frac{2}{l\mu_0} P \sin \frac{\pi}{l} x \frac{-t \cos \sigma t + \frac{1}{\sigma} \sin \sigma t}{2\sigma}.$$

Ora si constata effettivamente che il massimo dello spostamento di $w(x, t)$ fornito dalla (11) si ha per $v = v_k$ e vale ⁽¹⁾

$$w_{\max}(x) = P \frac{l^3}{\pi^3 EI} \sin \frac{\pi}{l} x.$$

Quindi in mezzeria $w_{\max} = 1,55 w_s$. Ne segue, considerando separatamente la prima vibrazione, che lo spostamento massimo in mezzeria sarà al più $(1,55 + 0,15) w_s \left(\frac{l}{2}\right) = 1,70 w_s \left(\frac{l}{2}\right)$ in luogo di $2 w_s \left(\frac{l}{2}\right)$ offerto dalla (1) ed il vantaggio non è lieve.

Possiamo ormai passare al problema delle reazioni di inerzia con la convinzione che, il soffermarsi sulla prima vibrazione per la ricerca di effetti ritenuti secondari è sicuramente legittima. Con questo intento rifacciamoci all'equazione integrodifferenziale cui soddisfa $w(x, t)$ istituita nella prima delle Note citate. Da quella, procedendo nello spirito delle approssimazioni successive abbiamo ricavato l'effetto delle masse applicate e di quelle sospese sostituendo nel 2° e 3° termine a destra la soluzione, indicata con \bar{w} , del caso privo di inerzia, data dalla (7). Se ci limitiamo al contributo della sola vibrazione fondamentale, e conveniamo d'indicare ancora con \bar{w} la \bar{w} limitata al 1° termine, gli spostamenti $\Delta_{\kappa} w$ dovuti alle masse applicate e quelli $\Delta_{1-\kappa} w$ dovuti a quelle sospese (molleggiate), risultano

$$(12) \quad \Delta_{\kappa} w(x, t) = -u(x) \frac{\kappa M}{\sigma} \int_0^t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t'^2} \right)_{x=vt'} u(vt') \sin \sigma(t-t') dt'$$

e

$$(13) \quad \Delta_{1-\kappa} w(x, t) = +u(x) \frac{\sigma^2}{\sigma} \int_0^t \left\{ v \int_0^{t'} \bar{w}(vt'', t'') \sin v(t'-t'') dt'' - \right. \\ \left. - \bar{w}(vt', t') \right\} \sin \sigma(t-t') dt'.$$

Avendosi per la (7), arrestata al 1° termine e con riflesso alla (7 a),

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)_{x=vt} = u(vt) \ddot{\varphi} = u(vt) \{ -\sigma^2 \varphi + P u(vt) \}$$

potremo scrivere la (12) nella forma

$$(12 a) \quad \Delta_{\kappa} w(x, t) = u(x) \frac{\kappa M}{\sigma} \int_0^t \{ \sigma^2 u(vt') \varphi(t') - P u^2(vt') \} \cdot \\ \cdot u(vt') \sin \sigma(t-t') dt'.$$

(1) Cfr. *Carico costante e carico armonico e solitario in moto su di un ponte*. «Ricerche d'Ingegneria», N. 3, 1933.

Ove si rilevi che nel campo $0 < x < l$ cioè $0 < vt < l$ la u è sempre positiva e che, in condizioni di risonanza, su cui ci vogliamo soffermare, sarà sempre $0 < t' < \frac{\pi}{\sigma}$ e quindi $\sin \sigma(t - t') > 0$, si constata che sicuramente

$$(12b) \quad \Delta_x w(x, t) \leq u(x) \frac{\kappa M}{\sigma} \int_0^t \sigma^2 u(vt') \varphi(t') \sin \sigma(t - t') dt'$$

ovvero, con una applicazione evidente della disuguaglianza di Schwarz,

$$\begin{aligned} \Delta_x w(x, t) &< u(x) (\kappa M) \sigma \int_0^{l/v} (u \varphi)_{\max} u(vt') \sin \sigma(t - t') dt' < \\ &< u(x) (\kappa M) \sigma (u \varphi)_{\max} \cdot \sqrt{\int_0^{l/v} u^2(vt) dt \int_0^{l/v} \sin^2 \sigma(t - t') dt'}. \end{aligned}$$

Ora si rilevi che:

a) $(u \varphi)_{\max} < w_{\max}$ fornito dalla (1),

b) attesa la condizione di *normalità* cui soddisfano le u_q , per $v = v_k$,

$$\int_0^t u^2(v_k t) dt \leq \frac{1}{v_k} \int_0^l u^2(x) dx < \frac{\pi}{l} \frac{1}{\mu_{\min}} \int_0^l \mu(x) u^2(x) dx = \frac{\pi}{l} \cdot \frac{1}{\mu_{\min}},$$

c) atteso il campo di variabilità della t ; $0 \leq t \leq \frac{\pi}{\sigma}$,

$$\int_0^t \sin^2 \sigma(t - t') dt' \leq \int_0^{\frac{\pi}{\sigma}} \sin^2 \sigma(t - t') dt' = \frac{\pi}{2\sigma}.$$

La (12b) porge in conformità con codesti rilievi a), b), c),

$$\Delta_x w(x, t) < u(x) (\kappa M) \sigma w_{\max} \frac{\pi}{\sigma} \sqrt{\frac{1}{2 \mu_{\min} l}},$$

ovvero, ponendo mente che per le (9),

$$u(x) = u_1(x) < \sigma_1 \sqrt{c(x, x)} = \sigma \sqrt{c(x, x)},$$

e badando che

$$\sigma \leq \frac{1}{\sqrt{\int_0^l \mu(x) c(x, x) dx}} \leq \frac{1}{\sqrt{l \mu_{\min}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\int_0^l c(x, x) dx}}$$

la (4) c. d. d.

Passiamo ora al contributo delle masse elasticamente sospese. Il criterio delle approssimazioni successive porge, sempre arrestandosi al 1° termine della (7) nel calcolo di \bar{w} ,

$$\Delta_{1-x} w(x, t) = + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} u(x) \int_0^l \left\{ v \int_0^{t'} u(vt'', t'') \varphi(t'') \sin v(t' - t'') dt'' - \right. \\ \left. - u(vt', t') \varphi(t') \right\} u(vt') \sin \sigma(t - t') dt'.$$

Ora constatiamo che, essendo per costruzione, come risulta dalla tabella allegata, $v < \sigma$, almeno per ponti di luce inferiore ai 100 m., sarà nel campo $0 < t' < \frac{\pi}{\sigma}$; $\sin v(t - t') > 0$.

Essendo $u\varphi$ in tale campo, pur esso > 0 per $v = v_k$; come ancora vogliamo supporre per soffermarci sul pernicioso caso della risonanza, agli effetti della maggiorazione ci occuperemo del solo primo termine positivo.

Otteniamo per questo, con gli stessi accorgimenti di prima e ponendo addirittura $\sin \sigma(t - t') = 1$,

$$\Delta_{1-x} w(x, t) \leq \frac{\varepsilon^2}{\sigma} u(x) \int_0^{t' = \frac{\pi}{\sigma}} \left(v w_{\max} \frac{1}{v_k} \int_0^{t' = \frac{\pi}{\sigma}} u(v_k t) d(v_k t) \right) dt \leq \\ \leq \varepsilon^2 \sqrt{c(x, x)} \cdot v w_{\max} \cdot \frac{1}{v_k} \int_0^l u(x) dx \cdot \frac{\pi}{\sigma} = \\ = \varepsilon^2 \sqrt{c(x, x)} \cdot \frac{v}{\sigma} \cdot \pi^2 \frac{1}{l} \int_0^l \sqrt{c(x, x)} dx \cdot w_{\max}.$$

Notando che

$$\int_0^l \sqrt{c(x, x)} dx < \sqrt{\int_0^l c(x, x) dx \int_0^l dx} = \sqrt{l \int_0^l c(x, x) dx},$$

tenuta presente la definizione di c_{med} si trae la (5) c. d. d.

Per la travata semplicemente appoggiata le espressioni di $\Delta_x w(x, t)$, $\Delta_{1-x} w(x, t)$ risultano

$$\Delta_x w(x, t) = 2 \frac{xM}{l\mu_0} \cdot k \Phi \left(\frac{v}{v_k}, j \right) P c_0 \sin \frac{\pi}{l} x$$

e

$$\Delta_{1-x} w(x, t) = 2 \left(\frac{v}{\sigma} \right)^3 \frac{(1-x)M}{l\mu_0} k \Psi \left(\frac{v}{v_k}, j \right) P c_0 \sin \frac{\pi}{l} x$$

dove v_k è al solito la prima velocità critica del ponte data in funzione di l dalla tabella (I), k è un fattore che risulta sempre prossimo all'unità, dato da

$$k = \frac{2l}{\pi^2 \mu_0 \cdot c_0 v_k^2}$$

ed infine c_0 è lo spostamento che il carico $P = 1$ applicato in mezzzeria provoca nel suo senso d'azione.

Le funzioni Φ e Ψ sono puri numeri dipendenti dal rapporto $v : v_k$ della velocità effettiva del carico e di quella critica, infine dalla posizione del carico sul ponte. Se, come conviene per la tabellazione, si considerano posizioni tra loro equidistanti, ottenute dividendo l in un certo numero di parti, poniamone 6 ad esempio, sarà j variabile tra 0 ed 1 col passo $1/6$, e

$$\Phi\left(\frac{v}{v_k}, j\right) = \frac{\frac{v}{v_k}}{1 - \left(\frac{v}{v_k}\right)^2} \int_0^{\frac{v_k}{v} \pi} \sin^2 \frac{v}{v_k} \chi' \left(\sin \chi' - \frac{v}{v_k} \sin \frac{v}{v_k} \chi' \right) \sin (\chi - \chi') d\chi'$$

e pel caso della risonanza, cioè per $v = v_k$,

$$\Phi\left(\frac{v}{v_k}, j\right) = \frac{1}{2} \int_0^{j\pi} (\sin^3 \chi' + \chi' \sin^2 \chi' \cos \chi') \sin (\chi - \chi') d\chi'.$$

Per la $\Psi\left(\frac{v}{v_k}, j\right)$ si ha infine

$$\begin{aligned} \Psi\left(\frac{v}{v_k}, j\right) &= \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{v_k}\right)^2} \int_0^{\frac{v_k}{v} \pi} \sin \frac{v}{v_k} \chi' \left\{ \int_0^{\chi'} \left(\sin \frac{v}{v_k} \chi'' - \frac{v}{v_k} \sin \chi'' \right) \cdot \right. \\ &\cdot \sin \frac{v}{v_k} \chi'' \sin \frac{v}{\sigma} (\chi'' - \chi') d\chi'' - \frac{\sigma}{v} \left(\sin \frac{v}{v_k} \chi' - \frac{v}{v_k} \sin \chi' \right) \sin \frac{v}{v_k} \chi' \left. \right\} \cdot \\ &\cdot \sin (\chi - \chi') d\chi' \end{aligned}$$

e nel caso della risonanza

$$\begin{aligned} \Psi\left(\frac{v}{v_k}, j\right) &= \frac{1}{2} \int_0^{j\pi} \sin \chi' \left\{ \int_0^{\chi'} (\sin \chi'' - \chi'' \cos \chi'') \sin \chi'' \cdot \right. \\ &\cdot \sin \frac{v}{\sigma} (\chi'' - \chi') d\chi'' - \frac{\sigma}{v} (\sin^2 \chi' - \chi' \sin \chi' \cos \chi') \left. \right\} \sin (\chi - \chi') d\chi'. \end{aligned}$$

Poichè basta soffermarsi su tre velocità standard $v = 50, 75-100 \text{ Km h}^{-1}$ e su pochi tipi di luci poniamo 10, 15, 20, 25, 50 e 100 m, si constata che, effettivamente, si possono calcolare, avvalendosi della tabella I, tavole numeriche definitive. In merito, il prof. M. Picone mi ha promesso la collaborazione dell'Istituto Centrale di Calcolo ch'egli dirige.

Astronomia. — *Osservazioni meridiane di GIOVE e di VESTA nel 1935*⁽¹⁾. Nota di L. GIALANELLA, presentata⁽²⁾ dal Socio G. ARMELLINI.

Il presente lavoro dà conto dei risultati delle osservazioni meridiane dei pianeti *Giove* e *Vesta* eseguite — in continuazione della serie intrapresa nel 1934 — durante il decorso anno 1935. I metodi di osservazione e di calcolo sono i medesimi già altre volte descritti; qui mi basta ricordare che lo strumento adoperato è sempre l'invertibile *Bamberg* meridiano dell'Osservatorio del Campidoglio di mm. 88 di apertura e cm. 95 di distanza focale. Esso è munito di micrometro impersonale della stessa casa *Bamberg*, mosso a mano, e collegato col cronografo Cavignato in sincronizzazione col pendolo siderale Kobell (ad asta *invar* di Riefler e a compensazione barometrica Riefler). Le costanti strumentali sono le seguenti:

Parte di livella. = $0^{\circ}.085$

Passo della vite microm. . = $7^{\circ}.598$

Semicontatto e passo morto = $0^{\circ}.0251$.

L'ingrandimento adoperato è stato quello di 120 (il massimo), a cui corrisponde una sensibilità di $0''{,}500$. Di *Giove* è stato anche determinato — sempre a mezzo del micrometro impersonale — il *diametro orizzontale*, usando il metodo appresso descritto.

I. ASCENSIONI RETTE E DIAMETRO ORIZZONTALE DI GIOVE.

Il Pianeta è stato osservato subito dopo l'opposizione. Le stelle di confronto — per la determinazione delle ascensioni — sono state scelte tra le fondamentali del *Nautical Almanac*, avendo cura che avessero coordinate prossime a quelle di *Giove* e precisamente in modo che il Pianeta riuscisse, per quanto possibile, simmetricamente disposto in mezzo alle quattro *orarie* generalmente adoperate; oltre queste sono state osservate una o due cir-

(1) Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astronomico di Roma (sul Campidoglio).

(2) Nella seduta del 3 maggio 1936.

cumpolari per sera per la determinazione dell'azimut strumentale. Nella seguente tabella I riporto l'elenco delle stelle di confronto, dandone le posizioni medie e per ognuna la correzione complessiva $C_{\text{sec } \delta}$ comprendente la correzione per l'aberrazione diurna meridiana e quella per la larghezza dei contatti e passo morto della vite micrometrica computata mediante la formula:

$$C_{\text{sec } \delta} = + 0^{\text{s}}.009 \sec \delta \text{ (per le culminazioni superiori).}$$

TABELLA I.

N.	Stella	Mg.	$\alpha_{1935,0}$	$\delta_{1935,0}$	$C_{\text{sec } \delta}$
1	94 Virginis . . .	6.6	14 ^h 02 ^m 51 ^s .020	— 8° 34' 55".10	+ 0 ^s .009
2	κ Virginis . . .	4.3	14 09 25.449	— 9 58 ^m 19.14	+ 0.009
3	2 Librae . . .	6.3	14 19 55.487	— 11 25 04.96	+ 0.009
4	σ Librae . . .	3.4	15 00 15.568	— 25 01 39.57	+ 0.010
5	ι Librae . . .	4.7	15 08 30.629	— 19 32 48.90	+ 0.010
6	β Librae . . .	2.7	15 13 30.304	— 9 08 39.18	+ 0.009
7	γ Ursae Minoris.	3.1	15 20 48.817	+ 72 03 55.00	+ 0.032
8	ι Draconis . . .	3.5	15 23 28.727	+ 59 11 35.50	+ 0.017
9	32 Librae . . .	5.9	15 24 35.148	— 16 29 27.81	+ 0.009
10	ζ Ursae Minoris.	4.3	15 46 20.126	+ 77 59 43.04	+ 0.043

La correzione dell'orologio Δt è stata calcolata mediante la formula di Mayer, in cui il coefficiente d'inclinazione i è stato ottenuto applicando a ciascuna stella la correzione quale è risultata dalla corrispondente lettura della livella, fatta avanti l'inizio dell'osservazione nella prima posizione del cannocchiale e dopo la fine dell'osservazione nella seconda posizione a rovesciamento eseguito. Nella tabella II ho raccolto i risultati delle osservazioni stellari di tutte le serate e i Δt medi conclusi per ognuna di esse. La correzione $C_{\text{sec } \delta}$ è conglobata nel t_{oss} .

TABELLA II.

Data	Stella	Cerchio	$\alpha_{app.}$	$t_{oss.}$	$i \cos \gamma$ sec δ	$a \sin \gamma$ sec δ	Δt	Medie serali Δt
1935								
Giugno 4	1	W	02 ^m 54 ^s .26	04 ^m 15 ^s .73	+ 0 ^s .03	+ 3 ^s .12	— 84 ^s .62	— 84 ^s .65
	2	E	09 28 .74	10 50 .17	+ 0 .02	+ 3 .20	— 84 .65	
	3	W	19 58 .84	21 20 .28	+ 0 .04	+ 3 .18	— 84 .66	
	4	E	00 19 .33	01 40 .05	+ 0 .05	+ 3 .90	— 84 .67	
Giugno 5	2	E	09 28 .74	10 52 .57	+ 0 .09	+ 3 .20	— 87 .12	— 87 .15
	3	W	19 58 .84	21 22 .63	+ 0 .08	+ 3 .28	— 87 .15	
	5	W	08 34 .31	09 57 .70	+ 0 .06	+ 3 .72	— 87 .17	
Giugno 12	2	W	09 28 .71	11 07 .70	+ 0 .16	+ 3 .14	— 102 .29	— 102 .32
	3	E	19 58 .82	21 37 .84	+ 0 .09	+ 3 .22	— 102 .33	
	4	E	00 19 .33	01 57 .70	+ 0 .02	+ 3 .97	— 102 .37	
	5	W	08 34 .32	10 12 .96	+ 0 .02	+ 3 .65	— 102 .31	
	7	W	20 52 .94	22 41 .68	— 0 .02	— 6 .41	— 102 .31	
Giugno 14	2	E	09 28 .71	11 12 .06	0 .00	+ 3 .00	— 106 .35	— 106 .36
	3	W	19 58 .81	22 42 .10	— 0 .01	+ 3 .07	— 106 .35	
	9	W	24 38 .87	26 21 .96	+ 0 .02	+ 3 .28	— 106 .39	
Giugno 17	2	E	09 28 .69	10 54 .94	+ 0 .04	+ 26 .16	— 112 .45	— 112 .46
	3	W	19 58 .80	21 24 .44	+ 0 .04	+ 26 .81	— 112 .49	
	5	W	08 34 .32	09 56 .32	+ 0 .02	+ 30 .41	— 112 .43	
Giugno 19	2	E	09 28 .68	11 32 .30	+ 0 .01	— 7 .72	— 115 .91	— 115 .93
	3	W	19 58 .79	22 02 .54	0 .00	— 7 .91	— 115 .84	
	4	E	00 19 .33	02 25 .02	+ 0 .02	— 9 .74	— 115 .97	
	5	W	08 34 .32	10 39 .29	+ 0 .01	— 8 .99	— 115 .99	
Giugno 24	3	E	19 58 .76	22 13 .20	+ 0 .02	— 7 .16	— 127 .30	— 127 .34
	4	W	00 19 .31	02 35 .51	+ 0 .01	— 8 .82	— 127 .39	
	5	E	08 34 .31	10 49 .78	0 .00	— 8 .12	— 127 .35	
	6	W	13 33 .84	15 48 .05	+ 0 .05	— 6 .90	— 127 .36	
	8	E	23 32 .00	25 34 .09	+ 0 .06	+ 5 .15	— 127 .30	
Giugno 28	4	W	00 19 .28	02 43 .83	0 .00	— 8 .81	— 135 .74	— 135 .74
	5	E	08 34 .29	10 58 .18	0 .00	— 8 .11	— 135 .78	
	6	W	13 33 .82	15 56 .50	— 0 .03	— 6 .89	— 135 .76	
	8	E	23 31 .91	25 42 .56	— 0 .03	+ 5 .14	— 135 .76	

Le osservazioni di *Giove* comprendono la determinazione delle ascensioni rette del 1° lembo e la misura del diametro orizzontale. Il metodo che ho adoperato per quest'ultima misura è stato il seguente. Iniziamo l'osservazione del Pianeta portando il filo mobile del micrometro impersonale tangente al 1° lembo allorchè questo passava attraverso il 1° filo fisso del campo, e ne facevo registrare il passaggio per più di quattro rivoluzioni del tamburo (oltre quaranta appulsi). Eseguita poi l'inversione dello strumento, riprendevo a seguire, al suo passaggio, il 1° lembo del Pianeta col filo mobile e ne facevo registrare solo una trentina di appulsi; dopodichè arrestavo il movimento del tamburo per riprenderlo soltanto al passaggio del 2° lembo, di cui ottenevo così la registrazione di oltre dieci appulsi. Allora, se α e β sono le medie degli istanti dei passaggi corrispondenti del 1° lembo nelle due posizioni dello strumento, risulta evidentemente:

$$t_{\text{oss.}} = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Detta poi γ la media degli istanti dei passaggi del 2° lembo negli ultimi contatti del ritorno, che corrispondono ai contatti del 1° lembo, di cui diciamo la media α' , risulta per il *diametro orizzontale* del Pianeta (durata, in tempo siderale, del passaggio del diametro al meridiano) il valore:

$$d = (\alpha' + \gamma) - (\alpha + \beta).$$

La seguente tabella III contiene i risultati di tali osservazioni, e gli O-C dedotti dal confronto con l'Effemeride del *Nautical Almanac*. L'ultima colonna contiene le ascensioni rette del centro del Pianeta, ricavate mediante i valori del diametro osservato.

TABELLA III.

Data	Cerchio	$t_{\text{oss.}}$	$i \cos \zeta$ sec δ	$a \sin \zeta$ sec δ	Δt	α 1° lembo	O - C	$d_{\text{oss.}}$	O - C	α centro
1935		14 ^h				14 ^h				14 ^h
Giugno 4	W	54 ^m 23 ^s .85	+0 ^s .03	+3 ^s .48	-84 ^s .65	53 ^m 02 ^s .71	-0 ^s .09	—	—	—
5	E	54 02.60	+0.08	+3.48	-87.15	52 39.01	-0.05	3 ^s .14	+0 ^s .12	52 ^m 40 ^s .58
12	W	51 46.30	-0.01	+3.42	-102.32	50 07.39	-0.09	3.10	+0.10	50 08.94
14	W	51 12.09	+0.03	+3.26	-106.36	49 29.02	-0.08	3.16	+0.18	49 30.60
17	E	50 00.22	+0.06	+28.45	-112.46	48 36.27	-0.08	3.24	+0.28	48 37.89
19	W	50 08.42	0.00	-8.39	-115.93	48 04.10	-0.09	—	—	—
24	E	49 09.82	+0.01	-7.59	-127.34	46 54.90	-0.14	3.19	+0.27	46 56.49
28	E	48 35.00	-0.02	-7.64	-135.76	46 11.58	-0.13	2.91	+0.03	46 13.03

II. ASCENSIONI RETTE DI VESTA.

Il pianeta *Vesta* è stato osservato subito dopo l'opposizione con i medesimi procedimenti usati per *Giove*. La seguente tabella IV contiene l'elenco delle stelle di confronto adoperate, tratte dal *Nautical Almanac* e la correzione complessiva $C_{\text{sec } \delta}$.

TABELLA IV.

N.	Stella	Mg.	$\alpha_{1935,0}$	$\delta_{1935,0}$	$C_{\text{sec } \delta}$
1	α Aquarii . . .	3.2	22 ^h 02 ^m 26 ^s .739	— 0° 38' 10''.59	+ 0 ^s .009
2	ζ Cephei . . .	3.6	22 08 35.718	+ 57 52 49.87	+ 0.017
3	θ Aquarii . . .	4.3	22 13 24.282	— 8 06 27.24	+ 0.009
4	γ Aquarii . . .	4.0	22 18 17.952	— 1 42 55.44	+ 0.009
5	η Aquarii . . .	4.1	22 32 00.969	— 0 27 10.83	+ 0.009
6	κ Aquarii . . .	5.3	22 34 23.437	— 4 33 49.81	+ 0.009
7	ι Cephei . . .	3.7	22 47 21.631	+ 65 51 29.96	+ 0.022
8	λ Aquarii . . .	3.8	22 49 13.432	— 7 55 33.14	+ 0.009
9	ϵ^2 Aquarii . . .	3.8	23 05 59.012	— 21 31 31.75	+ 0.010
10	ψ^3 Aquarii . . .	5.2	23 15 34.836	— 9 57 58.37	+ 0.009
11	κ Piscium . . .	4.9	23 23 35.959	+ 0 53 58.61	+ 0.009
12	γ Cephei . . .	3.4	23 36 39.566	+ 77 16 10.19	+ 0.041

La tabella V, poi, raccoglie i risultati delle osservazioni stellari e i Δt medi conclusi:

TABELLA V.

Data	Stella	Cerchio	$\alpha_{app.}$	$t_{oss.}$	$i \cos \chi$ sec δ	$a \sin \chi$ sec δ	Δt	Medie serali Δt
1935								
Settembre 30	2	E	08 ^m 39 ^s .53	10 ^m 07 ^s .32	— 0 ^s .14	— 0 ^s .67	— 86 ^s .98	— 86 ^s .98
	3	W	13 28 .72	14 54 .78	— 0 .07	+ 0 .98	— 86 .98	
	4	E	18 22 .30	19 48 .53	— 0 .07	+ 0 .88	— 87 .04	
	8	E	49 17 .93	50 43 .96	— 0 .08	+ 0 .98	— 86 .93	
Ottobre 3 .	3	W	13 28 .70	14 51 .14	— 0 .04	+ 0 .79	— 83 .19	— 83 .16
	4	E	18 22 .28	19 44 .78	— 0 .04	+ 0 .71	— 83 .17	
	6	W	34 27 .84	35 50 .29	— 0 .05	+ 0 .75	— 83 .15	
	7	E	47 26 .12	48 50 .54	— 0 .25	— 1 .02	— 83 .15	
Ottobre 10 .	4	W	18 22 .22	19 37 .08	— 0 .06	+ 0 .77	— 75 .57	— 75 .56
	5	W	32 05 .27	33 20 .12	0 .00	+ 0 .75	— 75 .60	
	7	E	47 25 .96	48 42 .78	— 0 .19	— 1 .10	— 75 .51	
	9	E	06 03 .71	07 18 .24	— 0 .04	+ 1 .06	— 75 .55	
Ottobre 14	6	W	34 27 .76	35 36 .66	+ 0 .03	+ 0 .97	— 69 .90	— 69 .87
	9	W	06 03 .69	07 12 .28	+ 0 .01	+ 1 .26	— 69 .86	
	10	E	15 39 .35	16 48 .14	+ 0 .01	+ 1 .06	— 69 .86	
	11	W	23 40 .39	24 49 .30	+ 0 .08	+ 0 .88	— 69 .87	
	12	E	36 46 .37	37 59 .73	0 .00	— 3 .50	— 69 .86	
Ottobre 16 .	6	W	34 27 .75	35 34 .45	— 0 .01	+ 0 .92	— 67 .61	— 67 .59
	9	W	06 03 .67	07 10 .00	— 0 .01	+ 1 .20	— 67 .52	
	11	E	23 40 .38	24 47 .12	+ 0 .01	+ 0 .83	— 67 .58	
	12	W	36 46 .31	37 57 .40	— 0 .21	— 3 .31	— 67 .57	
Ottobre 17 .	1	E	02 30 .85	03 36 .41	+ 0 .03	+ 0 .84	— 66 .43	— 66 .40
	2	W	08 39 .14	09 46 .19	0 .00	— 0 .65	— 66 .40	
	3	E	13 28 .57	14 34 .02	— 0 .01	+ 0 .95	— 66 .39	
	6	W	34 27 .74	35 33 .21	0 .00	+ 0 .90	— 66 .37	
Ottobre 30 .	2	E	08 38 .76	09 22 .31	0 .00	— 0 .70	— 42 .85	— 42 .86
	3	W	13 28 .42	14 10 .26	0 .00	+ 1 .02	— 42 .86	
	4	E	18 22 .01	19 03 .96	+ 0 .01	+ 0 .91	— 42 .87	
	6	E	34 27 .60	35 09 .51	0 .00	+ 0 .96	— 42 .87	

Il pianeta *Vesta* è stato osservato adoperando sempre il campo lucido ed i fili oscuri, nonostante che per le avverse condizioni atmosferiche, specialmente di qualche serata, sia stato a volte quasi al limite di visibilità. La tabella VI contiene i risultati delle osservazioni e gli O - C dedotti dal confronto con l' Effemeride data da N. M. Voronov in *Poulkovo Circular N. 14*.

TABELLA VI.

Data	Cerchio	$t_{\text{oss.}}$	$i \cos \gamma$ sec δ	$a \sin \gamma$ sec δ	Δt	$\alpha_{\text{oss.}}$	O - C
1935		22 ^h				22 ^h	
Settembre 30	W	59 ^m 15 ^s .39	— 0 ^s .07	+ 1 ^s .15	— 86 ^s .98	57 ^m 49 ^s .49	+ 0 ^s .16
Ottobre 3	W	57 21 .50	— 0 .06	+ 0 .94	— 83 .16	55 59 .22	+ 0 .12
10	W	53 49 .80	— 0 .04	+ 1 .02	— 75 .56	52 35 .22	+ 0 .12
14	E	52 23 .23	+ 0 .01	+ 1 .21	— 69 .87	51 14 .58	+ 0 .21
16	E	51 50 .63	— 0 .02	+ 1 .15	— 67 .59	50 44 .17	+ 0 .02
17	W	51 36 .75	— 0 .03	+ 1 .12	— 66 .40	50 31 .44	+ 0 .14
30	W	51 02 .58	— 0 .03	+ 1 .21	— 42 .86	50 20 .90	— 0 .01

Astronomia (Astrofisica). — *Larghezze equivalenti e intensità centrali delle righe di assorbimento nello spettro del Sole al centro ed ai lembi.* Nota di IRIS CASTELLI, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. ABETTI.

Nella determinazione delle intensità delle righe nello spettro solare possiamo riferirci sia all'intensità centrale, quanto alla larghezza equivalente della riga. Nel primo caso studiamo solo il fondo della riga rispetto allo spettro continuo adiacente, nel secondo invece l'energia assorbita dalla riga stessa. La misura dell'intensità centrale è facile ed assai rapida. Basta infatti costruire le curve di trasmissione che ci permettano di risalire dall'annerimento della lastra all'intensità della luce incidente su di essa, impressionando la lastra con una serie di spettri di intensità varia, ma in rapporto conosciuto e costante, mediante uno dei soliti metodi, filtro graduale, variazione del tempo di posa della larghezza della fenditura. Quindi dall'annerimento prodotto dalla riga spettrale e rivelato dal profilo ottenuto al microfotometro possiamo risalire all'intensità di ciascun punto del profilo ed in particolare del fondo della riga, che ci rappresenta proprio l'intensità centrale. Tale misura non è però molto esatta, potendo variare il fondo della riga sia per effetti fotografici e strumentali, quali sensibilità della lastra, effetto di sviluppo, sensibilità del galvanometro del microfotometro, diffusione della luce nello spettrografo quanto per effetto delle condizioni dell'atmosfera solare nel punto investigato. Nella misura della larghezza equivalente di una riga si calcola invece l'intensità di ciascun punto del profilo della riga quale è dato dal microfotometro e si costruisce un profilo di intensità. L'area racchiusa da tale profilo e il fondo continuo, diviso per l'area di un *angstrom* di spettro continuo ci rappresenta la larghezza equivalente della riga. Come è evidente tale misura è molto più precisa della precedente in quanto calcoliamo l'intensità, non di un singolo punto della riga, ma di tutti i punti del profilo.

Per questa ragione riprendendo il lavoro precedente ⁽²⁾ sulla misura delle intensità centrali delle righe nello spettro del sole al centro ed ai lembi per confermare i risultati ottenuti, ho calcolato la larghezza equivalente di un gruppo di righe appartenenti ad un multipletto del ferro e due righe del Titanio ionizzato.

Per questa ricerca mi sono servita delle stesse lastre usate nella precedente determinazione ed ottenute alla torre solare coll'immagine del Sole

(1) Nella seduta del 17 maggio 1936.

(2) Pubbl. «R. Osservatorio di Arcetri», fasc. 53, p. 27, 1935.

di 18 cm. nel secondo ordine dello spettrografo a reticoli, con una dispersione di 8 Å/mm.

Lastre	1002	5 luglio 1933	spettro	— al polo Sud-centro	Agiù super-panoramiche
Serie A	1007	5 luglio 1933	↓	— al limite W-centro	
				— al polo Nord-centro	
				— al limite W-centro	

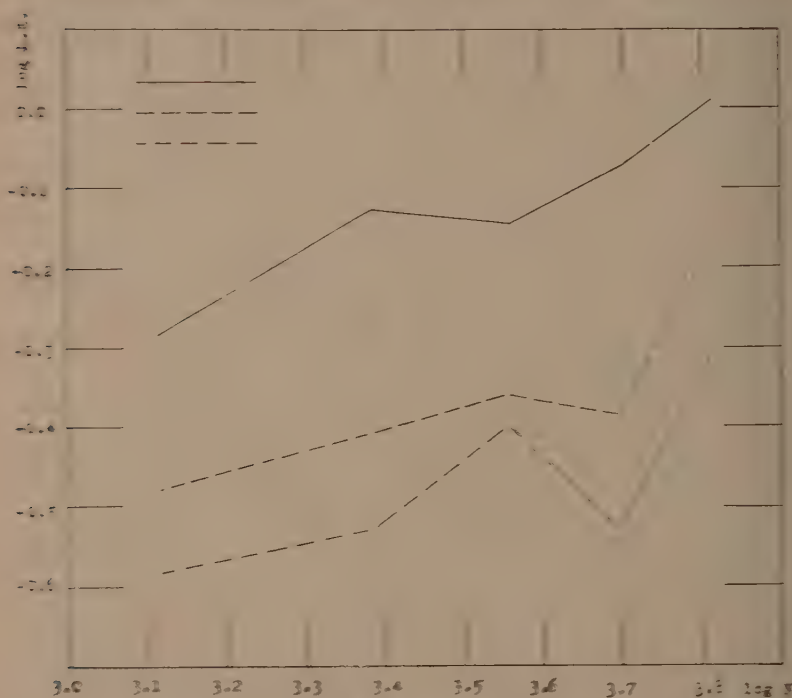


Fig. 1.

Relazione tra la larghezza spettrale L.B. e il numero totali nodali (N).

Il confronto, già eseguito, di queste lastre al microfilmometro di Moir dell'Istituto di Chimica della P. Università di Firenze non hanno potuto servire per questa ricerca, avendo una scala troppo ridotta; perciò ho preso nuovi fotogrammi con una scala di 1 a 20 cioè 0.05 Å/mm. Col nuovo microfilmometro a termopila vari costruito recentemente all'Osservatorio, ho potuto ottenere fotogrammi con una scala oltre alla sopra citata.

Le righe misurate nel modo sopra descritto sono riportate nella tavola seguente, dove nelle successive colonne sono date: la lunghezza d'onda, le intensità di Rowland, il potenziale di eccitazione, le intensità centrali al centro ed ai lembi equatoriale e polare e le larghezze equivalenti al centro e ai lembi in *angstrom*.

Dai risultati ottenuti per la larghezza equivalente delle righe, rispettivamente al centro del Sole e ai lembi equatoriale e polare, appare evidente

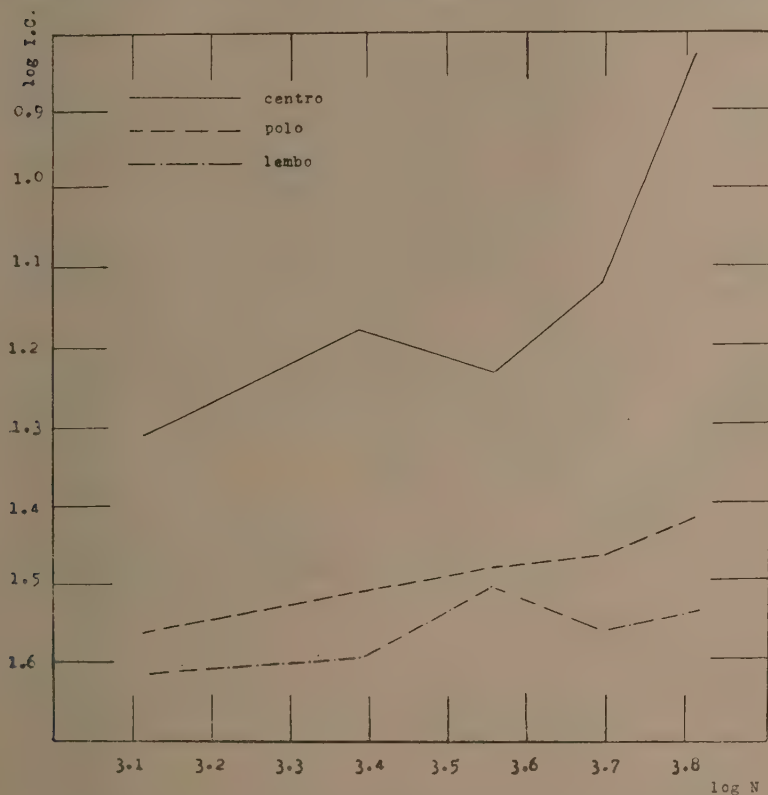


Fig. 2.

Relazione fra le intensità centrali (I. C.) e il numero degli oscillatori (N).

la differenza già determinata nel precedente lavoro, ed anzi più notevole specialmente per le righe del ferro. Per le righe del Ti^{+} si nota invece una differenza minore ed anzi invertita rispetto a quella del multipletto del ferro, a cui però non possiamo dare un eccessivo peso dato il ristretto numero di osservazioni. Si può solo osservare una volta di più, come tali righe siano molto più sensibili di quelle degli atomi neutri alla variazione di condizioni nella atmosfera a cui hanno origine e quindi subiscano varia-

zioni notevoli per il fatto di essere osservate in punti leggermente diversi rispetto al lembo. Infatti i valori trovati per le due lastre scartano tra loro.

λ Fe	I. R.	P. E.	I. C. centro	I. C. lembo	I. C. polo	L. E. centro	L. E. lembo	L. E. polo
3763.805	10	0.986	6.85	38.9	26.1	1.03	0.50	0.66
3767.206	8	1.007	19.0	31.2	29.2	0.74	0.22	0.51
3787.893	9	1.007	14.0	35.7	29.1	0.84	0.31	0.42
3795.014	8	0.986	15.2	33.7	30.8	0.66	0.36	0.40
3798.523	6	0.911	19.8	40.7	35.9	0.52	0.26	0.34
3799.560	7	0.954	15.5	38.9	31.3	0.75	0.30	0.41
Ti ⁺								
3759.301	12	0.605	25.2	40.0	42.0	0.52	0.37	0.23
3761.876	3	0.571	23.3	43.9	35.6	0.41	0.29	0.24

Ho confrontato, come nella ricerca precedente, la larghezza equivalente calcolate col numero di oscillatori N concorrenti alla formazione delle righe. Tale numero essendo dato dalla relazione $\log N = B \log A$ dove B, che dipende dalla lunghezza d'onda ed A dalla intensità di Rowland, sono dati dalle tavole di Russell, Adams e Moore ⁽¹⁾.

Ordinando le righe secondo le intensità ottengo la tavola seguente:

λ	I. R.	log N	log L. E. centro	log L. E. lembo	log L. E. polo	log I. C. centro	log I. C. lembo	log I. C. polo
3763.805	10	3.812	0.013	— 0.300	— 0.180	0.832	1.531	1.415
3787.893	9	3.693	— 0.071	— 0.523	— 0.380	1.146	1.556	1.462
3767.206 95.014	8	3.553	— 0.143	— 0.398	— 0.357	1.230	1.498	1.477
3799.560	7	3.387	— 0.125	— 0.530	— 0.400	1.176	1.591	1.505
3798.523	6	3.112	— 0.284	— 0.585	— 0.480	1.301	1.613	1.556

Portando in diagramma, in ordinate le L. E. e in ascisse il logaritmo di N, oppure il log I. C. e il log N ho costruito le curve analoghe alle curve teoriche di accrescimento di Minnaert e Slob ⁽²⁾.

(1) « Astrophys. Journal », vol. 68, p. 1, 1928.

(2) MINNAERT e SLOB, *Die Totalintensitäten der Fraunhoferlinien*. « K. Ak. V. W. Amsterdam Proceed. », vol. XXXIV, 4, 1931.

A differenza delle spezzate ottenute nella ricerca precedente, nelle quali si osserva una parziale sovrapposizione delle curve relative ai valori osservati ai lembi equatoriale e polare, ho ottenuto tre curve perfettamente distinte, tanto nel grafico $\log L. E. - \log N$, quanto in quello $\log I. C. - \log N$. Questo secondo risultato può derivare dal fatto che ho calcolato le intensità centrali in base ai profili ottenuti per le larghezze equivalenti nei quali la profondità della riga rimane inalterata, ma lo spettro continuo non è preso in un punto adiacente alla riga stessa, quindi molto incerto a causa delle righe numerosissime in questa regione spettrale, ma quale si trova per estrapolazione considerando che l'intensità nelle ali della riga è ben rappresentata dalla relazione $i \sim \frac{I}{\Delta\lambda^2}$, essendo $\Delta\lambda$ la distanza del punto considerato dal centro della riga.

I risultati ottenuti confermano quindi le conclusioni del lavoro precedente, e cioè che le condizioni dell'atmosfera solare al centro sono leggermente diverse dai lembi equatoriale e polare, e pure fra i lembi vi è una differenza sistematica, che può dipendere, come già si è accennato, sia ad una diversa temperatura dei due lembi, come vogliono le moderne teorie solari, sia da una diversa altezza della cromosfera.

In un recente lavoro G. F. W. Mulders ad Utrecht ⁽¹⁾ ha determinato le larghezze equivalenti di 462 righe di Fraunhofer distribuite in differenti regioni dello spettro del centro del disco del Sole, e precisamente $\lambda 3856$, $\lambda 4383$, $\lambda 5154$ ecc.

È interessante confrontare i valori da lui dati con quelli analoghi che si possono ottenere dagli spettrogrammi in Arcetri. Perciò ho preso in esame alcune righe appartenenti al multipletto del ferro $\alpha^1 D - \alpha^1 D_2^0$ ed ho ottenuto i seguenti risultati:

λ	I. R.	L. E. Utrecht	L. E. Arcetri
3856.383	8	0.545	0.550
59.924	20	1.070	1.130
86.296	15	0.832	1.721
99.721	8	0.426	0.400

L'accordo si può ritenere sufficiente poichè gli errori medi delle nostre determinazioni sono dell'ordine del 7 % e naturalmente con strumenti e dispersione diversi ci si devono aspettare anche scarti maggiori.

(1) G. F. W. MULDER, *Aequival. Breedten v. Fraunhoferlijnen*. Nijmegen, 1934.

Fisica. — *Sulla diffusione dei neutroni lenti.* Nota di G. C. WICK, presentata ⁽¹⁾ dal Socio O. M. CORBINO.

INTRODUZIONE. — Lo studio delle proprietà dei neutroni rallentati per urto contro nuclei d'idrogeno ⁽²⁾ conduce a vari problemi, che presentano una spiccata analogia con quelli ormai classici della teoria cinetica dei gas.

Consideriamo, per esempio, una sorgente di neutroni sita nell'interno o in vicinanza di un blocco di paraffina (o di altra sostanza idrogenata). Come hanno mostrato le esperienze di Fermi e dei suoi collaboratori, un neutrone può in queste condizioni subire un gran numero di urti nella paraffina contro nuclei di idrogeno venendo progressivamente rallentato, fino a raggiungere energie dell'ordine dell'agitazione termica ⁽³⁾. Questo processo è stato trattato da vari autori sia mediante considerazioni più o meno grossolane, sia applicando ai neutroni l'equazione della diffusione ⁽⁴⁾.

È ovvio che il modo più soddisfacente di trattare la questione consiste nel ricorrere all'equazione di continuità della meccanica statistica ⁽⁵⁾, che, tenendo presente che all'infuori degli urti non vi sono forze che agiscono sui neutroni, può scriversi:

$$(I) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} = a - b$$

dove

$$f(x, y, z; u, v, w) d\tau du dv dw$$

dà il numero di neutroni contenuto nell'elemento di volume $d\tau$ nella paraffina, con velocità di componenti comprese tra u e $u + du$, v e $v + dv$, w e $w + dw$ e dove a e b sono i termini che rappresentano i neutroni che in seguito a un urto entrano o rispettivamente escono dall'elemento $du dv dw$ dello spazio delle velocità.

(1) Nella seduta del 3 maggio 1936.

(2) E. AMALDI, O. D'AGOSTINO, E. FERMI, B. PONTECORVO, F. RASETTI, E. SEGRÈ, «Proc. Roy. Soc.», 149, 522, 1935.

(3) P. B. MOON e J. R. TILLMAN, «Nature», 135, 904, 1935; E. AMALDI... ecc., «Ric. Scient.», VI, giugno 1935; O. R. FRISCH e E. T. SOERENSEN, «Nature», 136, 258, 1935; J. R. DUNNING, G. B. PEGRAM, G. A. FINK, D. P. MITCHELL e E. SEGRÈ, «Phys. Rev.», 48, 704, 1935 e gli altri lavori citati in MOON e TILLMAN, «Proc. Roy. Soc.», 153, 476, 1936.

(4) E. AMALDI e E. FERMI, «Ric. Scient.», 1, 56, 1936.

(5) Ved., per es., BOLTZMANN, *Vorlesungen über Gastheorie*, cap. II.

Vogliamo nel seguito trattare mediante l'equazione (1) alcune questioni per cui le considerazioni più elementari a cui abbiamo accennato prima non sono sufficienti.

1. È necessario anzitutto precisare a quali neutroni si applicano le considerazioni seguenti. Quando un neutrone passa da energie dell'ordine di alcuni volt alla regione delle energie termiche (intorno a 0.03 volt) deve avvenire un notevole cambiamento nel suo comportamento riguardo agli urti. Finchè infatti l'energia cinetica del neutrone è grande in confronto all'energia di legame dei protoni nei complessi molecolari di cui questi fanno parte, le leggi dell'urto devono essere quelle che valgono tra particelle libere. L'angolo di deviazione del neutrone nell'urto deve essere acuto; inoltre il neutrone viene rallentato.

Quando un neutrone si è messo in equilibrio termico coll'ambiente, è chiaro che gli urti non devono portare in media ad un cambiamento dell'energia; inoltre saranno possibili anche urti con deviazioni maggiori di 90°. Questi neutroni termici costituiscono, almeno in gran parte, il cosiddetto « gruppo C », fortemente assorbito dal cadmio ⁽¹⁾; il loro cammino libero medio nella paraffina è stato trovato recentemente ⁽²⁾ di solo 3 mm. circa. Per questi neutroni ha una grande importanza il fenomeno della cattura da parte dei protoni. Possiamo tener conto di questo ammettendo che in un urto un neutrone C abbia la probabilità $1/N$ di venire catturato, e quindi una probabilità $(N-1)/N$ di continuare il suo cammino in una nuova direzione. Evidentemente N dà il numero dei cammini liberi che percorre in media un neutrone C, prima di venire catturato ⁽³⁾. Si tratta di un numero piuttosto grande ⁽⁴⁾, la cui determinazione è per ora un po' incerta, ma certamente dell'ordine di alcune centinaia.

Si possono considerare questi neutroni come un gas estremamente rarefatto, e in un certo senso alcune esperienze sui neutroni termici si possono confrontare utilmente con note esperienze sui gas, così, per es., un'esperimento proposto da Szilard ⁽⁵⁾ sulla trasmissione dei neutroni in un tubo scavato nella paraffina, è analogo alla diffusione molecolare dei gas studiata da Martin Knudsen.

Orbene, noi limiteremo nel seguito le nostre considerazioni esclusivamente ai neutroni termici. Naturalmente, siccome il termine a nell'equazione (1) contiene anche un contributo dovuto a neutroni più veloci, dovremo supporre che questo contributo sia una funzione nota della posizione e della velocità.

(1) E. AMALDI e E. FERMI, « Ric. Scient. », 2, 443, 1935.

(2) E. AMALDI e E. FERMI, « Ric. Scient. », in corso di pubblicazione.

(3) V. anche E. FERMI, « Rend. R. Accademia d'Italia », in corso di pubblicazione.

(4) E. AMALDI e E. FERMI, loc. cit.

(5) F. L. HOPWOOD e T. A. CHALMERS, « Nature », 135, 341, 1935.

Per semplificare il problema supporremo che la legge dell'urto sia perfettamente isotropa, e che l'energia di un neutrone non subisca alcuna variazione durante un urto. (Ciò è vero soltanto in media, ma non nei singoli urti). Ciò non mi sembra porti un serio errore nelle questioni che mi propongono di trattare.

Possiamo allora addirittura supporre che i neutroni che si considerano abbiano tutti la stessa velocità. Vogliamo anzitutto affrontare il seguente problema: un fascio di neutroni termici cade su uno strato infinitamente spesso di paraffina, limitato da una superficie piana; alcuni di questi neutroni dopo aver vagato nella paraffina, tornano a uscire dalla superficie; altri invece vengono catturati. Si tratta di calcolare la frazione (*albedo*) dei neutroni che riesce dalla paraffina, che cioè viene riflessa dalla superficie. È facile convincersi che, se il numero N di cammini percorso in media da un neutrone è molto grande, la probabilità di riuscita è molto vicina a uno, e diventa uno per $N = \infty$. (Si potrebbe pensare all'eventualità che un neutrone penetri nell'interno della paraffina, allontanandosi indefinitamente dalla superficie. La probabilità di questo evento è nulla).

Supponiamo ora di misurare l'intensità del fascio di neutroni incidenti sulla paraffina nel problema precedente, interponendo sul cammino del fascio una lastrina sottile d'argento e misurando la radioattività provocata nella lastrina dai neutroni; supponiamo anche di misurare collo stesso metodo l'intensità dei neutroni riflessi (1): si domanda il rapporto delle due intensità. Il problema sembra identico al precedente, in realtà è diverso, poichè l'attività della lastrina dipende anche dalla distribuzione angolare dei neutroni incidenti.

La soluzione di questo problema permette anche come vedremo di studiare un altro problema interessante cioè quello della distribuzione angolare dei neutroni termici uscenti dalla superficie di un blocco di paraffina in cui si trovi una sorgente di neutroni (per es. $RaEm + Be$).

2. Limitandoci a problemi piani e stazionari, per cui:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

e tenendo presente che il valore assoluto della velocità è fisso, potremo considerare la f , equazione (1), come una funzione soltanto di x e di u . Possiamo anche alterare lievemente il significato di f , supponendo che

$$(2) \quad f(x, u) d\tau du$$

(1) In pratica la cosa è alquanto diversa ved. oltre; ved. anche il lavoro cit. in nota (1) a p. 775.

rappresenti il numero dei neutroni compreso nell'elemento di volume $d\tau$ con u compreso in un elemento du . Possiamo inoltre supporre che il valore della velocità sia uno; in tal modo u diventa il coseno dell'angolo formato dall'asse delle x colla direzione del movimento del neutrone. Indicando con λ il cammino libero medio, si vede facilmente che, nelle ipotesi fatte, l'equazione fondamentale diventa:

$$(3) \quad u \frac{\partial f}{\partial x} = a - b$$

con:

$$(4) \quad b = \frac{1}{\lambda} f(x, u)$$

e:

$$(5) \quad a = Q(x, u) + \frac{N-1}{N} \frac{1}{2\lambda} \int_{-1}^{+1} f(x, \xi) d\xi$$

dove Q è un termine che rappresenta (eventualmente) la creazione dei neutroni termici a partire da neutroni più veloci; nel problema dell'albedo il termine Q non dovrà venire considerato.

Sia $x = 0$ il piano che limita la paraffina. Evidentemente il numero dei neutroni incidenti sulla paraffina per unità di tempo e superficie, con velocità compresa tra u e $u + du$, è dato da $uf(0, u) du$. Se supponiamo che la distribuzione angolare dei neutroni incidenti sia quella data dalla legge del coseno, dovrà essere $f(0, u)$ indipendente da u ; con una ovvia normalizzazione giungiamo così alla condizione al contorno:

$$(6) \quad f(x, u) = 2 \quad \text{per } x = 0, u > 0.$$

L'albedo sarà data, secondo che si considera il rapporto tra il numero dei neutroni uscenti e quello degli entranti oppure il rapporto delle attività nella lastrina (supponiamo per semplicità che questa sia infinitamente sottile) da:

$$(7a) \quad p = \int_0^1 f(0, -u) u du / \int_0^1 f(0, u) u du$$

oppure:

$$(7b) \quad q = \int_0^1 f(0, -u) du / \int_0^1 f(0, u) du.$$

Per calcolare p e q dobbiamo in definitiva integrare l'equazione integro-differenziale:

$$(8) \quad \lambda u \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{N-1}{2N} \int_{-1}^{+1} f(x, \xi) d\xi - f$$

con le condizioni al contorno (6) e:

$$(9) \quad f(x, u) \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow \infty.$$

3. Come orientamento consideriamo dapprima un semplice caso unidimensionale. Allora si ha $u = \pm 1$, e si può supporre che $f(x, +1)$ e $f(x, -1)$ rappresentino il numero dei neutroni che si muovono verso destra o rispettivamente verso sinistra. L'integrale nell'equazione (8) è sostituito semplicemente dalla somma delle due f . Il problema si risolve allora immediatamente, e si trova che l'*albedo* è uguale a:

$$\frac{N - \sqrt{N}}{N + \sqrt{N}}$$

Questo risultato mi è stato cortesemente indicato dal prof. Fermi che l'aveva dedotto in altro modo.

Torniamo ora al problema tridimensionale; faremo uso del fatto che N è molto grande. Come vedremo p e q sono funzioni di N del tipo: $1 - a/\sqrt{N} + \dots$ come l'*albedo* nel caso unidimensionale. Trascurando potenze superiori di $1/\sqrt{N}$, calcoleremo a esattamente per l'*albedo* p ; per q ci dovremo invece accontentare di un risultato approssimato, ma, credo, sufficientemente preciso.

Cerchiamo anzitutto una soluzione della (8) di tipo esponenziale:

$$(10) \quad f(x, u) = g(u) e^{-\alpha x}.$$

Essa non soddisferà naturalmente alle condizioni (6), ma ci sarà utile ugualmente. Si trova per α la condizione:

$$(11) \quad \frac{N}{N-1} = \int_{-1}^{+1} \frac{du}{1 - \alpha \lambda u}.$$

Dobbiamo ora considerare due casi: o $\alpha \lambda < 1$ e allora la (11) diventa:

$$\frac{N}{N-1} = \frac{1}{\lambda \alpha} \log \frac{1 + \lambda \alpha}{1 - \lambda \alpha}$$

che ha una sola soluzione (i valori negativi di α non ci interessano):

$$(12) \quad \alpha = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{3}{N}} + \dots$$

Oppure $\alpha \lambda > 1$ e allora l'integrale in (11) diventa indeterminato; qui si potrebbe procedere ugualmente, usando la definizione di Cauchy, e facendo in seguito uso della funzione δ di Dirac. Ma forse è più convincente ricorrere

alla ben nota analogia tra un'equazione integrale e un sistema di equazioni lineari, analogia che svilupperemo nel paragrafo seguente, per una risoluzione numerica del problema. È allora facile convincersi che anche tutti i valori: $\alpha\lambda > 1$ hanno un senso, non solo, ma che la soluzione del nostro problema (6), (8), (9) si può ottenere come sovrapposizione di queste varie esponenziali. Tra queste la (12) si stacca per la lentezza della caduta. L'andamento generale della funzione f , al variare di x , è quindi il seguente: in vicinanza di $x = 0$ si ha una caduta (o eventualmente una salita) molto ripida, che si estende cioè per un tratto dell'ordine del cammino libero λ , seguito da un tratto esponenziale a caduta lenta (estensione dell'ordine di $\lambda\sqrt{N}$).

È importante per noi che il coefficiente con cui l'esponenziale lenta compare nella soluzione che ci interessa si può trovare senza calcoli, a meno di termini infinitesimi quando $N \rightarrow \infty$. Infatti, per $N = \infty$ la soluzione è nota, si ha $f = 2$ per x e u qualunque. In questo caso dunque il tratto ripido iniziale scompare, e l'esponenziale lenta, che è ora una costante, ha coefficiente 2.

Ora è facile dimostrare che:

$$(13) \quad 1 - p = \frac{1}{N\lambda} \int_0^{\infty} dx \int_{-1}^{+1} f(x, u) du$$

ciò significa semplicemente che la differenza tra il numero dei neutroni entranti e quello di quelli uscenti è uguale al numero dei neutroni che vengono catturati nella paraffina. Volendo calcolare l'integrale in (13) a meno di termini superiori in $1/\sqrt{N}$, basterà l'approssimazione:

$$(14) \quad f(x, u) = 2 e^{-\sqrt{\frac{3}{N}} \frac{x}{\lambda}} + \dots$$

da cui si ricava:

$$(15) \quad p = 1 - \frac{4}{\sqrt{3} N} + \dots$$

che è il risultato annunciato per l'albedo p .

4. Dobbiamo ora integrare in qualche maniera l'equazione (8), non bastando per il seguito considerazioni come la precedente. Ho adottato per questo un metodo approssimato, che mi sembra sufficientemente preciso. Esso si fonda sull'analogia già ricordata dell'equazione (8) con un sistema di $2n$ equazioni differenziali lineari, a coefficienti costanti, in $2n$ incognite. Vogliamo in altre parole, sostituire all'integrale in (8) una media pesata dei valori di f in $2n$ punti dell'intervallo da -1 a $+1$.

Siano questi:

$$u_{-n}, u_{-n+1}, \dots, u_{-1} ; \quad u_1, \dots, u_n$$

con

$$(16) \quad u_{-i} = -u_i ; \quad 0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n < 1.$$

Poniamo:

$$(17) \quad f(u_i) = f_i \quad \int_{-1}^{+1} f(u) du = \sum_{i=-n}^{+n} R_i f_i$$

dove i pesi R_i saranno scelti in modo opportuno, e tali che, per semplicità, $R_{-i} = R_i$. Avremo ora da risolvere il problema:

$$(18) \quad \lambda u_i \frac{df_i}{dx} = \frac{N-1}{2N} \sum_{k=-n}^{+n} R_k f_k - f_i$$

che corrisponderà a quello reale tanto meglio, quanto più precisa sarà la formula di interpolazione (17).

Pel nostro scopo è opportuno usare una formula che dia la massima precisione possibile con un piccolo numero di punti. Per questo ho scelto il metodo di integrazione di Gauss ⁽¹⁾; con $n = 3$, ho preso per u_1, u_2, u_3 , le radici di:

$$P_3(2u-1) = 0$$

dove P_3 è il terzo polinomio di Lègendre. Si ha:

$$u_1 = \frac{1 - \sqrt{\frac{3}{5}}}{2} ; \quad u_2 = \frac{1}{2} ; \quad u_3 = \frac{1 + \sqrt{\frac{3}{5}}}{2}$$

con:

$$R_1 = R_3 = 5/18 ; \quad R_2 = 8/18.$$

Si trova così, con un calcolo un po' lungo, ma facilissimo, che, imponendo: $f_1 = f_2 = f_3 = 2$ per $x = 0$, dev'essere:

$$(19) \quad \begin{cases} f_{-1} = 2 - 1.466 \sqrt{3/N} \\ f_{-2} = 2 - 2.324 \sqrt{3/N} \\ f_{-3} = 2 - 3.127 \sqrt{3/N} \end{cases} \quad \text{per } x = 0.$$

(1) Ved., per es., COURANT-HILBERT, *Methoden der Math. Physik*.

Con queste si ritrova naturalmente il valore già dato per l'albedo p . Si può ora anche calcolare la q :

$$q = \frac{\sum_{i=1}^3 R_i f_{-i}}{\sum_{i=1}^3 R_i f_i}$$

dà:

$$(20) \quad q = 1 - \frac{2.00}{\sqrt{N}} + \dots$$

5. La soluzione approssimata (19) ci permette anche di risolvere il terzo problema a cui avevamo accennato, o meglio di ottenere alcune interessanti indicazioni in proposito.

Per semplificare la questione, consideriamo ancora la strato di paraffina infinitamente spesso di cui ci siamo occupati finora; supponiamo che in seno alla paraffina vengano creati dei neutroni termici, dovremo ora introdurre il termine Q ; di questo supporremo che sia indipendente dalla posizione e isotropo, dunque indipendente da u . Queste condizioni sono in realtà un po' diverse da quelle che si realizzano in pratica.

L'equazione fondamentale si scrive ora:

$$(21) \quad \lambda u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{N-1}{2N} \int_{-1}^{+1} \varphi(x, \xi) d\xi - \varphi + \lambda Q.$$

Al posto della (6) si avrà la condizione:

$$(22) \quad \varphi(x, u) = 0 \quad \text{per } x = 0, u > 0$$

che esprime che nella paraffina non entrano neutroni dall'esterno. Si domanda la distribuzione angolare dei neutroni uscenti.

Si vede immediatamente che la soluzione cercata è:

$$(23) \quad \varphi(x, u) = N\lambda Q - \frac{N\lambda Q}{2} f(x, u)$$

dove f è la soluzione del problema (6), (8), (9) già studiato.

Dalla (23) possiamo anzitutto ricavare una relazione importante. Supponiamo di introdurre una sottilissima lastrina, per es. d'argento, in una sottile fessura nell'interno della paraffina, a grande distanza dal bordo. La lastrina verrà attivata dai neutroni termici proporzionalmente a:

$$I_i = \int_{-1}^{+1} \varphi(\infty, u) du = 2N\lambda Q.$$

Appoggiamo ora la lastrina sulla superficie, l'attività prodotta dai neutroni sarà proporzionale a:

$$(24) \quad I_e = \int_0^{\pi} \varphi(0, -u) du = \frac{1-q}{2} I_i.$$

Dal rapporto delle due attività si ricava dunque l'albedo q . È in sostanza così che l'albedo è stata misurata da Amaldi e Fermi ⁽¹⁾.

Se ora ci serviamo delle formule approssimate (19), troviamo:

$$(25) \quad \begin{cases} \varphi_{-1} = 1.27 \lambda Q \sqrt{N} \\ \varphi_{-2} = 2.01 \lambda Q \sqrt{N} \\ \varphi_{-3} = 2.71 \lambda Q \sqrt{N} \end{cases} \quad \text{per } x = 0.$$

Come si vede, la distribuzione angolare dei neutroni uscenti dalla paraffina scarta nettamente dalla legge del coseno (a cui corrisponderebbe $\varphi = \cos \vartheta$).

Se si portano i punti (25) in un diagramma $u (= \cos \vartheta)$, φ si trova che essi stanno quasi esattamente su una retta. Più precisamente i valori (25) corrispondono assai bene alla legge di distribuzione:

$$(\cos \vartheta + \sqrt{3} \cos^2 \vartheta) d\Omega$$

che come il prof. Fermi mi ha cortesemente mostrato ⁽²⁾ si può anche dedurre in modo molto più semplice.

Ritengo che il metodo qui sviluppato possa venire applicato utilmente anche a vari altri problemi.

(1) Ved. nota (1) a p. 775.

(2) Ved. lavoro cit. in nota (3) a p. 775.

Fisica. — *Sul calcolo dei calori latenti di ebollizione.*
Nota di P. GUARESCHI, presentata ⁽¹⁾ dal Sòcio T. LEVI-CIVITA.

Il lavoro di allontanamento di una molecola dalla superficie libera di un liquido ad una distanza infinita è stata studiata da Dupré ⁽²⁾ e da Edser ⁽³⁾ i quali hanno rappresentato questo lavoro in funzione delle caratteristiche fisiche del liquido. Edser ha espresso il lavoro totale w necessario per spostare una molecola dalla superficie piana all'infinito con la formula seguente

$$(1) \quad w = \frac{2 \pi k N_1}{3 (n_1 - 4) \sigma^{n_1 - 4}}$$

dove k è la costante di attrazione e N_1 è il numero di molecole per unità di volume ($2.7 \cdot 10^{19}$), σ il diametro molecolare e n_1 la potenza che interviene nella legge di attrazione molecolare rappresentata dalla relazione $f = \frac{k}{r^{n_1}}$.

In quest'ultima f è la forza di attrazione che si esercita alla distanza r fra i due centri delle molecole, e k è indipendente da r .

Moltiplicando questo lavoro per N_1 si ottiene il lavoro richiesto per convertire l'unità di volume in un infinitamente tenue vapore, lavoro che corrisponde al calore latente per unità di volume del liquido, purchè la temperatura sia così bassa che la densità di vapore possa essere trascurata.

Edser ottiene così la seguente formula per il calore latente per unità di volume λ_1 che secondo i risultati ottenuti da Dupré egli pone uguale alla coesione C del liquido:

$$(2) \quad \lambda_1 = w N_1 = \frac{2 \pi k N_1^2}{3 (n_1 - 4) \sigma^{n_1 - 4}} = C.$$

Partendo dai concetti sovraesposti possiamo supporre che l'energia w necessaria per allontanare una molecola dalla superficie liquida sia proporzionale al numero di urti delle molecole contro questa superficie di separazione. Fatta questa ipotesi, se si indica con v la frequenza d'urto delle molecole contro la superficie liquida, potremo scrivere la (1) sotto la forma:

$$(3) \quad w = \frac{2 \pi k N_1}{3 (n_1 - 4) \sigma^{n_1 - 4}} = H v.$$

(1) Nella seduta del 17 maggio 1936.

(2) DUPRÉ, *Theorie Dynamique de la chaleur*.

(3) E. EDSER, *Molecular attraction and physical property of liquid*. Fourth Congress Report Colloid Chemistry, 1922.

Ma nella (3) la costante H rappresenta il momento della quantità di moto molecolare che io ho dimostrato nelle mie Note ⁽¹⁾ precedenti essere costante per tutte le molecole e uguale a $\frac{m_H}{m_e} h$ e quindi di valore $1,21 \cdot 10^{-23}$, mentre il valore di v è fornito per ogni liquido dal rapporto $\frac{\bar{v}}{l}$, dove \bar{v} è la velocità media delle molecole e l è il loro libero percorso.

Moltiplicando la (3) per il numero di Avogadro N si otterrà l'energia espressa per molecola grammo ossia $Nw = NHv$ e dividendo per il volume molecolare (volume per molecola grammo) del liquido e per il coefficiente di associazione (volume della molecola associata) si otterrà il calore latente per unità di volume, ossia

$$\lambda_i = \frac{wN}{\alpha V} = \frac{N}{\alpha V} H v$$

dove α è il coefficiente di associazione del liquido alla temperatura di ebollizione.

Come già nelle mie Note succitate, supponiamo ancora che il moto delle molecole sia un moto chiuso, cioè a traiettorie chiuse, e periodico per modo che v possa essere definito come il numero di urti della molecola che si considera, contro altra avente uguale moto chiuso. Immaginando le molecole come soggette ad una forza centrale e che compiano un moto chiuso, esse sono pur sempre libere di rotare ma sono disturbate nel loro moto dal numero di urti mutui. Supponiamo ancora, come già nella mia Nota (4), che la molecola che si considera nei successivi urti compia un moto chiuso risultante dal moto proprio e dalle deviazioni dovute agli urti successivi. L'energia della molecola che si considera potrà, per il principio di equipartizione, porsi sotto la forma

$$W = nw = nHv$$

dove n rappresenta il grado di libertà delle molecole. Moltiplicando per $\frac{N}{\alpha V}$ si avrà il calore latente totale λ del liquido

$$(4) \quad \lambda = \frac{nN}{\alpha V} H v.$$

Dunque per le molecole capaci di muoversi secondo vari gradi di libertà il valore dell'energia molecolare varierà pur sempre secondo valori discontinui, valori che sono rappresentati dalla quantità elementare Hv .

(1) P. GUARESCHI, *Sulla viscosità dei gas*, «Atti della R. Accademia dei Lincei»; Id., *Sulla viscosità dei liquidi*, «Atti della R. Accademia dei Lincei».

TABELLA I.

Liquido	Volume molecolare $V \left(\frac{\text{cm}^3}{\text{gr. mol.}} \right)$	Velocità $v \left(\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right)$ 10 ⁻⁴	libero percorso l cm 10 ⁷	$\nu = \frac{v}{l}$ 10 ⁻⁹	Grado di libertà di rotazione n	λ_c per $\alpha=1$ $\frac{\text{ergs}}{\text{cm}^3}$ 10 ⁻⁹	λ_s $\frac{\text{ergs}}{\text{cm}^3}$ 10 ⁻⁹	$\lambda_E = \frac{\beta \Gamma}{c}$ $\frac{\text{ergs}}{\text{cm}^3}$ 10 ⁻⁹	α_s	$\frac{\lambda_c}{\lambda_s} = \alpha_c$
<i>Liquidi non associati o quasi</i>										
Benzene	89	2.72 · 10 ⁴	21.9 · 10 ⁻⁷	12.4 · 10 ⁸	3	3.050 · 10 ⁹	2.736 · 10 ⁹	2.972 · 10 ⁹	1.01 (R. S.)	1.11
Tetracloruro di carbonio	97.3	3.939	32.6	12	3	2.729	3.154	3.511	0.95 (R. S.)	0.87
Solfuro di carbonio	60.3	3.75	25.5	10.8	3	3.568	4.226	3.915	0.87 (R. S.)	0.935
Etere etilico	103	2.794	24.7	11.3	3	2.457	2.616	2.584	0.97 (M. L.)	0.94
Cloroformio	80	2.2	26.5	8.5	3	2.325	3.757	3.786	1 (M. L.)	0.62
Acetito di metile	79	2.795	22.4	12.4	3	3.458	3.935	3.979	1.17 (B.)	0.88
<i>Liquidi associati</i>										
Acqua	18	5.65	40	14	3	17.02	20.05	5.79	1.3	0.85
Alcool metilico	40.5	4.24	40.1	10.5	3	5.659	8.833	3.099	2.19	0.64
Alcool etilico	57.5	3.5	34.1	10	3	3.781	8.759	2.887	1.49	0.43

Vediamo ora se i valori calcolati con la (4) dei calori latenti di ebollizione, per parecchi liquidi, hanno una corrispondenza con i valori conosciuti sperimentalmente. Nella tabella I ho calcolato oltre i valori dei calori latenti di ebollizione espressi in ergs/cm³ per $\alpha = 1$ anche il valore dei coefficienti di associazione come rapporto fra il valore di λ_c calcolato a quello sperimentale λ_s . I valori sperimentali di α non sono troppo precisi alle temperature di ebollizione ad ogni modo non presentano valori troppo discordanti da quelli calcolati. Per l'acqua e gli alcoli avendo posto il grado di libertà di rotazione uguale a 3 la corrispondenza fra il valore calcolato e quello sperimentale non è più buona e ciò viene a confermare che tali liquidi sono associati e che il valore dato dalla formula (4) è quello che sarebbe necessario per evaporizzare l'acqua e gli alcoli senza rompere l'associazione molecolare che esiste nel liquido.

Se noi per questi liquidi associati attribuiamo parecchi gradi di libertà corrispondenti non solo alla rotazione ma anche alla traslazione e alla deformazione molecolare, assumendo per l'acqua 9 gradi di libertà (3 + 3 + 3) e 12 per gli alcoli (3 + 3 + 6) si ottengono i seguenti valori dei calori latenti e dei coefficienti di associazione molecolare alla temperatura di ebollizione:

TABELLA II.

LIQUIDO	Gradi di libertà	λ_c	λ_s	α_s	α_c
Acqua	9	24.4	20.5	1.3	1.22
Alcool metilico	12	22.6	8.833	2.19	2.54
Alcool etilico	12	15.2	8.759	1.49	1.73

I coefficienti di associazione sono stati calcolati come rapporto fra il calore latente calcolato per $\alpha = 1$ e quello sperimentale. I valori trovati, specialmente per i liquidi non associati, dei coefficienti di associazione, si mantengono nei limiti di errore delle determinazioni sperimentali, determinazioni che sono sempre incerte appunto perchè i valori dati sono tutti stati ottenuti a temperature differenti dai diversi autori. Nei limiti di queste discrepanze sperimentali, sia i valori di λ che di α sono abbastanza buoni.

Ho voluto porre in una colonna della tabella I anche i valori dei calori latenti calcolati dall'Edser con la formula da lui data e cioè $\lambda_E = \frac{\beta T}{C_1}$ ⁽¹⁾

(1) E. EDSER, loc. cit.

dove β indica il coefficiente di dilatazione termica, T la temperatura assoluta e C , il coefficiente di compressibilità del liquido. Si può vedere che, se Edser ha ottenuto già delle buone approssimazioni, specialmente per i liquidi non associati, i valori da me calcolati con la (4) sono ancora più concordanti coi valori sperimentali anche se si volesse considerare sempre il coefficiente di associazione uguale all'unità. I valori di α sono quelli dati da Ramsay e Shields-McLeod-Bingham-Trouton e in gran parte riportati nel Landolt-Bornstein Tabellen e nell'International Critical Tables.

CONCLUSIONE. - Nelle mie Note I e II già citate ho definito la costante H che rappresenta il momento della quantità di moto delle molecole. La costante H ha il valore $1.21 \cdot 10^{-23}$ ergsec. Tale valore è esattamente 1840 volte il valore della costante di Planck ($h = 6.55 \cdot 10^{-27}$) cioè i due valori stanno fra loro come la massa dell'atomo di idrogeno a quello dell'elettrone. Non voglio nella presente Nota e in tale campo giungere a generalizzazioni che potrebbero sembrare arrischiate. Ad ogni modo avendo supposto che le molecole abbiano dei moti chiusi, scritta la espressione $H\nu$ come rappresentante per ogni tipo di molecola l'unità di energia molecolare, abbiamo calcolato i valori dei calori latenti di ebollizione per vari liquidi in relazione sempre ai loro coefficienti di associazione.

I risultati ottenuti sono i più corrispondenti ai dati sperimentali che fino ad ora si siano potuti calcolare partendo dalle caratteristiche fisiche dei liquidi.

Per analogia col quanto di Planck la costante H si potrebbe chiamare *molquanto* di azione molecolare, mentre, ponendo $\gamma = H\nu$, γ sarebbe il molquanto di energia molecolare. Questa si presenta in conformità come un multiplo intero del molquanto di energia elementare a norma della formula

$$W = nH\nu,$$

n indicando il numero di gradi di libertà della molecola.

Chimica. — *Struttura dell'acetilcellulosa solubile in acetone o « cellite »* ⁽¹⁾. Nota di G. CENTOLA presentata ⁽²⁾ dal Socio N. PARAVANO.

La triacetilcellulosa con 62,5 % di acido acetico, solubile in cloroformio ed insolubile in acetone, è l'unico prodotto ben definito per costituzione chimica e struttura cristallina, ottenuto finora per acetilazione diretta della cellulosa.

Corrisponde al grado massimo di esterificazione delle fibre ed ha avuto numerose applicazioni industriali fino a quando Miles ha indicato un nuovo procedimento ⁽³⁾ mediante il quale è possibile la preparazione di speciali acetilcellulose con basso contenuto di acetile e preferibili alla prima per le seguenti vantaggiose proprietà ⁽⁴⁾:

a) solubilità in solventi più economici ed a basso punto di ebollizione (acetone ecc. ⁽⁵⁾);

b) capacità di dare masse plastiche con la canfora e con altri plastificanti;

c) migliori proprietà meccaniche (maggiore flessibilità e resistenza degli oggetti preparati con essa).

Il procedimento seguito dal Miles (leggermente modificato poi in successivi brevetti) è il seguente:

si prepara prima la triacetilcellulosa facendo reagire 100 gr. di cellulosa con la seguente miscela:

anidride acetica	300 gr.
acido acetico glaciale	400 »
acido solforico conc.	6 ccm.

a circa 40°–50° per 36–40 ore. Le fibre si sciolgono nella miscela acetilante dando una massa vischiosa giallo-bruna più o meno trasparente che, se versata in acqua, lascia separare un precipitato bianco solubile in cloroformio (triacetilcellulosa).

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 17 maggio 1936.

(3) Brevetto americano 838 350; Brevetto francese 358 079; 371 447; Brevetto tedesco 252 706.

(4) CAILLE, « Chim. & Ind. », 12, 443 (1924).

(5) Per notizie dettagliate circa i solventi delle acetilcellulose ved. KAUSH, *Handbuch der azetylcellulosen* (J. F. Lehmanns, München, 1933), p. 7 e sgg.

In seguito si saponifica parzialmente il prodotto diluendo la massa vischiosa, ottenuta nella prima fase della preparazione, con 120 ccm. di acido acetico al 50% e riscaldando a 40°–50° per 12–16 ore circa, fino a quando il prodotto che si separa con acqua risulta solubile completamente in acetone e soltanto plastico in cloroformio.

A questo punto, versando lentamente tutta la massa in acqua fredda, si ottiene l'acetilcellulosa solubile in acetone, o cellite, sotto forma di un precipitato bianco il quale contiene, a seconda delle condizioni di esperienza, all'incirca dal 48% al 56% di acido acetico.

Le notevoli proprietà di questa sostanza hanno permesso di sostituirla al cotone collodio per preparare pellicole e vernici non infiammabili e speciali tipi di rayon.

Si può supporre che essa stia alla triacetilcellulosa come il cotone collodio sta alla trinitrocellulosa.

Le nostre conoscenze sulla intima struttura della cellite, non sono molto precise, perchè, mentre dalla triacetilcellulosa è stato possibile ottenere dei roentgenogrammi nitidi dai quali sono state calcolate la struttura e le variazioni che in essa si verificano per azione di solventi e di gelatinizzanti, dalla cellite si sono ottenuti roentgenogrammi, costituiti da qualche alone molto diffuso, i quali non permettono nessun tentativo di interpretazione.

Generalmente si afferma che la cellite è amorfa perchè la irregolare distribuzione dei gruppi acetilici lungo le catene di residui glucosidici impedisce a queste di ordinarsi in un reticolo ben definito.

Mi sembra però logico ammettere che sul disordine delle molecole di cellite debba influire oltre a questa causa anche il metodo seguito nella acetilazione.

Difatti per ottenere triacetilcellulose ben cristallizzate ⁽¹⁾ è necessario acetilare la cellulosa conservandone inalterata la struttura fibrosa, mentre la triacetilcellulosa preparata con dissoluzione delle fibre nella miscela acetilante risulta cristallizzata imperfettamente.

Dato che è impossibile preparare la cellite conservando inalterata la struttura fibrosa della cellulosa di partenza, ho cercato di produrre in essa dei fenomeni di ricristallizzazione mediante trattamenti con alcuni liquidi a temperatura elevata.

Le esperienze sono riuscite facendo bollire con alcool metilico della cellite in polvere al 49,3% di acido acetico, corrispondente quindi all'incirca al diacetato di cellulosa ($\text{CH}_2\text{COOH} = 48,8\%$), preparata secondo il brevetto Miles, e delle pellicole di cellite ottenute per svaporamento di una soluzione acetonica al 5%.

Dopo 8 ore di ebollizione i preparati, i quali prima del trattamento risultavano amorfi, danno degli spettrogrammi nitidi ed abbastanza ricchi di righe.

(1) Non si intende parlare di sostanze cristallizzate macroscopicamente, ma di sostanze aventi un'intima struttura cristallina rivelabile solo ai raggi X.

In fig. 1 è riprodotto lo spettrogramma della cellite in polvere ricristallizzata; quello che si ottiene dalle pellicole è eguale per posizione ed intensità delle righe di interferenza, ma meno nitido.

Il contenuto di acido acetico rimane inalterato anche dopo prolungata ebollizione con alcool metilico e la trasformazione che si osserva negli spettri è da attribuirsi ad un processo di ricristallizzazione analogo a quello che si osserva nella stabilizzazione della trinitrocellulosa con alcool metilico bollente ⁽¹⁾.

Per eseguire dei calcoli precisi sulla struttura della cellite è necessario ottenere preparati che siano contemporaneamente cristallizzati ed orientati.



Fig. 1.

Mi sono servito a questo scopo di fili di rayon all'acetato di cellulosa, i quali si preparano facendo passare attraverso una filiera una soluzione acetonica di cellite e portando via il solvente in corrente di aria calda.

I fili di rayon all'acetato, nelle loro condizioni normali, danno uno spettrogramma nel quale si osserva un alone diffuso deformato in modo da assumere quasi la forma di un'ellisse con l'asse maggiore parallelo all'asse dei fili di rayon.

Da ciò risulta che le molecole di cellite non sono ordinate in un reticolo ben definito, ma che tuttavia presentano un accenno di orientamento nella direzione dell'asse dei fili.

Tale orientamento si origina nel processo di filatura durante il quale le lunghe molecole filiformi di cellite, costrette ad attraversare sotto pressione

(1) HESS e TROGUS, «Zeit. physik. Chem.», 12, 260 (1931).

i fori sottilissimi della filiera, tendono a disporsi in direzione parallela alla corrente della vena fluida, analogamente a quanto si verifica per altre soluzioni colloidali, le quali, sollecitate a scorrere attraverso tubi capillari, si orientano ed assumono una marcata birifrangenza.

Ho provato a cristallizzare la cellite in fili trattandola con alcool metilico bollente, ma i primi risultati non sono stati soddisfacenti, perchè lo spettrogramma ottenuto dopo questo trattamento, anche rivelando evidenti segni di ricristallizzazione, non risulta nè molto nitido, nè perfettamente orientato.

Ho osservato che il rayon all'acetato di cellulosa, sotto l'azione dei vapori di alcool metilico, diventa leggermente plastico ed in tali condizioni

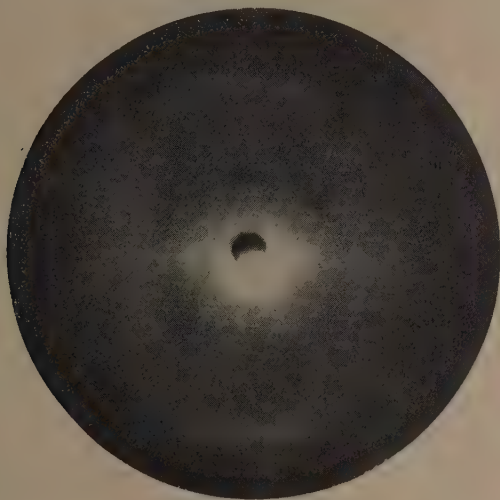


Fig. 2.

può essere stirato fino ad assumere una lunghezza all'incirca doppia di quella iniziale.

Tale allungamento è irreversibile e le fibre rimangono allungate permanentemente a differenza di quanto si verifica per la lana.

È stato possibile ottenere fili di rayon contemporaneamente cristallizzati ed orientati sottoponendo ai vapori di alcool metilico fascetti di fili cui venivano applicati degli opportuni pesi.

I fili così trattati danno buoni roentgenogrammi di fibra (fig. 2) dai quali è possibile eseguire calcoli più precisi circa la struttura della sostanza in esame.

Nella tabella seguente sono riportati i calcoli eseguiti per il diagramma fibroso riprodotto in fig. 2 e, per confronto, quelli eseguiti sulle macchie principali di interferenza della cellulosa naturale e della triacetilcellulosa II ⁽¹⁾.

(1) NÁRAY-SZABÓ, «Zeit. physik. Chem.», A, 134, 267 (1928).

TABELLA.

CELLULOSA			CELLITE			TRIACETILCELLULOSA		
inter-ferenze	sen ² θ	intensità	inter-ferenze	sen ² θ	intensità	inter-ferenze	sen ² θ	intensità
E ₁	0,0168	f	E' ₁	0,0053	ff ← E'' ₁	0,0053	ff	ff
			E ₂	0,0083	ff ← E'' ₂			
			E ₃	0,0130	f ← E'' ₃			
E ₂	0,0206	mf	→ E' ₄	0,0207	mf —	—	—	—
E ₃	0,0321	d	E' ₅	0,0255	m ← E'' ₄	0,0255	m	m
E ₄	0,0392	ff	→ E'' ₆	0,0393	f —	—	—	—
I ₁	0,0871	m	I' ₁	0,0227	m ← I'' ₁	0,0227	m	m
II ₁	0,0318	f	—	—	— II'' ₁	0,0260	d	d
II ₂	0,0632	m	II' ₀ (arco)	0,0213	mf ← II'' ₀	0,0212	mf	mf
III ₃	0,0861	f	III' ₀ (arco)	0,0525	f ← { III'' ₀	0,0488	f	f
					{ III'' ₁	0,0538	ff	ff

Nella tabella sono contrassegnate con la lettera E le macchie che compaiono sull'equatore della fotografia e con i numeri romani I, II, III le macchie della prima, seconda, terza iperbole. Gli indici superiori servono a differenziare fra loro le macchie dei tre spettrogrammi, gli indici inferiori indicano l'ordine successivo delle macchie di interferenza che si trovano sull'equatore o sulla stessa iperbole.

Lo spettrogramma della cellite in polvere non è stato preso in esame perchè esso rappresenta la trasformazione del diagramma fibroso del rayon all'acetato in un diagramma di polveri.

Dall'esame della tabella risulta che quasi tutte le macchie di interferenza dello spettrogramma della cellite sono dovute a piani reticolari perfettamente corrispondenti a quelli della triacetilcellulosa II.

Vi sono solo due macchie di interferenza che non trovano riscontro nello spettrogramma della triacetilcellulosa (E'₄ ed E'₆) e che corrispondono invece perfettamente a quelle attribuite ai piani reticolari 101 e 002 della cellulosa naturale.

Si potrebbe essere indotti a concludere che la cellite è costituita da un miscuglio di triacetilcellulosa e cellulosa, dato che nel suo spettro si riscontra presenza contemporanea delle righe di queste due sostanze.

Questa conclusione però è in contrasto non solo con le singolari caratteristiche di solubilità della cellite; ma anche col fatto sperimentale che con

nessun metodo è possibile frazionare la cellite in componenti acetilati in modo differente.

È possibile dare una spiegazione più verosimile della struttura intima della cellite e più in accordo con i dati sperimentali, se consideriamo, secondo la teoria di MEYER e MARK, la molecola cellulosica costituita dal concatenamento di numerosi aggruppamenti $C_6H_{10}O_5$.

Questi nella cellite sono acetilati solo in parte, e quindi la molecola di cellite risulta costituita dal concatenamento di vari residui glucosidici, alcuni dei quali sono completamente acetilati, altri solo parzialmente ed altri infine sono rimasti inalterati.

Dato che il numero di residui di glucosio che costituiscono una molecola di cellulosa è molto elevato, ciascuna molecola di cellite ha all'incirca una composizione chimica costante e quindi la cellite presenta proprietà ben definite e caratteristiche.

I cristalli che si formano nel processo di ricristallizzazione risultano dall'impacchettamento regolare di un certo numero di molecole complesse e presentano di conseguenza una struttura un po' complicata: in alcune parti di essi si trovano vicini dei tratti di catene completamente acetilati e si ha l'ordinamento reticolare della triacetilcellulosa, in altre parti si trovano vicini dei tratti di catene non esterificati e si formano i piani reticolari della cellulosa inalterata.

Mineralogia. — *Carbon fossile nel mesozoico di Longobucco in Calabria*⁽¹⁾. Nota di F. PENTA, presentata⁽²⁾ dal Socio F. MILLOSEVICH.

Nell'applicazione sistematica della nota *reazione della lignina*⁽³⁾ a vari carbon fossili, dovuta eseguire per assodare il più esatto significato, ed il grado di attendibilità del metodo, prima di applicarlo ad un carbone mesozoico in esame⁽⁴⁾, sono stati trattati⁽⁵⁾, fra gli altri, alcuni saggi di carbone dell'Italia Meridionale, che, come *ligniti*, erano conservati nella collezione del nostro Gabinetto d'Arte Mineraria.

Il comportamento di uno di essi, catalogato appunto come « lignite » di Longobucco (provincia di Cosenza), fu del tutto simile a quello di un litantrace tipico (Steinkohle)⁽⁶⁾; questo risultato della reazione confermava

(1) Lavoro eseguito nel Gabinetto di Arte mineraria della R. Università di Napoli.

(2) Nella seduta del 3 maggio 1936.

(3) Secondo i vari autori, la lignite si può distinguere dai litantraci, riscaldandola in acido nitrico (diluito 1 : 10): mentre la lignite si scioglie e colora in rosso il liquido, il litantrace, in sostanza, nè si scioglie, nè colora in rosso il liquido.

(4) Al carbone mesozoico di Lagonegro (Lucania), per il quale vedi G. DE LORENZO, *Litantrace nel mesozoico di Lagonegro in Basilicata*. « Rendiconti R. Acc. Lincei », ser. 5^a, vol. XXXIII, fasc. I-II, 2° sem., p. 21. Roma, 1924.

(5) La relazione dettagliata delle ricerche eseguite in collaborazione col dott. Luigi Longo sarà pubblicata nel « Bollettino della Società dei Naturalisti di Napoli ». Riporto qui il quadro riassuntivo delle osservazioni più importanti; per la sua interpretazione vedi nota seguente.

(6) Mezzo grammo di carbone in polvere si riscaldava in 50 cm.³ di HNO₃ (diluito 1 : 10) per circa 3 ore o fino ad esaurita effervescenza, quando questa c'era e durava perfino oltre 12 ore. Indi si filtrava in una provetta, da una parte, e si lavava il residuo fino a neutralità, dall'altra.

I risultati, giusta il quadro succennato, comparati furono i seguenti:

Tutte le ligniti, esclusa quella del n. 12 e compreso l'Augenkohle di Saarbrücken (n. 17) dettero viva e prolungata effervescenza durante il riscaldamento.

Tutte le ligniti, nonchè il Cannelcoal (n. 14) e l'Augenkohle (n. 17) dettero un liquido da giallo a giallo bruno, se osservato per trasparenza, da rosso bruno a rosso se osservato per riflesso e finalmente rosso (giallo per alcuni), se si osservava dall'alto la superficie libera ed internamente alla provetta; tale liquido risultava cioè spiccatamente fluorescente, come si confermò, sottoponendolo entro vetri da orologi alle radiazioni ultraviolette provenienti dall'alto, nell'oscurità e poi con illuminazione elettrica. Precisamente sotto tali radiazioni tutte le ligniti, nonchè il Cannelcoal e l'Augenkohle, immediatamente davano una luminescenza giallognola persistente nell'oscurità; illuminati con luce elettrica riflettevano immediatamente luce bleu o bleuverdastra.

I litantraci tipici, il carbone di Longobucco e quello di Lagonegro non impressero al liquido colorazione sensibile, come pure i fenomeni di fluorescenza furono od appena in tracce e con lentezza appariscenti o del tutto inesistenti. Nelle antraciti non si ebbe nè

quanto già la sola considerazione geologica della regione di provenienza del carbone⁽¹⁾ faceva prevedere e cioè che dovesse trattarsi di un litantrace per lo meno nel senso geologico della parola, anziché di una delle nostre comuni ligniti.

Il carbone in oggetto si rinviene in territorio di Longobucco sulla Sila, in piccoli⁽²⁾ frammenti inclusi nelle argille fogliettate, le quali costituiscono straterelli, potenti da 5 a 20 cm.; tali straterelli argillosi, a loro volta, sono intercalati fra i banchi di potenza da 0.40 ad 1 m., di calcari ed arenarie liassiche⁽³⁾ costituenti le falde occidentali dei Monti Gravina e Serino.

colorazione, nè, in sostanza, fluorescenza. La ragione del comportamento dell'Augenkohle e del Cannelcoal va ricercato probabilmente nella natura stessa delle sostanze originarie che formarono questi due carboni.

Non rientra nell'argomento di questa comunicazione la ricerca delle sostanze contenute nei carboni, cui in soluzione nitrica vada attribuita la fluorescenza ancora non notata dagli studiosi di carboni fossili; ciò non pertanto, debbo osservare che la fluorescenza presentata, benchè un po' meno accentuata, dal cannel, carbone sapropelico per eccellenza e dall'Augenkohle, che macroscopicamente (frattura concoide caratteristica) gli somiglia abbastanza, concorre ad escludere che essa possa essere in relazione diretta o indiretta col contenuto di sostanza legnosa e cioè con lignina ancora conservata.

Riguardo al residuo, si osservò che, mentre nelle ligniti esso era sempre esiguo e costituito in genere da sostanze minerali, nel carbone di Longobucco ed in quelli di Lagonegro fu, come per i litantraci (ed antraciti), abbondante e costituito da carbone nero lucente.

Va notato che tale residuo (di Longobucco) sulla porcellana non smaltata lasciava una traccia nera senza un netto accenno al bruno, mentre il carbone originario vi lascia una traccia nettamente bruna. Dal che deve dedursi che le sostanze (bituminose?), le quali inducono il bruno, sono state estratte con l' HNO_3 .

(1) La contrada «Acqua di Pietra», ove si rinviene il carbone, giusta le indicazioni della carta geologica (F^o 230 al 100.000-Rossano) si sviluppa entro le formazioni (calcari ed arenarie) attribuite al Lias superiore; entro la striscia liassica silana, cioè, che da M. Paleoparto e M. Scarborato (a NO) si sviluppa verso SE, spingendosi fin sotto Monte Castelluzzo, ed è coperta, soltanto nella parte sud-orientale ed interrottamente, dai terreni del miocene.

Il territorio di Longobucco è noto da oltre due secoli per il suo giacimento di galena probabilmente argentifera, coltivato durante il 1700, e per gli indizi di minerale di zinco e ferro.

Da questo punto di vista vedi: G. RONZA, *Note sulle risorse minerarie dell'Italia Meridionale*, pp. 57-60, Tip. Piacevole. Napoli, 1927 ed il mio lavoro sui *Materiali da costruzioni dell'Italia Meridionale*, pp. 450, 452, 456, 459, 528, ed. 1935.

(2) Secondo le notizie che accompagnano il saggio, offerto diversi anni fa dall'Ufficio Miniere di Napoli al nostro Gabinetto di Arte Mineraria.

(3) E. CORTESE, *Descrizione Geologica della Calabria*. «Memorie descrittive. Carta Geologica d'Italia», vol. IX. Roma, 1895 e ristampa. Firenze, Tipografia Mariano Ricci, 1934; A. FUCINI, *Molluschi e Brachiopodi del Lias Inferiore di Longobucco (Cosenza)*. «Bull. Soc. Malac. It.», XVI. Pisa, 1892; A. FUCINI, *A proposito di due specie di Pecten del Lias Inferiore di Longobucco (Cosenza)*. «Atti Soc. Tosc. Sc. Nat.», Proc. Verb. VIII. Pisa, 1893; B. GRECO, *Alcune nuove forme di Brachiopodi del Lias Inferiore di Longobucco (Cosenza)*; *Nota preventiva*. «Atti Soc. Tosc. Sc. Nat.», Proc. Verb. VIII. Pisa, 1892; F. PENTA, *I materiali da costruzioni dell'Italia Meridionale*, vol. II, p. 528, Fondazione Politecnica del Mezzogiorno. Napoli, 1935.

Gli affioramenti del carbone furono osservati nella proprietà Berardi sulle falde occidentali di detti monti, in contrada «Acqua di Pietra», a destra del Torrente Ortiano (affluente del fiume Trionto) dopo circa 5 km. della mulattiera, che parte dalla località Pantano sulla strada Rossano-Longobucco.

Indizi dello stesso carbone, sotto forma di pezzi rimaneggiati, si rinvennero nel greto dell'Ortiano.

Dal punto di vista industriale, alla stregua delle notizie, non pare che possa attribuirsi al deposito in esame alcun interesse.

I caratteri macroscopici del carbone possono così riassumersi:

Colore della massa: grigio sporco; nella frattura fresca: nero splendente.

Colore della polvere: nero.

Colore della striscia sulla porcellana: marrone.

Frattura: dalla piana alla concoide; prevale la pianecciante con l'isolamento di pezzettini prismoidici a spigoli vivi (perpendicolarmente alla stratificazione). In alcune direzioni di frattura si nota ad occhio nudo una certa fibrosità.

Splendore: sulla frattura fresca, dal piceo al metallico iridescente.

Aspetto: dal legnoso al litoide (quest'ultimo là dove le superfici sono incrostate da sostanze minerali).

Consistenza: si spezza se, con un certo sforzo, si inflette con le mani. Non sporca.

Comportamento alla levigazione: si leviga facilmente senza bisogno di preventivi indurimento e fissaggio.

Comportamento all'ebollizione in HNO_3 : non dà effervescenza. Per la colorazione e la fluorescenza vedi nota (6) di p. 794 e tabella a pp. 798-801.

Comportamento con NaOH: 1 grammo di polvere di carbone, lasciato bollire per 3' in una soluzione di NaOH (1:10), ha dato un liquido, che, filtrato, ha tinta bruna, conservando però completa trasparenza.

Comportamento con benzolo bollente. Circa 2 decigrammi di polvere del carbone si sono immersi in circa 10 cm³ di benzolo bollente. Si è filtrato ed il liquido ottenuto, che nella provetta presentava colore giallo citrino per trasparenza e verdognolo per riflesso, si è sottoposto alle radiazioni ultraviolette, avendo cura che le radiazioni colpissero direttamente la superficie libera del liquido senza attraversare vetro. E si è ottenuto:

a) nell'oscurità, viva luminescenza viola-bleu, sia in provetta, che nel vetro da orologio.

b) con l'illuminazione elettrica, riflessi bleu della superficie del liquido, sia in provetta, che in vetro da orologio.

I caratteri microscopici rilevati da alcuni preparati lucidi («Anschliff») appositamente eseguiti di questo carbone, permettono di stabilire che esso è costituito da una massa fondamentale duritica (in aria: poco lucente con riflessi interni da giallo a rosso visibili a nicols incrociati; in olio: massa



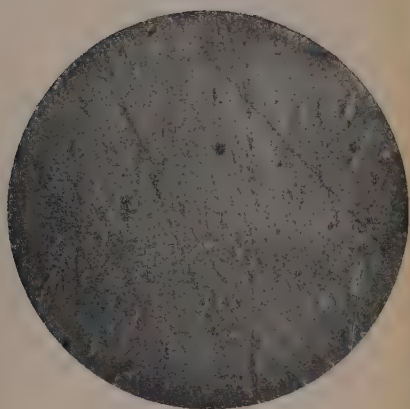
Fot. N.º 1.

Carbone liassico di Longobucco (Cosenza).

Microfotografia del "preparato lucido" (Anschliff).

In aria; ingrandimento: circa 25 volte.

In una massa fondamentale compatta (grigia nella fotografia) di "durite", sono distinte le vene (qui quasi rettilinee) del legno, carbonizzato in "vitrite" (bianca nella fotografia).



Fot. N.º 2.

Carbone liassico di Longobucco (Cosenza).

Microfotografia del "preparato lucido" (Anschliff).

In aria; ingrandimento: circa 25 volte.

In una massa fondamentale di "durite" (grigia nella fotografia) sono distinte le venature, qui tipicamente ondulate, del legno carbonizzato in "vitrite" (bianca nella fotografia).



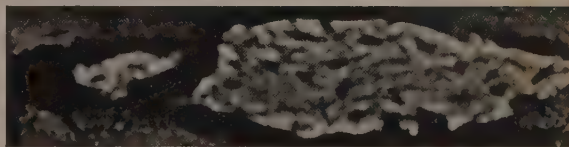
Fot. N.º 3.

Carbone liassico di Longobucco (Cosenza).

Microfotografia del "preparato lucido" (Anschliff).

In aria; ingrandimento: circa 100 volte.

Dettaglio delle venature vitritiche della microfotografia del N.º 2.



Fot. N.º 4.

Carbone liassico di Longobucco (Cosenza).

Microfotografia del "preparato lucido" (Anschliff).

In aria; ingrandimento: circa 100 volte.

Nella massa fondamentale duritica sporge, nel preparato, la lente "fusita" che conserva la struttura legnosa. Nella fotografia non sono più visibili strisce di vitrite, perchè, per mettere a fuoco la superficie fusitica, si è completamente la vitrite che, essendo più tenera, giace molto più prof

matta grigia con riflessi interni di colore da giallo a rosso visibili anche senza incrociare i nicols) con entro vitrite (figg. 1, 2 e 3) distribuita con l'aspetto delle venature del legno (tale vitrite soltanto in qualche particella più splendente rivela una certa anisotropia, cambiando rilievo ed estinguendosi solamente due volte però in un giro completo, indicando così un basso grado di carbonizzazione⁽¹⁾) e pezzi residui isolati fusitici con struttura legnosa. Tali lenticole fusitiche (fig. 4) con più alto rilievo della massa duritica (la quale a sua volta è più dura delle venature di vitrite) sono disposte parallele fra loro ed alle venature vitritiche adiacenti.

Nella massa fondamentale sono inoltre diffusi piccolissimi depositi puntiformi di pirite.

Se si potesse generalizzare l'osservazione eseguita su più preparati, ma ricavati tutti da un solo campione, si dovrebbe dedurre che il carbone proviene da accumuli di materiali prevalentemente legnosi abbastanza carbonizzati; ma ulteriori ricerche sono necessarie per poter concludere definitivamente.

La reazione della lignina per questo carbone, riuscita in sostanza negativa, anche secondo le vedute comuni, potrebbe confermare questa deduzione microscopica della piuttosto avanzata distruzione della lignina, ove però fosse accertato, come si è detto e come invece il cannelcoal, carbone di origine tutt'altro che legnosa, parrebbe escludere, che la reazione (colorazione rosso-bruna, e rossa per riflesso, nonchè spiccata fluorescenza), sia effettivamente rivelatrice di lignina e non di altro composto organico.

Ma indipendentemente da tutto ciò, ho ritenuto utile richiamare l'attenzione su questo carbone, sia per la importanza che esso riveste sotto il punto di vista geologico, già dal De Lorenzo espresso nel 1924 per il primo indizio conosciuto di carbone mesozoico dell'Italia Meridionale rinvenuto a Lagonegro (4), sia perchè questi rinvenimenti di carboni secondari⁽²⁾ potrebbero allargare il campo delle ricerche di carboni fossili, estendendolo anche nei terreni del mesozoico e precisamente in quelle plaghe ove i sedimenti del secondario assumano caratteri (di «produttivi», come si suol dire) più consoni a formazioni di masse vegetali e dove non si concentrarono poi le sollecitazioni tettoniche che, come a Lagonegro, con molta probabilità laminarono e sconvolsero, se addirittura non rimaneggiarono, il giacimento.

(1) E. STACH, *Lehrbuch der Kohlenpetrographie*, p. 96, ed. Borntraeger. Berlino, 1935.

(2) Di carboni mesozoici con caratteri di veri litantraci ed utilizzati industrialmente come tali se ne rinvennero in tante località che non è il caso qui ripetere e per le quali rimando al manuale di *Geologia* di G. ROVERETO, p. 173, ed. Hoepli, Milano, 1931, ed a E. RINNE, *La Science des roches*. (Traduzione francese, 13ª ed., p. 542). Parigi, ed. Larrière, 1928.

Risultati ottenuti riscaldando in HNO_3 , dil. 1:10, carboni
(Per i particolari, vedi Nota di F. PENTA)

Località di provenienza del carbone	Caratteri speciali del carbone ed osservazioni	Età geologica -del giacimento (in periodi o sottoperiodi)	Colore della traccia che il carbone lascia sulla por-
Baragiano (Prov. di Potenza)	Lignite, soltanto indizi	Pliocene (?)	marr.
Montefalcone (Prov. di Benevento)	Lignite, soltanto indizi	Pliocene o miocene	marr.
S. Marco la Catola (Prov. di Foggia)	Lignite, eseguite ricerche	Miocene (?)	marr.
Briatico (Prov. di Catanzaro)	Lignite, già coltivato	Miocene superiore	marr.
Andretta (Prov. di Avellino)	Lignite, eseguite ricerche	Pliocene	marrone.
Morcone (Prov. di Benevento)	Lignite, già coltivato	Pleistocene	marrone.
Longobucco (Prov. di Cosenza)	Lignite, soltanto indizi	Lias superiore	marrone.

(1) Con la lampada a vapori di mercurio, schermata con vetro all'ossido di nichel, dell'Istituto di Chimica Farmac.

per età geologica e per natura vegetale originaria ed antraciti
nel « Boll. Soc. Nat. di Napoli » del 1936).

Risultati ottenuti riscaldando 1/2 gr. di polvere di carbone in 50 cm³ di HNO₃ (1:10)

durante il riscaldamento	Residuo insolubile osservato asciutto	Liquido filtrato				
		Alla luce del giorno in tubi di saggio			Comportamento alle radiazioni ultraviolette in vetri da orologi (1)	
		Osservato per trasparenza	Osservato per riflesso	Superficie libera osservata dall'alto ed internamente al tubo	nella oscurità	illuminato da luce elettrica comune
perdurata se ore	piccolo di color giallo-sporco	giallo	bruno-giallastro	rosso-vermiglione	luminescenza giallastra, che appare immediatamente	riflesso bleu della superficie e che appare immediatamente
perdurata se ore	piccolo e marrone-scuo	giallo	bruno-giallastro	rosso-vermiglione e opalescente	luminescenza giallastra, che appare immediatamente	riflesso bleu della superficie e che appare immediatamente
perdurata se ore	piccolo e rosso-bruno	giallo un po' più bruno	bruno-giallastro	rosso-carminio	luminescenza giallastra, che appare immediatamente	riflesso bleu della superficie e che appare immediatamente
perdurata se ore	piccolo e marrone-scuo con scaglie varie	bruno-rossastro	nettamente rosso	rosso-opalescente	luminescenza giallastra, che appare immediatamente	riflesso bleu della superficie e che appare immediatamente
perdurata se ore	piccolo e marrone-scuo con scaglie varie	bruno-rossastro	nettamente rosso	rosso-opalescente	luminescenza giallastra, che appare immediatamente	riflesso bleu della superficie e che appare immediatamente
e durata un 2 ore	notevole e marrone-chiaro	giallo-citrino	giallo (sulla sup. aranciato)	giallo	luminescenza giallastra, che appare immediatamente	riflesso bleu della superficie e che appare immediatamente
suna escenza	abbondante nero-lucente	giallo appena visibile	incolore	giallo molto debole	tracce appena un po' più pronunziate del n. 16 e dopo un po' di tempo	niente

stra Università e per gentile concessione del Direttore, prof. Giovanni Malquori, che qui ringrazio.

Segue: TABELLA.

Numero d'ordine	Località di provenienza del carbone	Caratteri speciali del carbone ed osservazioni	Età geologica del giacimento (in periodi o sottoperiodi)	Colore della traccia che il
8	S. Martino Sannita (Prov. di Benevento)	Lignite, soltanto indizi	Pliocene	marrone
9	Terni (Prov. di Terni)	Miniera Colle d'Oro, Lignite, giacimento coltivato	Pliocene	marrone
10	Agnana (Prov. di Reggio Calabria)	Lignite picea, giacimento coltivato	Eocene	nero
11	Bacu Abis-Gonnesa (Sardegna)	Lignite picea, giacimento coltivato	Eocene	nero
12	Sieblös-Rhön	Lignite (Braunkohle, Paraffinkohle)	Terziario	nero
13	Lagonegro (Prov. di Potenza)	Litantrace (vedi De Lorenzo, op. cit.), già eseguite ricerche	Trias superiore	nero
14	Wigan Lancastershire (Inghilterra)	Cannelcoal	Carbonico	nero
15	Schalke (Westfalia)	Flötzkohle	Carbonico	nero
16	Essen-Ruhr (Prussia renana)	Steinkohle (Fettkohle)	Carbonico	nero
17	Saarbrücken (Prussia renana)	Augenkohle (frattura ed aspetto caratt.)	Carbonico o Permico	nero
18	Swansea (Inghilterra)	Antracite	Carbonico	nero
19	Ogliastra (Sardegna)	Antracite, giacimenti coltivati	Permico	nero
20	Donetz (Russia)	Antracite	Carbonico	nero

Risultati ottenuti riscaldando 1/2 gr. di polvere di carbone in 50 cm³ di HNO₃ (1:10)

durante il riscaldamento	Residuo insolubile osservato asciutto	Liquido filtrato				
		Alla luce del giorno in tubi da saggio			Comportamento alle radiazioni ultraviolette in vetri da orologi	
		Osservato per trasparenza	Osservato per riflesso	Superficie libera osservata dall'alto ed internamente al tubo	nella oscurità	illuminato da luce elettrica comune
come al n. 1	piccolo di color marrone	giallo	bruno-giallastro	rosso-vermiglione	come al n. 1	come al n. 1
come al n. 1	piccolo di color giallo-ocra	giallo-citrino	giallo-citrino	giallo-carico	come al n. 1 ma un po' meno pronunziato	come al n. 1
come al n. 1	abbondante nero-lucente	giallo-bruno	bruno-giallo	rosso-vermiglione	come al n. 1	come al n. 1
come al n. 1	abbondante nero- brunastro con particelle lucenti	giallo-bruno	bruno-rossastro	rosso-carminio	come al n. 1	come al n. 1
nessuna rivescenza	abbondante nero- lucente con parti bruno-chiaro	lieve giallo	lieve giallo	giallo	come al n. 9	come al n. 1
nessuna rivescenza	abbondante nero-lucente	giallo appena un po' più forte del n. 7	appena una traccia di giallo	giallo molto debole	tracce e dopo un po' di tempo	niente
nessuna rivescenza	abbondante nero-lucente	lieve giallo più del n. 13	lieve giallo	giallo-citrino	come al n. 9	come al n. 1
nessuna rivescenza	abbondante nero-lucente	incolore	incolore	incolore	nienté	niente
nessuna rivescenza	abbondante nero-lucente	incolore	incolore	incolore	tracce e dopo un po' di tempo	niente
come al n. 1	nero-lucente e meno abbond. del n. 13	bruno	bruno-rossastro	rosso-vermiglione	come al n. 1	riflesso bleu-verdastro
nessuna rivescenza	abbondante nero-lucente	incolore	incolore	incolore	niente	niente
nessuna rivescenza	abbondante nero-lucente	incolore	incolore	incolore	tracce	niente
nessuna rivescenza	abbondante nero-lucente	incolore	incolore	incolore	niente	niente

Antropologia. — *Il tricocicloforo di Sergio Sergi e la sua prima applicazione*⁽¹⁾. Nota di G. LANDRA, presentata⁽²⁾ dal corrisp. F. RAFFAELE.

Lo studio del capello è di fondamentale importanza in antropologia; una delle maggiori difficoltà in chi studia il capello microscopicamente è la determinazione esatta dei diametri trasversali. Al riguardo si conoscono due soli metodi: l'uno basato sullo studio di sezioni trasversali perfettamente ortogonali, l'altro sull'impiego del rotatore capillare di Zeiss. Ambedue questi metodi possono dare risultati soddisfacenti solo quando si abbia una particolare passione e una particolare pratica in questa indole di ricerche, altrimenti i risultati ottenuti sono dominati dalla possibilità di errore; questo spiega le contraddizioni che spesso si registrano nelle misurazioni eseguite dai diversi AA. Ma indipendentemente da quelli che possono essere gli errori metodici o accidentali — dei quali io mi astengo dal trattare — ne esiste uno di straordinaria importanza, che dipende dalla morfologia stessa del capello.

Il capello non deve essere assolutamente considerato come un cilindro più o meno appiattito, perchè i diametri trasversi, alla radice, al punto di mezzo, alla estremità superiore sono notevolmente diversi, e il valore per cui diversificano varia in relazione a fattori molteplici, quali ad esempio la forma e la lunghezza. Volendo concretizzare questi concetti, io direi che un capello fortemente ulotrico è paragonabile nel suo insieme a un cilindroide appiattito leggermente fusiforme, che un capello lissotrico è come un fuso allungatissimo quasi affatto appiattito, e che un capello cimatotrico si trova in condizioni intermedie. Orbene, quando noi pratichiamo delle sezioni trasversali, siamo veramente sicuri di praticarle dove i diametri trasversi sono massimi? Ammesso anche che con tecnica appropriata e paziente abbiamo garantito l'ortogonalità del taglio, che valore possono avere le nostre misure assolute e gli indici che su esse calcoliamo? Ben inteso, io non dubito della importanza orientativa di questo metodo, ma critico la sua esattezza matematica. Teoricamente si potrebbe sezionare trasversalmente tutto il capello e poi misurare tutte le fette ottenute, ma una impresa simile, tenuto anche conto che in antropologia è necessario fare molte comparazioni, costituirebbe un lavoro fantastico.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Antropologia dell'Università di Roma.

(2) Nella seduta del 17 maggio 1936.

Per ovviare a questi inconvenienti, e per facilitare l'esatta misurazione dei diametri trasversali dei capelli in numerosi gruppi etnici (al riguardo la letteratura antropologica è assai deficiente), il prof. Sergio Sergi ha fatto costruire un semplicissimo apparecchio, da lui chiamato tricocicloforo, che è stato sperimentato per la prima volta da me, dandomi modo di comple-

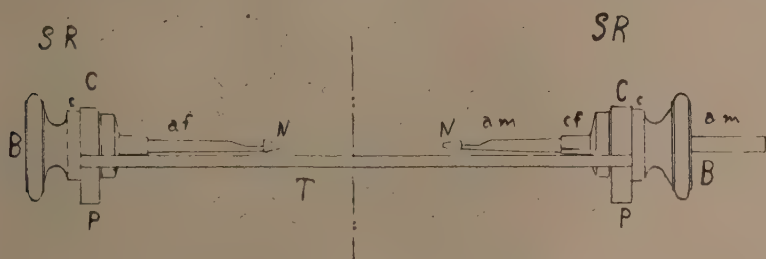


Fig. 1. - Il tricocicloforo di Sergio Sergi visto di lato.

tare lo studio dei capelli presso alcuni gruppi etnici dell'Africa Settentrionale e Orientale.

Il tricociclororo è fondato su questo concetto: fare ruotare un capello sul suo asse longitudinale, avendolo sottomesso ad una tensione sufficiente

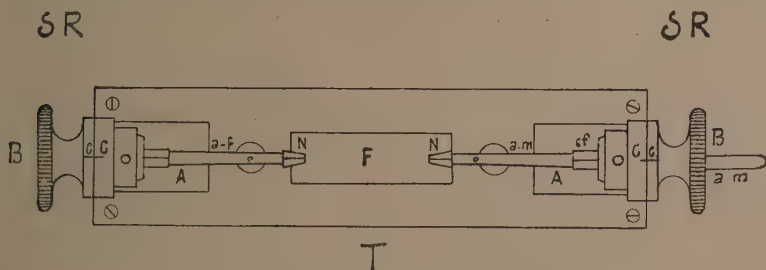


Fig. 2. - Il tricocicloforo di Sergio Sergi visto dall'alto.

a mantenerlo ben teso, sotto l'obbiettivo d'un microscopio munito di micrometro; trovare in tal modo il diametro trasverso massimo per tentativi e misurarlo; quindi ruotare il capello d'un angolo retto e misurare questo nuovo diametro ortogonale al precedente; spostare lungo l'asse longitudinale il capello, determinando in tal modo queste due misure, e quante altre vogliamo, nei punti dove sono massime e dove sono minime.

Il tricocicloforo consta di due parti essenziali, ambedue costruite in ottone: il telaio (T) e il sistema rotante (SR). Il telaio (T) ha forma rettangolare, è lungo circa 120 mm., largo 30 mm.; nel mezzo del telaio è aperta una finestra (F) rettangolare di 35 mm. \times 12 mm.; alle due estre-

mità vi sono altre due aperture (A) pure rettangolari 25×15 . Il telaio (T) è completato alle due estremità, superiormente da un cuscinetto (C) graduato, inferiormente da un piede (P).

Il sistema rotante (SR) è composto di due bottoni (B) di comando zigrinati, ognuno dei quali è solidale con un cerchio (c) graduato (le gradazioni di questo corrispondono a quelle del cuscinetto), e con un'asta (a). Una di queste aste è fissa (i) l'altra mobile (m); scorrevole entro un colletto a frizione (cf). Ognuna delle aste termina con una navetta (N) di forma appropriata, munita di una scanalatura (sc) e di un forellino (fo).

Ecco come si usa il Tricocicloforo: si prende il capello da esaminare, se è corto, o una parte di esso, mediante una pinza da microscopia assai fina per una estremità, e la si introduce nella scanalatura (sc) della navetta (N). Se il capello è sufficientemente lungo, è facile assicurarlo al forellino (fo) mediante un nodo; ma se esso è molto corto ed elastico (come il capello ulotrico lanoso), è più opportuno incollarlo con una colla adatta. In tal modo si fissano le due estremità del capello alle due navette (N), quindi si regola l'asta mobile (a m) in modo da farlo stare ben teso. Montato così il capello sul tricocicloforo, si porta tutto l'apparecchio sul portaoggetti del microscopio, avendo prima fatto coincidere le medesime gradazioni dei cerchi (c) con quelle dei cuscinetti (C).

Il telaio (T) viene collocato sul portaoggetti in modo che la sua finestra (F) corrisponda a quella del portaoggetti stesso. Come è facile comprendere, in tal modo il capello viene illuminato perfettamente dallo specchio del microscopio. A questo punto la prima cura da prendere è verificare se il capello sia attorcigliato su se stesso o no; nel primo caso è assai facile ruotando l'asta mobile (a m) e osservando al microscopio, metterlo nelle migliori condizioni di normalità. Così sistemato il capello, si monta sul microscopio un buon micrometro oculare, che precedentemente abbiamo confrontato con un micrometro obiettivo. Ruotando d'uno stesso numero di gradazioni i due bottoni di comando (B) è facile trovare il punto dove il diametro trasverso è massimo; proceduto a questa misurazione in micron, si ruota il capello d'un angolo retto e si procede ad una seconda misurazione. Ma prima di passare a questa seconda misurazione, io posso esaminare come varia il diametro trasverso massimo, per tutta la lunghezza del capello visibile, spostando tutto il tricocicloforo sul portaoggetti come credo opportuno. Se poi ritengo opportuno di fare alla stessa altezza del capello la misura di numerosi diametri trasversali, è facile fissare il tricocicloforo al portaoggetti con le comuni molle di acciaio, che servono per i portaoggetti di vetro.

Come si vede, l'impiego del tricocicloforo è essenzialmente pratico. Il capello viene comunemente esaminato con questo metodo, trattandosi per lo più di deboli ingrandimenti, senza mezzi ottici intermedi; ma è assai facile, desiderandolo, adattare al tricocicloforo l'impiego di essi.

Io ho preceduto, alla fine del mio studio microscopico sui capelli degli Acioli (ulotrichi lanosi), dei Dauada (ulotrichi crespi e ulotrichi molto arricciati), dei Tébu (ulo-cimatotrichi e cimatotrichi), e dei Tuaregh (cimatotrichi), alla misura del diametro trasverso massimo e di quello ad esso ortogonale, presi rispettivamente presso la radice, nel punto di mezzo, e nella estremità superiore, in 10 capelli per ognuno dei rappresentanti più caratteristici di questi gruppi, ottenendo i seguenti risultati medii:

Acioli	mm.	0,047 : 0,037	0,083 : 0,056	0,051 : 0,041
Dauada	»	0,046 : 0,036	0,084 : 0,046	0,043 : 0,035
Tébu	»	0,044 : 0,037	0,087 : 0,044	0,043 : 0,036
Tuaregh	»	0,043 : 0,034	0,100 : 0,065	0,043 : 0,036

Da una osservazione di questa tabella sembrerebbe dunque provato che nel graduale passaggio dal capello ulotrico a quello cimatottrico si fa sempre più notevole la differenza dei valori misurati alle estremità del capello da quelli esaminati dove sono massimi.

La misurazione del diametro trasverso massimo, dove è massimo, io la ho estesa a 10 capelli per ognuno degli individui che sono indicati nelle colonne verticali di questa tabella:

	I	II	III	IV	V	Media
Acioli (ul. lanoso) mm.	0,080	0,080	0,081	0,081	0,080	0,080
Dauada (ul. crespo) »	0,081	0,081	0,081	—	—	0,081
Dauada (ul. m. arr.) »	—	—	—	0,082	0,084	0,083
Tébu (ulotrico) . »	0,084	—	—	—	—	0,084
Tébu (ulo-cim) . »	0,086	0,087	0,087	0,087	0,086	0,087
Tébu (cimatottrico) »	0,091	0,092	0,088	0,087	0,089	0,089
Tuaregh (cimatottrico) »	0,099	0,092	0,097	0,098	0,099	0,097

Come si vede da questa tabellina, il diametro trasverso massimo va gradatamente aumentando con il passaggio dalle forme estreme di ulotrichia a quelle cimatotriche; questo aumento va pari passo con quello dell'indice di appiattamento, che ho trovato essere 60 negli Acioli, 62 nei Dauada, 63 nei Tébu, 73 nei Tuaregh, e con il diametro delle eliche o spirali, che rispettivamente è di mm. 2,0; 5,5; 5,7; 9,1.

Questi valori in complesso si avvicinano per gli Acioli a quelli trovati da altri AA. nei popoli negri, per i Tuaregh a quelli dei mediterranei in

senso lato; i Dauada e i Tèbu rappresentano il graduale passaggio da un tipo all'altro.

Il tricicloforo, del quale ho mostrato la prima applicazione, ha dunque una serie di vantaggi.

1° permette di determinare l'indice di appiattimento senza fare le sezioni trasversali, e senza ricorrere allo scomodo rotatore capillare di Zeiss.

2° permette di investigare le variazioni dei diametri trasversali per tutta la lunghezza del capello stesso, dando così la possibilità d'una ricostruzione grafica di quella che è la reale morfologia del capello.

3° per chi non rinuncia alle sezioni trasversali, dà una possibilità di controllo, potendosi, prima di includere e sezionare il capello stesso, procedere a facili misurazioni.

4° è ancora suscettibile di una serie di applicazioni riguardanti la determinazioni di altre caratteristiche del capello, quali ad esempio la sua elasticità, resistenza alla rottura. ecc. ecc., sulle quali non è il caso che io mi dilunghi.

5° infine è essenzialmente pratico, permettendo a chi possieda un microscopio con micrometro, senza nessuna conoscenza di tecnica microscopica di fare interessanti misurazioni.

Ogni progresso, anche piccolo, della tecnica può, se impiantato su basi rigorose, essere il mezzo di tutta una serie di ricerche sistematiche, le quali possono aprire nuovi orizzonti.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 5 giugno 1936 Anno (XIV)

Presidenza del prof. F. MILLOSEVICH

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sulla normalizzazione delle equazioni differenziali lineari.* Nota⁽¹⁾ del Corrisp. E. BOMPIANI.

1. Si consideri l'equazione differenziale lineare omogenea

$$(1) \quad \frac{d^n x}{dt^n} + \binom{n}{1} p_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \binom{n}{2} p_2 \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \dots + p_n x = 0.$$

È più che noto che n suoi integrali indipendenti, $x^i = x^i(t)$ con $i = 1, \dots, n$, possono assumersi come coordinate proiettive omogenee dei punti di una curva C proiettivamente individuata in S_{n-1} dalla (1), nel senso che un'altra qualsiasi n -upla di integrali della (1) individua una curva omografica a C . Viceversa C non individua la (1), poichè le trasformazioni

$$(2) \quad x^i(t) = \rho(t) \bar{x}^i(t) \quad , \quad (3) \quad \bar{t} = \bar{t}(t)$$

non alterano C ma bensì la (1); sicchè, com'è notissimo, le proprietà proiettive di C sono le proprietà di (1) invarianti rispetto alle trasformazioni (2) e (3).

Normalizzare la (1) significa fare una determinata scelta di $\rho(t)$ e $\bar{t}(t)$, e trovare la equazione cui soddisfano le $\bar{x}^i(\bar{t})$. È anche noto che si può

(1) Presentata nella seduta del 5 giugno 1936.

sempre rasformare la (1) in modo da darle la *forma canonica di Laguerre-Forsyth*

$$(4) \quad \frac{d^n x}{dt^n} + \binom{n}{3} q_3 \frac{d^{n-3} x}{dt^{n-3}} + \dots + q_n x = 0.$$

È scopo della presente Nota di dare un significato geometrico della normalizzazione; in particolare di quella canonica di Laguerre-Forsyth. Si vedrà che su ogni ente ∞^1 (i cui elementi possano pensarsi come « punti » di uno spazio proiettivo) rimane definito, in modo geometrico, un parametro proiettivo; in particolare si trova così il birapporto di quattro generatrici di una rigata di uno spazio qualsiasi ⁽¹⁾.

2. — SIGNIFICATO GEOMETRICO DI UNA NORMALIZZAZIONE.

Osserviamo anzitutto che:

Fissare una curva C_1 sulla sviluppabile circoscritta a C (in corrispondenza biunivoca con C , determinata dalle tangenti a C) equivale a fissare, a meno di una costante moltiplicativa, il fattore ρ ; in altri termini: le proprietà invarianti di (1) rispetto alle trasformazioni (3) sono le proprietà proiettive della curva C e di una curva C_1 tracciata sulla sua sviluppabile ⁽²⁾.

Se inoltre sulla sviluppabile circoscritta a C_1 si fissa una curva C_2 (in corrispondenza biunivoca con C_1) si viene a fissare, a meno di una sostituzione lineare intera, il parametro t ; in altri termini: lo studio della (1) rispetto alle trasformazioni $x = c\bar{x}$, $t = ht + k$ (c, h, k costanti) equivale allo studio proiettivo della configurazione delle tre curve C, C_1 (sulla sviluppabile di C) e C_2 (sulla sviluppabile di C_1) ⁽³⁾.

3. Visto il significato geometrico di una qualsiasi normalizzazione, cerchiamo quello relativo alla *normalizzazione canonica* di Laguerre-Forsyth ⁽⁴⁾.

Ricordiamo che la (4) si muta in un'equazione dello stesso tipo (cioè priva dei termini con le derivate d'ordine $n-1$ e $n-2$) per tutte e sole le trasformazioni (che diremo *canoniche*)

(1) Per le rigate di S_3 vedasi E. CARTAN, *Sur les développantes d'une surface réglée*. « Bull. Acad. Roumaine », 1931. La nozione è stata estesa alle curve di un'iperquadrica, insieme ad una classificazione di queste da G. TZITZÉICA, *Sur les courbes quadratiques*. « C. R. Acad. des Sciences », 1931; e *Sur les courbes quadratiques*. « Atti Congresso Internazionale dei Matematici ». Zurigo, 1932.

(2) La curva C_1 è quella descritta dal punto di coordinate $\frac{d\bar{x}_i}{dt}$: su di essa non ha alcuna influenza la scelta del parametro t .

(3) La curva C_2 è quella descritta dal punto di coordinate $\frac{d^2 \bar{x}_i}{dt^2}$.

(4) Si veda, p. es., E. I. WILCZYNSKI, *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*. B. G. Teubner, 1906, ch. II, § 4.

$$(5) \quad \rho = \frac{1}{c} (\gamma t + \delta)^{n-1}, \quad (6) \quad \bar{t} = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta, c$ costanti arbitrarie. Poichè ρ dipende, a meno di una costante moltiplicativa, solo da $\omega = \delta/\gamma$, è da attendersi che la riduzione alla forma canonica di Laguerre-Forsyth equivalga a definire, sulla sviluppabile circoscritta a C , ∞^2 curve C_1 e sulla sviluppabile circoscritta a ciascuna di queste una curva C_2 . Tutte queste curve devono risultare determinate da C stessa.

4. — CURVE DERIVATE LOCALI.

È naturale chiedersi quale sia il luogo dei punti derivati $\frac{d^s \bar{x}^i}{dt^s}$, ove $1 \leq s \leq n-1$, di un determinato punto P di C per le trasformazioni canoniche (5) e (6). E si trova:

I punti derivati s -esimi ($1 \leq s \leq n-1$) di un punto P di C , che si ottengono variando comunque la normalizzazione canonica descrivono una curva razionale normale Γ^s , CURVA s -ESIMA DERIVATA LOCALE, situata nello S_s osculatore in P a C , i cui punti dipendono esclusivamente da ω .

Fra le curve Γ^s passano notevoli relazioni geometriche.

Una qualsiasi delle Γ^s , $1 \leq s \leq n-2$, si ottiene segnando con lo S_s osculatore a C in P gli spazi osculatori S_{n-s-1} a Γ^{n-1} ; la corrispondenza proiettiva che così si stabilisce fra le varie Γ è precisamente quella in cui si corrispondono i punti derivati dei vari ordini rispetto ad una stessa normalizzazione canonica o, più in generale, determinati dallo stesso valore di ω .

Non parlerò ora di altre relazioni fra queste curve; è essenziale invece mostrare che esse (aventi finora una definizione analitica) possono costruirsi geometricamente a partire da C .

5. — COSTRUZIONE DELLA CONICA DERIVATA LOCALE.

Diamo ora la costruzione di Γ^2 : da essa, come si vedrà (n. 8), si ricavano geometricamente le altre Γ^s .

Si consideri la curva razionale normale C^{n-1} avente in P con C contatto d'ordine $n+1$; i suoi S_{n-3} osculatori segano il piano osculatore in P a C nei punti di Γ^2 (1).

Se non si vuole introdurre la C^{n-1} si può procedere così:

Si seghino gli S_{n-3} osculatori a C con lo S_2 osculatore in P : si ha una curva la cui conica osculatrice in P è Γ^2 .

(1) Soltanto nel caso di una curva C piana questa Γ^2 è la conica osculatrice; e per questo caso l'interpretazione geometrica della forma canonica di Laguerre-Forsyth è data in WILCZYNSKI, loc. cit.

6. — LE CURVE DERIVATE CANONICHE.

Preso ad arbitrio un punto P_1 sulla tangente in P a C si conduca per P_1 la tangente (in $P_2 \neq P$) alla conica Γ^2 .

Se si fa variare P_1 sulla tangente in P e poi P su C si hanno ∞^2 rette P_1P_2 le quali involuppano, sulla sviluppabile di C , ∞^1 curve C_1 . Mentre P descrive C e P_1 descrive una C_1 , il punto P_2 corrispondente descrive una curva C_2 . Orbene:

Ad ogni coppia di curve C_1, C_2 così costruite corrispondono, a norma del n. 2, normalizzazioni canoniche corrispondenti ad un determinato valore di ω ; e al variare della coppia si ottengono tutte.

Diremo perciò le ∞^1 curve C_1 e le ∞^1 curve C_2 le prime e le seconde curve derivate canoniche; ciascuna di esse è luogo dei punti derivati primi o rispettivamente secondi di P variabile su C per un determinato valore di ω .

Si definiscono poi naturalmente le successive curve derivate canoniche C_s in relazione (ad ogni valore di ω cioè) ad ogni C_1 (luoghi dei punti derivati s -esimi di P nella normalizzazione scelta, o meglio per il valore di ω fissato spettante a C_1).

7. — PARAMETRO PROIETTIVO SU C .

La proprietà più importante delle curve C_s è la seguente:

Le curve canoniche C_1 punteggiano proiettivamente le generatrici della sviluppabile circoscritta a C .

Ciò è pressochè evidente se si riflette che, fissato P , le rette P_1P_2 determinano su PP_1 e sulla tangente infinitamente vicina a C punteggiate proiettive (fra loro e a quella descritta da P_2 su Γ^2).

Ne segue che si può parlare di *birapporto* di quattro curve C_1 e, se si vuole, dei quattro punti nei quali esse incontrano C . In altri termini:

Le curve canoniche C_1 trasportano proiettivamente su qualsiasi altra generatrice e su C un parametro proiettivo disteso su una generatrice arbitraria.

Dato un sistema qualsiasi ∞^1 di elementi di uno spazio qualsiasi, che possano pensarsi come «punti» di uno spazio proiettivo (eventualmente ad un numero maggiore di dimensioni) rimane determinato su di esso un parametro proiettivo e in particolare il birapporto di quattro suoi elementi.

Tale, p. es., è il caso di una rigata o di un sistema ∞^1 di S_k in S_r ($r > k$) proiettivo; o di ∞^1 cerchi orientati nella geometria di Laguerre.

8. — COSTRUZIONE GEOMETRICA DELLE CURVE DERIVATE LOCALI E DELLE CURVE DERIVATE CANONICHE.

Quanto s'è detto caratterizza già le normalizzazioni canoniche di un'equazione differenziale (1). Tutto dipende, come s'è visto, dalla costruzione delle coniche Γ^2 , in base alle quali si costruiscono le ∞^1 curve C_1 e C_2 .

È interessante però completare la ricerca mostrando come si costruiscono le altre curve derivate locali e canoniche a partire dalle Γ^2 .

Le ∞^2 rette $P_1 P_2$ riescono tangenti sia alle ∞^1 curve C_1 sia alle ∞^1 coniche Γ^2 . Esse costituiscono dunque un sistema di ∞^2 rette con due falde focali, o congruenza di Laplace; le due falde focali sono la sviluppabile circoscritta a C, Φ_1 , luogo delle $\infty^1 C_1$ e la superficie Φ_2 luogo delle $\infty^1 \Gamma^2$. Anzi, poichè mentre P_1 descrive una C_1 il punto P_2 descrive una C_2 , risulta che su Φ_2 il doppio sistema coniugato è costituito dalle $\infty^1 \Gamma^2$ e dalle $\infty^1 C_2$.

È naturale allora esaminare la *successione delle trasformate di Laplace* relativa al doppio sistema coniugato di Φ_2 .

Risulta quanto segue:

Ad ogni curva C appartenente ad S_{n-1} è associata una superficie Φ_2 con un doppio sistema coniugato costituito dalle ∞^1 coniche Γ^2 e dalle ∞^1 curve derivate canoniche C_2 . La successione delle trasformate di Laplace ad esso relative è

$$\Phi_0 \equiv C, \quad \Phi_1, \quad \Phi_2, \dots, \Phi_{n-1}, \quad \Phi_n$$

ove Φ_0 è la curva C , Φ_1 la sua prima sviluppabile e Φ_n è una curva che chiude la successione dall'altra parte.

Su ciascuna Φ_s , $1 \leq s \leq n-1$, il doppio sistema coniugato è costituito dalle ∞^1 curve Γ^s e dalle ∞^1 curve C_s (delle quali si ha qui dunque la costruzione geometrica). Le forme differenziali invarianti associate alle equazioni di Laplace⁽¹⁾ della successione precedente sono le

$$h_s dtd\omega = \frac{s(n-s)}{(t+\omega)^2} dtd\omega \quad s = 0, \dots, n$$

e risultano tutte a curvatura costante.

La curva Φ_n su cui si chiude la successione è quella descritta dal punto

$$\frac{d^n x}{dt^n} = - \binom{n}{3} q_3 \frac{d^{n-3} x}{dt^{n-3}} - \dots - q_n x;$$

essa coincide con la curva di partenza C o quando questa è piana o più in generale, per $n > 3$, quando $q_3 = \dots = q_{n-1} = 0$.

9. — BIRAPPORTO DI QUATTRO PUNTI SOPRA UNA SUPERFICIE DI S_3 .

Sopra una superficie dello spazio ordinario esiste⁽²⁾ un sistema ∞^4 di curve proiettivamente invariante (per collineazioni e correlazioni). Dati

(1) Credo di aver notato per primo l'esistenza di queste forme invarianti di un'equazione di Laplace (ottenute moltiplicando ciascuno degli invarianti relativi h, k di Darboux per i differenziali delle variabili); cfr. *Ricerche analitiche e geometriche sull'equazione di Laplace e Sulla geometria dell'equazione di Laplace*. Questi « Rendiconti », 1927.

(2) E. BOMPIANI, *Un système de courbes d'une surface invariant par projectivités*. « C. R. Acad. des Sciences », 1935; vedi anche in fine ad una Nota di B. SEGRE, *Le linee proiettive ed un invariante d'immersione ecc.* Questi « Rendiconti », 1935.

quattro punti che determinino una di queste curve si può considerare il loro birapporto (nel senso del n. 7) su questa curva; il numero che così si ottiene, dipendendo soltanto dai punti dati e dalla superficie, può dirsi birapporto dei quattro punti sulla superficie.

10. — NORMALIZZAZIONE RELATIVA.

Occorre in molte questioni fissare una normalizzazione relativa di ρ e di \bar{t} , cioè assegnare per una scelta di $\rho(t)$ la funzione $\bar{t}(t)$. Assegniamo ρ e normalizziamo \bar{t} relativamente a ρ in modo che nell'equazione trasformata della (1) risulti nullo il coefficiente trasformato di p_1 ; e cerchiamo il significato geometrico di questa normalizzazione relativa.

Assegnare ρ vuol dire (n. 2) assegnare una curva, che ora diremo \bar{C}_1 per non confonderla con quelle derivate canoniche, sulla sviluppabile circoscritta a C .

Ciò fatto, si consideri il punto P_1 di \bar{C}_1 sulla tangente in P a C e la conica $\bar{\Gamma}^2$ che ha in P con Γ^2 contatto di 3° ordine e che tocca la tangente in P_1 a \bar{C}_1 .

Il punto di contatto P_2 della tangente in P_1 a \bar{C}_1 con $\bar{\Gamma}^2$ descrive, al variare di P su C la curva \bar{C}_2 che normalizza il parametro nel modo voluto.

S'è visto (n. 2) che fissate \bar{C}_1 e \bar{C}_2 rimane determinato su C un parametro affine (cioè t può assoggettarsi alle sole trasformazioni del tipo $\bar{t} = bt + k$); e poichè \bar{C}_2 nel nostro caso è determinata da \bar{C}_1 basta questa a determinare su C il parametro affine. Eccone il significato:

Si ripeta sulle ∞^1 coniche $\bar{\Gamma}^2$ relative alla coppia di curve C, \bar{C}_1 la stessa costruzione fatta al n. 6 sulle coniche Γ^2 ; cioè si considerino le ∞^1 curve \bar{C}_1 (fra le quali è quella data) involupate, sulla sviluppabile circoscritta a C , dalle tangenti alle coniche $\bar{\Gamma}^2$. Queste ∞^1 curve \bar{C}_1 punteggiano proiettivamente le generatrici della sviluppabile, cioè trasportano un parametro proiettivo dato su una generatrice su qualsiasi altra e anche su C . Se si assume sulla \bar{C}_1 data il valore ∞ del parametro, si ha appunto un parametro affine.

In particolare si ha un parametro affine sopra una curva \bar{C}_1 tracciata sopra una superficie di S_3 associando a \bar{C}_1 lo spigolo di regresso C (supposto non ridotto ad un punto) della sviluppabile circoscritta alla superficie lungo \bar{C}_1 ; più in particolare ancora tre punti di una superficie hanno (in generale) un invariante proiettivo che si ottiene prendendo come \bar{C}_1 la sezione piana per essi e considerando il rapporto semplice dei tre punti di C le cui tangenti contengono i tre punti dati⁽¹⁾.

(1) Una prima presentazione dei risultati qui esposti si trova in una mia Nota presentata (maggio 1936) all'Accademia Romana; dimostrazioni ed ulteriori sviluppi saranno pubblicati negli « Annali Scientifici dell'Università di Iasi », ove ho avuto occasione di esporli in alcune conferenze.

Matematica. — *Superficie algebriche e varietà a tre dimensioni a curve sezioni canoniche.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. G. FANO.

1. È noto che per ogni valore intero di $p \geq 3$ esistono nello spazio S_p superficie algebriche di ordine $2p-2$ (F^{2p-2}) coi generi tutti eguali alla unità e curve sezioni canoniche (C_p^{p-2} di S_{p-1}). Più particolarmente, per ogni p esiste una famiglia irriducibile di superficie così fatte, dipendente da 19 moduli, e la cui superficie generica contiene soltanto curve intersezioni complete con varietà V_{p-1} (sezioni iperpiane, e loro multipli). Queste infinite famiglie che si ottengono al variare del numero intero p sono birazionalmente distinte ⁽²⁾.

Per le varietà algebriche a 3 dimensioni, anche a curve sezioni canoniche e perciò con superficie sezioni F^{2p-2} del tipo precedente (varietà M_3^{2p-2} di S_{p+1}), coi generi tutti nulli e perciò non con, alcuni indizi davano invece a credere ch'esse potessero esistere solo per valori di p non superiori a un certo limite. Fra altro, per i valori più piccoli di p queste varietà contengono una rigata R di ordine decrescente al crescere di p (per $p=3, 4, 5, 6, \dots$ di ordine rispett. 320, 180, 128, 100, \dots) ⁽³⁾. Inoltre ognuna di queste M_3^{2p-2} , da una curva γ_π^n (di ordine n , genere π) in essa contenuta, almeno per valori di n non troppo elevati, si proietta in una $M_3^{2p'-2}$ del medesimo tipo, con $p' < p$, e contenente una rigata di ordine $n - 2\pi + 2$, immagine della γ_π^n . Era dunque a attendersi che, al crescere di p , l'ordine della rigata R dovesse gradualmente ridursi a zero, e dopo di ciò la successione delle M_3^{2p-2} avesse a interrompersi; e se anche per qualche valore di p si fossero trovate due o più M_3^{2p-2} differenti, e quindi complessivamente più successioni di tali M_3^{2p-2} , che così avvenisse per ciascuna di queste, sia pure per valori massimi diversi di p .

È anche noto da tempo che le varietà anzidette M_3^{2p-2} di S_{p+1} per $p=3, 4$ non sono razionali: esse hanno appunto forniti esempi (finora, i soli) di varietà algebriche a generi tutti nulli e non razionali ⁽⁴⁾. Per $p=4$

(1) Presentata nella seduta del 5 giugno 1936.

(2) ENRIQUES, « Rend. R. Accad. d. Scienze dell'Istituto di Bologna », seduta 13 dicembre 1908; SEVERI, « Atti R. Istit. Veneto », vol. 68 (parte II), 1908-09, p. 249 (adunanza 10 gennaio 1909).

(3) Per $p=3, 4$, ved. MARLETTA, *Sulla varietà delle rette ecc.* « Atti Accad. Gioenia di Catania », ser. 4^a, vol. 16, 1902. Per i valori successivi di p , ved. un mio lavoro in corso di stampa, nel volume: *Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari*. (Pavia, Tip. Rossetti, 1936).

(4) Ved. due mie Note negli « Atti della R. Accad. di Torino », vol. 43, 1907-08, p. 973; vol. 50, 1914-1915, p. 1067.

si ha una M_3^6 di S_3 , riferibile tuttavia a una involuzione di punti dello spazio S_3 : unico esempio finora accertato di involuzione irrazionale (di ordine 36) in S_3 ⁽¹⁾. I primi casi successivi ($p = 5, 6, 7, \dots$) son tuttora di dubbia razionalità, riferibili però sempre a involuzioni dello spazio S_3 ⁽²⁾, di ordine, in massima, decrescente; per $p \geq 7$, già a involuzioni di coppie di punti ⁽³⁾. Esse danno l'impressione (come già accennai qualche anno fa ⁽⁴⁾, e mi sono sempre confermato in tale opinione) di « non essere razionali, ma di accostarsi gradatamente alla razionalità ».

Sono ora riuscito a stabilire quanto segue (e ne esporrò la dimostrazione in altro lavoro, di prossima pubblicazione):

1°) *Le dette M_3^{2p-2} di S_{p+1} sono tutte razionali per $p > 10$, tranne un unico caso* (dubbio, e, come tale, ovvio): la varietà M_3^{24} di S_{14} riferibile a una forma cubica generale di S_4 in modo che alle sue sezioni iperpiane corrispondano su quest'ultima le F^6 segate da quadriche. I casi di dubbia razionalità, per le varietà in parola, sono così ridotti ai pochi $5 \leq p \leq 10$ (fra i quali sono compresi anche casi particolari notoriamente razionali), più il caso $p = 13$ già menzionato.

2°) *Le stesse M_3^{2p-2} di S_{p+1} esistono solo per $p \leq 37$ (cioè in spazi di dimensione ≤ 38):* massimo che è effettivamente raggiunto (ved. appresso). Per conseguenza, è anche 38 la massima dimensione dei sistemi lineari di superficie dello spazio S_3 coi generi tutti eguali all'unità. — Poichè nel piano i sistemi lineari di curve di genere uno sono di dimensione ≤ 9 , e quelli di dimensione 9 (massima) sono birazionalmente equivalenti al sistema ∞^9 di tutte le cubiche piane, si poteva pensare che una proprietà analoga potesse spettare in S_3 al sistema lineare ∞^{34} di tutte le superficie di 4° ordine, le quali sono appunto di genere uno (e il cui sistema rappresenta nel consueto senso una M_3^{64} di S_{34} del tipo qui in parola, per $p = 33$). Invece in S_3 esistono sistemi lineari di superficie di generi uno di dimensione > 34 , e più particolarmente due tipi, birazionalmente distinti, aventi la dimensione massima 38 (rappresentanti varietà M_3^{72} di S_{38}); e cioè:

a) *Il sistema delle superficie di 6° ordine aventi a comune un punto quadruplo e una conica doppia infinitesima infinitamente vicina ad esso.* Assunto il punto quadruplo come punto fondamentale [4] delle coordinate, e il cono

(1) ENRIQUES, questi « Rendiconti », ser. 5ª, vol. XXI, 1° sem. 1912, p. 81. Vedasi anche la Nota successiva di G. APRILE, nella « Rassegna di Matematica e Fisica », anno I, 1921, p. 133.

(2) Varietà rappresentabili pertanto mediante funzioni razionali di 3 parametri, tali che a uno stesso punto della varietà corrisponda un numero (costante) $k > 1$ di gruppi di valori dei parametri.

(3) Ved. il mio lavoro già menzionato negli *Scritti matematici in onore di Luigi Berzolari*.

(4) « Atti del Congresso internazionale dei matematici a Bologna » (1928), vol. IV (pubbl. 1931), p. 115.

che da esso proietta la detta conica come cono $x_2^2 - x_1 x_3 = 0$, questo sistema lineare è rappresentato dall'equazione:

$$x_4^2 (x_2^2 - x_1 x_3)^2 + x_4 (x_2^2 - x_1 x_3) \cdot f_3 + f_6 = 0$$

dove f_3, f_6 sono polinomi omogenei generici di 3° e 6° grado nelle x_1, x_2, x_3 (e i parametri non omogenei sono in numero di $10 + 28$, cioè appunto 38). La M_3^2 di S_3 rappresentata da questo sistema lineare può riferirsi al cono Γ_3^9 di S_{10} proiettante una superficie di ordine 9 di DEL PEZZO ⁽¹⁾, in modo che alle sue sezioni iperpiane corrispondano le intersezioni del cono Γ_3^9 con quadriche ⁽²⁾.

b) Il sistema lineare riferibile a quello delle superficie (di ordine 18) contenute in un S_0 -cono razionale normale V_3^8 di S_{10} , con cono quadrico direttore ⁽³⁾, e ivi segate dalle forme cubiche passanti per 6 piani del cono stesso. — Questo cono V_3^8 si proietta univocamente sullo spazio S_3 dall' S_6 determinato da 2 sue rette (non passanti pel vertice) e da 3 suoi punti, contenuti in 5 piani diversi. Se i 5 piani proiezioni dei precedenti, tutti appartenenti a un fascio, si indicano con $x_1 = 0, x_2 = 0$, e l'ultima terna con $\xi_3 (x_1, x_2) = 0$, e il punto proiezione del vertice (che sta sull'asse del fascio) si assume come punto [4], il sistema lineare ∞^{10} rappresentante il cono V_3^8 ha l'equazione:

$$x_4 x_1 x_2 \xi_3 + x_3 \xi_3 \varphi_2 + \varphi_6 = 0$$

dove φ_2, φ_6 sono forme binarie generiche nelle x_1, x_2 di gradi 2, 6. E per il sistema ∞^{38} , immagine del sistema $|F^{18}|$ sul cono V_3^8 , si trova l'equazione:

$$x_1^2 x_2^2 x_3^2 \xi_3^2 + x_4 x_1 x_2 \xi_3 (x_3 \xi_3 f_2 + f_6) + (x_3^3 \xi_3^3 + x_3^2 \xi_3^2 f_4 + x_3 \xi_3 f_8 + f_{12}) = 0$$

dove le f sono ancora forme binarie nelle x_1, x_2 di gradi eguali ai rispettivi indici (sicchè si hanno complessivamente 38 parametri) ⁽⁴⁾.

Questi due sistemi lineari ∞^{38} contengono entrambi un sistema lineare ∞^{37} di superficie razionali. Le due varietà M_3^{72} di S_3 che li rappresentano contengono pure entrambe una congruenza del 1° ordine di coniche, passanti per un punto fisso, e immagini entrambe della stella di rette [4]. I sistemi

(1) « Rendiconti Circolo Matematico di Palermo », vol. I, 1884-87, p. 241, n. 33.

(2) Altri sistemi lineari di superficie di generi uno, di dimensione minore, si ottengono, al pari di questo, raddoppiando i sistemi lineari a intersezioni variabili ellittiche determinati da ENRIQUES, questi « Rendiconti », ser. 5^a, vol. III, 1° sem. 1894, pp. 481, 536; « Mathematische Annalen », vol. 46, 1895, p. 179, in part. n. 11 e sg.

(3) In altri termini, il cono V_3^8 proiettante una rigata razionale normale di ordine 8 con conica direttrice.

(4) Queste superficie, di ordine 12, hanno il punto [4] come punto 10^{plo} con cono tangente (riducibile) fisso; la retta $x_1 = x_2 = 0$ come 9^{pla} , e 3 rette triple infinitamente vicine a questa nei piani $\xi_3 (x_1, x_2) = 0$. L'unica loro aggiunta, di ordine 8, si compone dei piani $x_1 = 0, x_2 = 0$, e della terna $\xi_3 (x_1, x_2) = 0$ contata due volte.

a), b) sono birazionalmente distinti, poichè il primo è divisibile per 2, e non così il secondo ⁽¹⁾.

2. La ricerca di cui ho testè esposti i risultati principali mi ha anche condotto a una classificazione, almeno provvisoria, delle superficie F^{2p-2} di S_p (classificazione per un dato p , perciò di carattere proiettivo), della quale aggiungo un cenno.

Un esempio, anzitutto ⁽²⁾. Sulla superficie generale F^4 di S_3 le ∞^9 quadriche segano un sistema lineare di curve, di grado 16, il quale conduce a rappresentare la detta F^4 sopra una superficie di ordine 16 in S_9 , che indicheremo con F^{16} , diversa dall'altra, che designeremo con F^{16} , pure di S_9 , contenente soltanto curve intersezioni complete. La F^{16} contiene in più il sistema lineare $|\gamma_3^8|$ immagine delle sezioni piane di F^4 e sottomultiplo (divisore) d'indice 2 delle proprie sezioni iperpiane. Entrambe dipendono da 19 moduli, e hanno il numero base $p = 1$ ⁽³⁾; ma esse appartengono a famiglie irriducibili distinte, probabilmente senza elementi comuni. Alla F^{16} si può imporre, con una sola condizione, di contenere una retta, e perciò, nella relativa famiglia, ogni sistema algebrico ∞^k comprende ∞^{k-1} superficie contenenti una retta (o una retta in più della propria superficie generica, se questa già ne contiene). Invece la F^{16} e tutte quelle della sua famiglia (tutte riferibili a superficie F^4) *contengono solo curve di ordine pari* (immagini proiettive di serie lineari segate su curve algebriche di S_3 dalla totalità delle quadriche); nessuna di esse contiene dunque rette.

Questo esempio può generalizzarsi, sostituendo alla F^4 di S_3 iniziale (generica) una qualsiasi F^{2p-2} di S_p contenente soltanto curve intersezioni complete, e alle quadriche di S_3 le forme di un ordine qualsiasi $k > 1$ in S_p .

Chiamo pertanto « di 1ª specie » le F^{2p-2} , di famiglie irriducibili dipendenti da 19 moduli, nelle quali la superficie generica contiene soltanto curve intersezioni complete (come la detta F^{16}). Queste esistono per ogni valore di p ; possono obbligarsi, con una sola condizione, a contenere una retta, o anche una conica, o altre curve. Una M_3^{2p-2} con superficie sezioni di questo tipo contiene ∞^1 rette formanti una rigata R , la cui considerazione (come già detto) è fondamentale per trovare per le M_3^{2p-2} , in questo caso, un limite superiore al carattere p .

(1) Altri sistemi lineari di superficie di generi uno in S_3 , di dimensioni e grado inferiori, si ricavano in modo analogo da S_0 -coni razionali normali V_3^n di S_{n+2} di ordini $n < 8$, e egualmente con cono quadrico direttore. Per $n > 8$ le forme cubiche occorrenti, dovendo passare per $n-2$ piani di V_3^n , conterebbero per intero intero il detto cono quadrico.

(2) Cfr. anche ENRIQUES, Nota cit. dei « Rendiconti Accademia di Bologna » (13 dicembre 1908), N. B. a p. 6.

(3) SEVERI, « Compt. Rend. de l'Acad. d. Sc. », vol. CXL, 6 febbraio 1905; « Mathem. Ann. » vol. 62, 1906, p. 194; « Annales Éc. Norm. Sup. » (3), vol. 25, 1908, p. 449; « Rendiconti Circolo Matematico di Palermo », vol. 30, 2º sem., 1910, p. 265.

Chiamo invece « di 2^a specie » le famiglie irriducibili di F^{2p-2} , dipendenti pur esse da 19 moduli, nelle quali la superficie generica contiene soltanto (come la detta F^{16}) curve multiple di un sistema lineare minimo, che è a sua volta divisore d'indice $k > 1$ delle sezioni iperpiane. Queste esistono solo per particolari valori di p , tali che sia $2p-2 = k^2(2p'-2)$, ossia $p = k^2(p'-1) + 1$. Una M_3^{2p-2} con superficie sezioni di questo tipo non contiene rette; contiene bensì un sistema lineare di superficie $|\Gamma|$, divisore di indice k del sistema delle sezioni iperpiane. Le Γ sono superficie razionali, e le loro intersezioni sono curve razionali (nel qual caso $k \leq 4$), oppure ellittiche (e allora $k = 2$). E per questa via se ne determinano tutti i vari casi.

Le osservazioni precedenti pongono il problema (che non mi consta sia stato risolto), se una superficie F^{2p-2} di S_p , sulla quale un determinato sistema lineare non è divisibile per un certo intero $k > 1$, possa per variazione continua acquistare un divisore di indice k del detto sistema. Sembra che a tale questione dovrebbe risponderne negativamente.

3. Esistono però anche, almeno per certi valori di p , superficie F^{2p-2} di S_p non di 1^a nè di 2^a specie.

Consideriamo, ad es., una superficie F^8 di S_5 ($p = 5$), intersezione generica di una V_3^3 , ∞^1 razionale normale di piani e non cono, con una forma cubica passante per un suo piano. Essa contiene un fascio di γ_1^3 , nei piani di V_3^3 ; e, come residue di queste rispetto alle sezioni iperpiane, una rete di quintiche δ_2^5 ; dipende da 18 moduli, e su di essa le curve γ_1^3 e δ_2^5 formano evidentemente una base. Il sistema lineare $|2\gamma_1^3 + 3\delta_2^5|$ rappresenta allora, nel solito senso, una superficie F^{54} di S_{28} , pure a curve sezioni canoniche ($p = 28$), che contiene un fascio di γ_1^9 e una rete di δ_2^{12} . Questa è la superficie più generale di una famiglia di F^{54} , dipendente da 18 moduli, e non contenuta in altra famiglia più ampia di F^{54} . Una F^{54} di 1^a specie obbligata a contenere una γ_1^9 (e non vincolata ad altre condizioni) dipende anche da 18 moduli, ma contiene soltanto i sistemi $|C^{54} - \gamma_1^9|$, $|C^{54} - 2\gamma_1^9|$, $|C^{54} - 3\gamma_1^9|$, il secondo dei quali ha gli stessi caratteri del sistema $|3\delta_2^{12}|$ sulla F^{54} precedente, e non contiene pertanto, come la precedente, una rete $|\delta_2^{12}|$. Invero, su di essa le curve C^{54} e γ_1^9 formano una base minima ⁽¹⁾; sicchè ogni altra curva della superficie potrà

(1) SEVERI, lavori vari ultimi cit. Sulla F^{54} in parola le curve $\epsilon = C^{54} - 3\gamma_1^9$ costituiscono un secondo fascio di curve ellittiche. Se le curve C^{54} , γ_1^9 formano una base minima, altrettanto avviene per γ_1^9 , ϵ ; e viceversa. Ora γ , ϵ hanno 9 intersezioni; perciò il sistema somma $|\gamma_1^9 + \epsilon|$ rappresenta una F^{18} di S_{10} (del solito tipo F^{2p-2} , per $p = 10$), sulla quale alle γ , ϵ corrispondono fasci di curve ellittiche entrambi di ordine 9; e su questa superficie, come su ogni F^{2p-2} generica di 1^a specie assoggettata soltanto a avere una sezione iperpiana spezzata in due γ_1^{p-1} , è ovvio che queste due γ_1^{p-1} formano una base minima. Altrettanto avviene perciò per ϵ , γ_1^9 e quindi anche per C^{54} , γ_1^9 sulla F^{54} .

rappresentarsi sotto la forma $mC^{i+} + n\gamma_i^0$, con m, n interi, eventualmente anche negativi; e ad essa spetta il grado $54m^2 + 0 \cdot n^2 + 18mn = 18m(3m+n)$, che non può mai risultare $= 2$ (come occorrerebbe per le δ_2^{12}).

Questa ulteriore categoria di F^{2p-2} , che chiamo « di 3^a specie », potrebbe per ora precisarsi così: superficie appartenenti a una famiglia irriducibile, nella quale la superficie generica ha le sezioni iperpiane C^{2p-2} esprimibili come somme di altre curve (effettive) del tipo $\sum_i k_i \gamma_i$, con $i \geq 2$, e colle k_i anche numeri interi e ≥ 2 . Si può supporre che nessun sistema $|\gamma|$ sia somma di altri di ordini inferiori, e in particolare che nessuno di essi contenga uno degli altri. Queste famiglie dipendono tutte da un numero di parametri ≤ 18 , nè sembrano contenute in altre più ampie.

Per la superficie F^{2p-2} di 1^a e 2^a specie è $i' = 1$, e l'unico k rispet. $= 1$ oppure > 1 . In queste famiglie di 3^a specie sono però comprese superficie particolari, che appartengono altresì alle famiglie di 1^a o 2^a specie.

La determinazione delle M_3^{2p-2} che hanno superficie sezioni di questo ultimo tipo si effettua con procedimento analogo a quello usato per le superficie di 2^a specie. La classificazione indicata delle F^{2p-2} si è rivelata sufficiente allo scopo che ora mi sono proposto: si vedrà in seguito, da eventuali ricerche ulteriori, se e come converrà modificarla o meglio precisarla.

Matematica (Geometria algebrica). — *La teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche*. Nota I⁽¹⁾ del Socio F. SEVERI.

La teoria delle serie e dei sistemi d'equivalenza sulle varietà algebriche (intorno alla quale sto per pubblicare un rapporto, che la riassume e la coordina), permette di sviluppare in forma generale e completa le proprietà delle corrispondenze algebriche fra varietà algebriche. Questo sviluppo è stato esposto per le superficie in una mia precedente Memoria⁽²⁾. Voglio ora riferire brevemente sulla teoria generale, riserbando ad altro luogo più dettagliati svolgimenti.

Le serie e i sistemi d'equivalenza aprono la via maestra alla trattazione organica e generale della teoria delle corrispondenze, sia che si parli di corrispondenze ∞^r o ∞^s ($s = r + 1, \dots, 2r - 1$) tra due varietà ad r dimensioni M_r, M'_r o di corrispondenze tra varietà di dimensioni diverse.

Ciò apparirà dal seguito di queste Note. Limitiamoci pel momento alle corrispondenze ∞^r . È chiaro che per creare una teoria generale di tali corrispondenze, perfetta e completa come nel caso delle curve, si deve porre

(1) Presentata nella seduta del 5 giugno 1936.

(2) « Memorie della R. Accademia d'Italia », vol. V, 1934-XII, p. 239. Tale Memoria sarà citata in seguito colla lettera A.

a fondamento una sottoclasse di corrispondenze geometricamente definite, le quali diano luogo ad un principio (funzionale-numerativo) di corrispondenza, di netto significato algebrico-geometrico. Invero, è allora possibile di determinare un intero ρ tale che, prese comunque più corrispondenze in numero $> \rho$, esista sempre una loro combinazione lineare a coefficienti interi (non tutti nulli), che appartenga alla sottoclasse fissata. Da ciò segue agevolmente un principio generale (funzionale-numerativo) di corrispondenza, geometricamente ben delineato.

Per raggiungere questo scopo, occorre che le corrispondenze della sottoclasse abbiano tal natura geometrica, da individuarle anche topologicamente, cioè in guisa che sia conosciuto com'esse agiscono sui cicli di *tutte* le dimensioni di M_r ed M'_r . Il principio di corrispondenza sarà tanto più semplice ed espressivo, quanto più elementare sarà il modo di operare sui detti cicli. Queste condizioni determinano univocamente la sottoclasse cercata; e si cade così di necessità sulle corrispondenze a valenza o a pseudovalenza, rispetto alle serie di equivalenza, la cui natura topologica risponde ai requisiti richiesti, come ho già provato nel caso $r = 2$. Ogni altra veduta, nel campo algebrico-geometrico, non può che condurre ad una teoria o monca o inutilmente complicata.

Nel campo topologico la teoria delle corrispondenze ∞^r , fra due varietà M_r, M'_r , è stata sviluppata in modo suggestivo da LEFSCHETZ, il quale, nel caso di varietà coincidenti, ha dato la formula generale, topologico-numerativa, delle coincidenze (virtuali). Da essa potrebbe dedursi la formula che noi desideriamo, giacchè appunto le corrispondenze caratterizzate geometricamente dalla proprietà di avere valenza o pseudovalenza rispetto alle serie di equivalenza, si comportano in modo topologicamente ben definito. Ma la deduzione non condurrebbe ad un più semplice sviluppo della teoria ed avrebbe il grande svantaggio di limitare la portata del principio di corrispondenza al solo campo numerativo, mentre noi ne vogliamo anche il significato funzionale.

Una veduta parziale della teoria delle corrispondenze ∞^r fra M_r, M'_r è p. es. quella in cui la sottoclasse fondamentale vien definita soltanto dal comportamento delle sue corrispondenze rispetto ai cicli lineari delle due varietà ⁽¹⁾. In questo modo diventa *impossibile* di trasformare la formula topologico-numerativa di coincidenza, in una di netto significato geometrico. È infatti evidente che una corrispondenza a valenza rispetto alle serie regolari (serie a circolazione lineare nulla) ⁽²⁾ ha comportamento assolutamente arbitrario rispetto ai cicli di dimensioni $2, 3, \dots, 2r - 1$.

(1) Cfr., per le superficie, ALBANESE, « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », vol. III₂, 1934, pp. 1 e 149. Per le varietà ved. TODD, « Annals of Mathematics », vol. 36, aprile 1935, p. 325.

(2) Lo studio di corrispondenze siffatte è facilitato dalle ampie conoscenze che si hanno ormai sugl'integrali semplici di 1^a specie, appartenenti ad una varietà, e sui loro periodi; ma può tuttavia condurre a risultati interessanti, come quello relativo a un certo

Analogamente sono vedute parziali altre che si possono a ugual diritto affacciare. Così può scegliersi la sottoclasse fondamentale fissando, nel modo più elementare, il comportamento delle sue corrispondenze rispetto ai cicli bidimensionali. In tal caso la valenza viene spontaneamente definita rispetto alle serie che ho chiamato a circolazione algebrica; ma anche qui non è possibile sostituire la formula topologico-numerativa delle coincidenze con un principio funzionale-numerativo di puro significato geometrico.

1. Sia T una corrispondenza ∞^r fra due varietà irriducibili M_r, M'_r . Intenderemo sempre di aver da fare con corrispondenze irriducibili o pure, rappresentate cioè, sul prodotto $W = M \times M'$, da varietà ∞^r irriducibili o costituite da parti di ugual dimensione r .

Diremo che T è a valenza zero quando al punto x , variabile su M_r , risponde su M'_r un gruppo X' mobile in una serie d'equivalenza. Si dimostra in primo luogo che:

Se T è a valenza zero, anche T^{-1} è a valenza zero.

Quando la serie d'equivalenza cui appartiene X' è una serie d'intersezione (o serie elementare), la dimostrazione deriva facilmente dalla rappresentazione algebrica di T con r equazioni algebriche del tipo $f(x; x') = 0$ (x, x' punti variabili su M, M') da aggiungersi ai sistemi di equazioni che rappresentano M, M' nei rispettivi spazi. Si passa quindi al caso generale, tenuto conto che una serie d'equivalenza è una combinazione lineare di serie elementari.

2. Il fondamento dello sviluppo così semplice che son riuscito a dare alla teoria nel caso delle superficie, è costituito dalla decomposizione d'una corrispondenza a valenza zero in una combinazione lineare di corrispondenze degeneri.

Occorre perciò, anche nel caso delle varietà, d'indagare quali sono i possibili tipi di corrispondenze degeneri e quali, fra questi, sono a valenza zero. Le corrispondenze degeneri (pure) ∞^r fra M, M' sono dei tipi seguenti:

1) *Corrispondenze degeneri di specie $h = 1, 2, \dots, r-1$* , rappresentate su W da varietà contenute ciascuna in una varietà a $2r-h$ dimensioni, luogo di ∞^{r-h} varietà $\Phi \circ \Phi'$ (ove $\Phi = x \times M'$, $\Phi' = x' \times M$, x, x' essendo punti variabili su M, M').

2) *Corrispondenze degeneri di specie $r-1+l$ ($l = 1, 2, \dots, r-1$)*, rappresentate ciascuna su W dall'intersezione d'una varietà ad $l+r$ dimen-

carattere (ottenuto da ALBANESE per le superficie sotto il nome di « rango » ed esteso da TODD alle varietà), che io chiamerei *indice d'irregolarità*. Però un tale studio non può mai sboccare in una teoria generale delle corrispondenze. Ved. a tal proposito il n. 13 della Nota II, dove si dimostra p. es. l'impossibilità che per tutte le corrispondenze a valenza nel senso di ALBANESE valga il principio di corrispondenza di ZEUTHEN-SEVERI, rispondendo così ad una questione che si era posta lo stesso ALBANESE.

sioni, luogo di $\infty^l \Phi$ o Φ' e d'una varietà a $2r - l$ dimensioni, luogo di $\infty^{r-l} \Phi'$ o Φ . Le corrispondenze così definite sono le corrispondenze « elementari » delle specie considerate. Una corrispondenza generale di specie $r - 1 + l$ è una combinazione lineare a coefficienti interi di corrispondenze elementari di una medesima specie $r - 1 + l$.

3) *Corrispondenze degeneri di specie $2r - 1$* , formate ciascuna da un numero finito di Φ o Φ' .

Le 1) non son generalmente a valenza zero; mentre le corrispondenze dei tipi 2), 3) son tutte a valenza zero.

Usufruendo degli stessi concetti che ho usato nel caso $r = 2$, dimostro che ogni corrispondenza T, ∞^r , a valenza zero, appartiene (sopra W) ad un sistema d'equivalenza somma di corrispondenze a valenza zero del tipo 1); ma la decomposizione più importante è data dal teorema:

Ogni corrispondenza T, ∞^r , pura, effettiva o virtuale, a valenza zero, fra due varietà M_r, M'_r , appartiene, entro $W = M \times M'$, ad un sistema di equivalenza somma di corrispondenze dei tipi 2), 3). Viceversa ogni tal somma è a valenza zero.

Si deduce da ciò che:

La corrispondenza T appartiene ad un sistema d'equivalenza del tipo:

$$(1) \quad |X \times M' + X' \times M + S_1 + S_2 + \dots + S_{r-1}|,$$

ove X, X' sono i gruppi corrispondenti rispettivamente ad un punto di M', M ed S_1, S_2, \dots, S_{r-1} sono convenienti corrispondenze delle specie rispettive $r, r+1, \dots, 2r-2$, associate a T , e definite, ciascuna, a meno di una equivalenza.

Siccome la superficie T di W rappresenta tanto l'operazione diretta che l'inversa, così può affermarsi che alla corrispondenza diretta e all'inversa sono associate le stesse corrispondenze degeneri.

3. Quando $M_r = M'_r$, può considerarsi l'intersezione (virtuale) di T colla corrispondenza identica Ω . Si ottiene in tal guisa la interpretazione funzionale del principio di corrispondenza per le corrispondenze a valenza zero, espressa dalla relazione:

$$(2) \quad (T, \Omega) \equiv X + X' + (S_1, \Omega) + \dots + (S_{r-1}, \Omega).$$

I gruppi virtuali $(S_1, \Omega), \dots, (S_{r-1}, \Omega)$ chiamansi i gruppi associati a T . Ciascuno di essi è definito su M a meno di un'equivalenza. I numeri virtuali $[S_1, \Omega], \dots, [S_{r-1}, \Omega]$ si chiamano i ranghi di specie $1, 2, \dots, r-1$ di T .

4. È importante di chiarire bene il concetto di ranghi di T . Cominciamo a esaminare le cose dal punto di vista proiettivo. Chiameremo bre-

vemente corrispondenza di Zeuthen (generalizzata) a valenza zero, sopra una M_r di S_d , una corrispondenza T in cui gli omologhi di un punto x variabile su M_r sieno tagliati da una varietà algebrica V_{d-r} , mobile in una famiglia. Si dimostra allora che, a meno, eventualmente, di talune corrispondenze degeneri da aggiungersi a T , questa corrispondenza appartiene ad un sistema continuo di corrispondenze di Zeuthen aventi gli stessi indici e gli stessi ranghi, e per la corrispondenza generica di questo sistema i ranghi sono gli ordini delle varietà a $d-r+1, \dots, d-2, d-1$ dimensioni, corrispondenti alle sezioni di M_r con spazi lineari delle stesse dimensioni.

Usufruendo ancora del fatto che ogni serie d'equivalenza su M_r è una combinazione lineare di serie elementari, si vede che ogni corrispondenza a valenza zero su M_r è una combinazione lineare a coefficienti interi di corrispondenze di Zeuthen e di corrispondenze degeneri, a valenza zero. Si ha così il mezzo di calcolare proiettivamente i ranghi di ogni corrispondenza a valenza zero, perchè, secondo la stessa definizione dei ranghi, il rango di una data specie, della somma algebrica di più corrispondenze a valenza zero, è l'analoga somma dei ranghi della stessa specie degli addendi; e d'altronde i ranghi di una corrispondenza degenera a valenza zero su M_r si riducono ai ranghi d'una corrispondenza a valenza zero sopra una varietà subordinata ad M_r .

5. Dalla (2) deducesi il principio di corrispondenza per le corrispondenze a valenza zero:

$$(3) \quad [T, \Omega] = \alpha + \beta + \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{r-1},$$

ove α, β sono gli indici e $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{r-1}$ i ranghi di specie $1, 2, \dots, r-1$ di T . Nel caso in cui M_r è uno spazio lineare S_r , la (3) riducesi ad una formula di Caporali e di Pieri⁽¹⁾. Invero, ogni corrispondenza in uno spazio lineare è necessariamente una corrispondenza di Zeuthen a valenza zero, sicchè il rango δ_i risulta uguale al numero delle coppie x, x' , di punti corrispondenti in T , il cui x sta in un generico S_i ed il cui x' sta in un generico S_{r-i} .

È evidente che sia la (1), come la (2) e la (3), valgono anche quando i punti x (o x') delle ∞^r coppie x, x' non invadono tutta la M_r (o tutta la M_r)! Se p. es. gli x non invadono tutta la M , dovrà porsi $X' \equiv 0$ e $\beta = 0$.

6. Ogni rango d'una T a valenza zero è un covariante (relativo) di T . Per avere le espressioni generali (covarianti) dei ranghi di specie $1, 2, \dots$,

(1) Ved. PIERI, «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», to. V, 1891 (24 maggio). La formula stessa è poi caso particolare di una (relativa alle coincidenze d'una corrispondenza fra S_k di un S_r) da me data nei «Rendiconti R. Acc. dei Lincei», IX, 2° sem. 1900, p. 322.

$r-1$ di una corrispondenza T , a valenza zero, occorre fissare su M_r le basi intermedie per le varietà delle diverse dimensioni su essa tracciate.

Se $A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \dots, A_{e_l}^{(l)}$; $B_1^{(r-l)}, B_2^{(r-l)}, \dots, B_{e_l}^{(r-l)}$ son due basi intermedie duali ⁽¹⁾ per le varietà algebriche pure delle dimensioni $l, r-l$ di M , si avrà:

$$\mu S_l \equiv \mu \sum \lambda_{ij}^{(l)} A_i^{(l)} \times B_j^{(r-l)},$$

ove \equiv è il segno d'equivalenza algebrica e le λ, μ son convenienti interi dipendenti da T . Pertanto risulterà:

$$\delta_l = [S_l, \Omega] = \sum \lambda_{ij}^{(l)} [A_i^{(l)}, B_j^{(r-l)}].$$

Questa relazione chiarisce luminosamente la natura dei ranghi di una corrispondenza a valenza zero; ne stabilisce il carattere geometrico-aritmetico (in relazione alla base) e prova come sarebbe vano ricercarne una definizione generale sostanzialmente diversa.

Matematica (Geometria algebrica). — *La teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche*. Nota II^a del Socio F. SEVERI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Matematica. — *Nuovi contributi alla teoria generale delle algebre*. Nota del Corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Meccanica (Elettrotecnica). — *Metodo pel calcolo degli effetti di distorsione nelle linee telegrafiche e telefoniche*. Nota del Corrisp. G. GIORGI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geofisica. — *Lavori geofisici eseguiti dallo Istituto di Geodesia della R. Università di Padova nella regione vesuviana nel 1934-35*. Nota del Socio E. SOLER.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Memoria A, p. 249.

Fisica. — *Sui postulati della seconda relatività.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. G. GIORGI.

1. Col nome di « seconda relatività » intendo quella teoria che A. Einstein ha portato a compimento nel 1916 come « relatività generalizzata » e che tiene conto dei campi gravitazionali come fatti di curvatura dello spazio, ma non si estende ancora alla geometrizzazione dei campi elettromagnetici. Non mi propongo di discutere la serie completa dei postulati fisici di questa teoria; ammetto già formata la teoria di relatività prima forma (così detta « relatività ristretta » o « relatività speciale ») e m'interesso più specialmente a due punti che riguardano il passaggio dalla relatività prima alla seconda. Per quest'ultima mi riferisco all'esposizione fatta da Silberstein ⁽²⁾ che è una delle più complete e corrette esistenti.

2. Ammesso che il mondo è un continuo ∞^4 di avvenimenti, il primo postulato di collegamento fra le due teorie deve essere quello che *gli enunciati della relatività ristretta valgono ancora fino al primo ordine in ogni cellula infinitesima dello spazio-tempo*. Questo principio fu già assunto da Einstein come « ipotesi di equivalenza infinitesimale », ma con un'enunciazione che a mio avviso contiene più del necessario.

Nella trattazione classica entra poi l'asserzione che « l'elemento lineare « dello spazio-tempo, in qualunque sistema di coordinate curvilinee x_1, x_2, x_3, x_4 si esprime sotto la forma

$$ds = \sqrt{\Sigma g_{ij} dx_i dx_j}.$$

Questa asserzione è stata presa come fondamento di tutti gli sviluppi successivi, ma sottintendendo qualche concetto che dall'enunciato non risulta. Non basta dire che quel ds si chiama « elemento lineare », occorre sapere qual'è il suo significato fisico. L'asserzione ulteriore, che le linee con $ds = 0$ sono le linee orarie dei raggi luminosi, non è sufficiente per completare: non lo è nemmeno quest'altra, che le geodetiche determinate da quel ds , cioè le linee definite da $\delta \int ds = 0$ sono le linee orarie dei punti materiali « liberi ». In questo enunciato ultimo, occorre precisare che « liberi » o meglio « abbandonati a se stessi » significa « non in contatto

(1) Presentata nella seduta del 5 aprile 1936.

(2) L. SILBERSTEIN, *The theory of relativity*. London, 2nd ed. (1924), ch. XI, p. 290 e successive.

« materiale con altri corpi o con campi elettromagnetici »: l'enunciato acquista così un significato preciso, ma la sua portata è limitata a un gruppo particolare di fenomeni.

3. La lacuna mi è apparsa in evidenza quando si discuteva sui fondamenti della previsione che in un campo gravitazionale intenso le righe spettrali devono risultare deviate verso il rosso. Questa previsione equivale a dire che i cronometri atomici in quei campi devono battere più lentamente dei nostri: essa è dedotta dalla discordanza che si verificherebbe fra i ds di due campi diversi, quando il confronto viene fatto in un determinato modo. Ora, affinché la deduzione sia valida, occorre sapere che quei tali cronometri vibrano regolati da quel tale ds . Ciò non risulta dai postulati einsteiniani; e pure Einstein sentiva il giusto quando rispondeva che in caso di mancata verifica dello spostamento delle righe spettrali, sarebbe stato indotto a rinunciare alla relatività, piuttosto che ammettere l'indipendenza di quei tempi di vibrazione dall'andamento locale dei ds . Si può, ripetere la stessa argomentazione per altre conseguenze della relatività previste in vari campi.

Si noti anche il disagio che traspare nella discussione intrapresa da Silberstein (*op. cit.*, p. 204) intorno al principio di relatività generale formulato da Einstein e sua applicazione effettiva.

4. Ritengo che la lacuna nella postulazione relativa al ds sia da colmare enunciando così: *In tutte le leggi fisiche le quattro coordinate x_1, x_2, x_3, x_4 entrano solo col tramite dell'espressione ds .* Allora il ds acquista un significato effettivo, e le previsioni di qualsiasi effetto relativistico si ricavano come conseguenze necessarie.

Per illustrare con un paragone, faccio riflettere che nella fisica prè-relativista le coordinate cartesiane x, y, z non intervengono in nessuna legge individualmente, ma solo nelle combinazioni $dt, dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$; ciò è tanto vero che la geometria metrica ordinaria si lascia sviluppare mediante enunciati in cui entrano distanze di punti, cioè lunghezze di linee, ma non valori di coordinate: è appunto quello che si fa nella geometria detta elementare. La teoria di relatività prima forma porta poi a conglobare il tempo, per sostituire ai due invarianti separati dl, dt , l'invariante unico $ds = \sqrt{dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)/c^2}$. E quel ds , quando ha carattere temporale, determina il tempo regolatore di tutti i fenomeni fisici, a differenza del « tempo locale » quale fu concepito la prima volta da Lorentz, cioè quale espressione matematica applicabile soltanto a certi fenomeni particolari.

La relatività seconda forma sostituisce quell'espressione del ds con quest'altra $\sqrt{\sum g_{ij} dx_i dx_j}$. In accordo però col primo postulato di cui detto sopra, il nuovo ds deve subentrare in tuttò e per tutto all'antico, e

quindi ai due invarianti separati che intervengono nella fisica prerelativista. Ne segue in particolare che se una linea del cronotopo è linea oraria, cioè composta di elementi ds tutti di carattere temporale, si ha in $\int ds$ il tempo proprio regolatore di *tutti* i fenomeni che avvengono lungo quella linea: un fenomeno solo che facesse eccezione condurrebbe a conseguenze antirelativiste, cioè a trovare coordinate assolute o velocità assolute, e quindi in particolare a rivelare un qualche cosa a cui si darebbe il nome di velocità assoluta di trascinamento della Terra attraverso lo spazio. Quello che vale per i ds temporali deve valere, con le debite mutazioni, anche per i ds di tipo spaziale; altrimenti, in qualche altra forma, la relatività verrebbe meno. Ne segue l'enunciato che ho formulato.

5. Ammessa così la postulazione, che cosa se ne deduce riguardo allo spostamento delle righe verso il rosso? Abbiamo due cronometri in condizioni di confrontabilità fra loro, p. es. vicini, o privi di velocità mutua radiale oppure che partono in coincidenza e tornano a coincidere: l'uno sia immerso in un campo gravitazionale, l'altro no: si chiede se per quest'ultima differenza il loro andamento debba differire. Prima di rispondere, notiamo che la valutazione del campo gravitazionale è relativa, non assoluta: dipende dalla piattaforma di riferimento. Per ogni singolo cronometro, non vi è altro che prendere una piattaforma legata al cronometro stesso.

Riferiamoci al caso dei due cronometri atomici, uno sulla Terra e uno sul Sole o su una stella. Per quello terrestre, la gravitazione, misurata dalla piattaforma che l'accompagna, è quasi trascurabile. Per l'altro cronometro, bisogna fare distinzione secondo che esso cade liberamente, abbandonato a se stesso, oppure se è trattenuto: nel primo caso, esso non risente gravitazione, la sua piattaforma propria è inerziale, e quindi non si trova in condizioni intrinsecamente diverse dal cronometro terrestre, e deve andare d'accordo con esso; nel secondo caso, esso risente in pieno la forza di gravitazione, la sua linea oraria non è geodetica e il suo tempo proprio ritarda.

Per conseguenza: la luce emessa da quelle particelle che alla superficie di un astro si muovono liberamente (p. es. lanciati nel vuoto per effetto di un'esplosione) non dovrebbe avere spostamento di righe verso il rosso; lo spostamento deve essere percettibile (come è stato nella stella compagna di Sirio) alla superficie degli astri con potere attrattivo intenso, quando le particelle che emettono la luce sono trattenute in qualche modo dal « cadere » verso il centro dell'astro. Questo potrebbe spiegare che i risultati delle osservazioni sono stati molte volte discordanti: e si dovrebbe ritenere che il potere attrattivo intenso influisca in doppio modo, con l'aumentare il valore del campo, e col determinare in superficie uno stato di compattezza e di pressione, per cui la percentuale di particelle libere divenga più

rara; e allora è naturale che sul Sole e sulle stelle piccole il fenomeno sia più difficile a osservare che non su quelle che hanno molta massa concentrata in piccolo raggio.

La causa discriminatrice fra la particella libera e quella trattenuta si lascia esprimere meglio in statica anzichè in cinematica. La particella trattenuta è soggetta a sforzo meccanico: dunque ritardano quei cronometri che hanno tensioni interne. Pensando a un cronometro ordinario a bilanciere, si dovrebbe dire che lo stato di sollecitazione interna (*stress*) esistente nel bilanciere è quello che lo fa ritardare, come se quella tensione producesse un aumento d'inerzia. Questo sarebbe un enunciato intrinseco, coerente col principio di relatività. Resta da vedere fino a che punto si riuscirebbe a confermarlo con l'esperimento.

Paleontologia. — *Sulla presenza di «Equus hydruntinus» nelle ghiaie quaternarie dell'Aniene.* Nota ⁽¹⁾ del Socio G. A. BLANC.

Ho già avuto occasione di segnalare ⁽²⁾ la presenza di resti dell'Equide di Regalia ⁽³⁾ tra il materiale paleontologico rinvenuto dal prof. Rellini nella parte inferiore del deposito di riempimento di una cavernetta dei pressi di Corchiano (Viterbo), ove tali resti si accompagnavano ad abbondanti relitti del paleolitico superiore a facies grimaldiana ⁽⁴⁾.

In tale occasione riferendomi alla presenza indubbia constatata, oltre che da me, da Graziosi ⁽⁵⁾ di resti di questo equide tra il materiale paleontologico di qualche altro giacimento italiano del paleolitico superiore (Talamone, Grimaldi), facevo rilevare l'interesse che vi sarebbe stato a stabilire, mediante una accurata revisione del materiale proveniente dalle formazioni quaternarie a fauna calda, se il predetto equide non fosse in definitiva da considerarsi come una specie significativa del Pleistocene finale.

(1) Presentata nella seduta del 5 giugno 1936.

(2) G. A. BLANC, *Resti di equidi pleistocenici di una cavernetta di Corchiano*. «Riv. di Antrop.», vol. XXX, Roma, 1933.

(3) E. REGALIA, *Nota osteologica sull'Equide di Romanelli*. «Arch. p. l'Antr. e la Etn.», XXXV, 1905; ID., *Sull'Equus (Asinus) hydruntinus Regalia della Grotta Romanelli (Castro, Lecce)*. «Arch. p. l'Antr. e la Etn.», XXXVII, 1907; G. A. BLANC, *Grotta Romanelli. I. Stratigrafia dei depositi e natura e origine di essi*. «Arch. p. l'Antr. e la Etn.», vol. L, fasc. 1-4, 1920; ID., *Grotta Romanelli. II. Dati ecologici e palenologici*. «Ivi», vol. LVIII, fasc. 1-4, 1928.

(4) U. RELLINI, *Cavernette e ripari preistorici nell'Agro Falisco*. «R. Acc. Lincei», XXVI, 1930.

(5) P. GRAZIOSI, *La Grotta di Talamone*. «Arch. p. l'Antr. e la Etn.», vol. LVIII, 1928; ID., *Sull'Equus (Asinus) hydruntinus Reg.* «Rivista Italiana di Paleontologia», XXXIX, 1933.

Recentemente veniva pubblicata da H. G. Stehlin e P. Graziosi una pregevole monografia sugli Asinidi fossili di Europa ⁽¹⁾, in cui, oltre a confermare le suddette mie determinazioni, vengono elencati molti altri giacimenti europei nei quali sono stati rinvenuti relitti attribuibili a quella che ormai va considerata non già come una semplice varietà di *Equus asinus*, ma come una specie a sè, strettamente imparentata a *Equus Stenonis* e che conviene perciò ormai secondo me designare come *Equus hydruntinus* Regàlia.

Ora, quando si esamini l'elenco dato da Stehlin e Graziosi dei giacimenti quaternari europei, in cui sono stati rinvenuti con assoluta sicurezza di attribuzione sia specifica che stratigrafica i resti di *E. hydruntinus*, si resta colpiti dal fatto che il complesso faunistico che li accompagna è generalmente quello cosiddetto « freddo » che succede alle associazioni relativamente più « calde » del Quaternario medio e inferiore. Non mi sembra infatti che si possa, nell'elenco suddetto, riscontrare un caso di associazione sicura di resti dell'Equide di Regàlia, con quelli della fauna a Ippopotamo.



SACCOPASTORE



ROMANELLI

Per contro, a Romanelli, ove la perfetta differenziazione dei livelli e la grande abbondanza dei relitti di fauna dà particolare valore alle osservazioni, *E. hydruntinus* è stato fino ad ora rinvenuto soltanto nei livelli superiori, a fauna fredda caratterizzata da *Alca impennis* ⁽²⁾, e dove mancano completamente i rappresentanti tipici della fauna ad Ippopotamo che caratterizzano invece i livelli inferiori.

Ho la possibilità ora di segnalare un nuovo relitto fossile attribuibile, secondo me, con sicurezza, ad *E. hydruntinus* che proviene dalla cava di ghiaia di Saccopastore, giacimento ormai celebre per i rinvenimenti che vi sono stati fatti di due crani neanderthaliani ⁽³⁾.

Trattasi di un premolare inferiore sinistro, estremamente mineralizzato e presentante i segni di un prolungato fluitamento. Sulla esatta sua ubicazione

(1) H. G. STEHLIN e P. GRAZIOSI, *Ricerche sugli asinidi fossili d'Europa*. « Mémoires de la Sté Paléontologique Suisse », vol. LVI. Basilea, 1935.

(2) G. A. BLANC, *Sulla presenza di Alca impennis L., nella formazione pleistocenica superiore di Grotta Romanelli in Terra d'Otranto*. « Arch. p. l'Antr. e l'Etn. », vol. LVIII, fasc. 1-4, 1928.

(3) S. SERGI, *La scoperta di un cranio del tipo di Neandertal presso Roma*. « Riv. di Antrop. », XXVIII, Roma 1929. — H. BREUIL e A. C. BLANC, *Rinvenimento "in situ" di un nuovo cranio di "Homo neanderthalensis" nel giacimento di Saccopastore (Roma)*. « Rend. R. Accad. Lincei », XXII, p. 166, 1935.

stratigrafica nulla posso dire, non essendo stato rinvenuto da me *in situ*. Ma d'altra parte, mentre il fluitamento da esso subito non lascia dubbio, secondo me, circa la sua provenienza da una delle formazioni alluvionali che ivi compaiono, l'estremo grado di fossilizzazione mi fa ritenere che esso debba provenire dalla alluvione ghiaiosa a elementi più grossi, che a Saccopastore è sottostante al deposito argilloso-sabbioso da cui provengono i crani neanderthaliani.

Cotesto livello ghiaioso inferiore ha fornito abbondanti resti della fauna tipica a Ippopotamo, Elefante antico e Rinoceronte di Merck. Ma occorre subito osservare che un'esplorazione tuttora in corso ha accertato che la medesima fauna compare anche nelle formazioni di ghiaia minuta soprastanti al deposito argilloso-sabbioso che ha fornito i crani, e che quest'ultimo dà anch'esso resti di Ippopotamo.

Ciò detto, passo a descrivere il fossile che, ripeto, è un premolare inferiore sinistro (probabilmente P₃). Le dimensioni del dente, ed in particolare l'estensione e la forma generale della tavola triturrante (v. figura) corrispondono a quelle dei denti di più piccola dimensione appartenenti a individui adulti, da me rinvenuti nel giacimento di Grotta Romanelli. Il premetaconide e il postmetaconide presentano la piccolezza e la sagoma caratteristiche di *E. hydruntinus*. La piega della parete di smalto costituente il solco interno, o linguale, è ad angolo pressochè retto. L'endoconide ha approssimativamente la superficie del metaconide ed è di forma subquadrata. Il mesoconide manca completamente in seguito a frattura recente. Nell'ipoconide e nel protoconide le pareti di smalto esterno sono convesse, con, nel primo, appena un lievissimo accenno ad un flesso verso l'interno. In entrambi l'ipoconide ed il protoconide, le pareti interne presentano un'inflessione lieve in direzione dei metaconidi. Il solco esterno, come generalmente è il caso nei premolari, non si insinua entro il peduncolo dei metaconidi ed è perciò lungi dal raggiungere la piega di smalto del solco interno. Il margine di smalto del solco esterno presenta, dalla parte dell'ipoconide, una inflessione accennante alla piega cavallina.

Non starò a ripetere quanto da altri e da me stesso è stato detto dei caratteri di analogia e dissimiglianza della dentizione dell'Equide di Regàlia, in relazione a quella degli altri equidi di specie vivente o estinta, a noi noti, limitandomi a far rilevare come i caratteri del fossile di Saccopastore bastino, secondo me, per attribuirlo in maniera sicura a *Equus hydruntinus* Regàlia.

La identificazione con *E. hydruntinus* del fossile di Saccopastore da me ora segnalato, sembrami interessante, giacchè, se manca la sua precisa localizzazione stratigrafica *in situ*, resta nondimeno il fatto che esso, per quanto ho detto dianzi, proviene da uno dei depositi alluvionali che, nella bassa valle dell'Aniene, come del resto in quella del Tevere, sono caratterizzati dalla fauna ad Ippopotamo.

Resta pertanto da stabilire se l'associazione del fossile di Saccopastore con i resti della fauna ad Ippopotamo indichi senz'altro una effettiva convivenza, oppure se tale associazione non sia invece semplicemente il risultato dell'accumulo, in quelle formazioni ghiaiose, di relitti faunistici di età diverse.

È da augurare che la attuale esplorazione dell'importante giacimento, condotta con rigoroso metodo stratigrafico, possa, tra l'altro, gettare luce su tale interessante questione.

Mineralogia. — *Caratteristiche dei giacimenti metalliferi italiani in rocce basiche.* Nota ⁽¹⁾ del Corrisp. A. STELLA.

È noto che numerosi sono i giacimenti metalliferi italiani legati a rocce eruttive basiche: interessanti dal punto di vista scientifico, essi anche dal punto di vista pratico sono degni di ulteriori studi e ricerche minerarie. Vi appartengono giacimenti di cromite, di magnetite, di pirite cupriferi, di di pirrotina più o meno nicheliferi e cupriferi.

Io non intendo qui di entrare in descrizioni singole, ma di richiamare l'attenzione sulle caratteristiche dei diversi gruppi, atte a meglio individuarne la natura e il probabile processo di formazione: elementi sempre importanti anche per le eventuali ricerche minerarie. Possiamo distinguere quattro gruppi di giacimenti:

1° Giacimenti di magnetite nella zona eruttiva di Predazzo, e nelle serpentine di Val d'Aosta; e di cromite nelle ofioliti di Levanto.

2° Giacimenti di pirrotina più o meno nicheliferi e cupriferi nella zona diorito-kinzigitica Ivrea-Verbano.

3° Giacimenti piritoso-cupriferi nelle rocce ofiolitiche dell'Apennino settentrionale.

4° Giacimenti piritoso-cupriferi nelle pietre verdi delle Alpi Occidentali.

Si tratta sempre di giacimenti metalliferi spettanti a quella classe cui si suole dare il nome di « giacimenti magmatici »; la quale denominazione però va intesa in senso molto lato; ben pochi essendo quelli di schietta segregazione magmatica, mentre per la maggior parte si ha influenza notevole di azioni postume pneumoidatogene e idrotermali, a cui si aggiungono, per alcuni, ulteriori modificazioni meccaniche e metamorfiche. Ciò risulterà dall'esame che passiamo a fare dei gruppi nell'ordine sopra enumerato.

La ben nota *massa eruttiva di Predazzo* così marcatamente differenziata dal punto di vista litologico, non lo è meno dal punto di vista delle azioni mineralizzanti che hanno dato luogo a una serie di giacimenti metalliferi

(1) Presentata nella seduta del 5 giugno 1936.

interessanti, pur essendo minerariamente limitati. Essi sono di schietta segregazione a Viezzena (magnetite), di contatto coi calcari ai Monzoni (magnetite, pirite e pirrotina), vene pegmatitiche alla Bedovina (calcopirite e scheelite), e infine filoni idrotermali al Dosso Cappello e a M. Malgola (pirite).

I *giacimenti ferriferi* che rientrano in questa trattazione, sono masse di minerali a base di magnetite, qua e là inquinate da mosche di pirite, che si sviluppano in roccia porfirítica a contatto con roccia sienitica, che la separa dalla maggiore massa monzonitica del M. Mulat e in qualche tratto pure ne è investita. In questa zona di contatto porzioni altamente ferrifere del magma basico si sono differenziate consolidandosi in una *facies* speciale della roccia madre a formare il nostro giacimento, cioè una massa di magnetite a ganga pirossenica; e la microstruttura granulare olocristallina conferma tale carattere di schietta segregazione magmatica.

Nelle masse serpentinosi della Valle di Aosta si hanno *giacimenti numerosi di magnetite*, sia in piena massa eruttiva, sia localizzati in essa presso il contatto colle rocce sedimentari metamorfiche della formazione mesozoica. Appartengono a questo secondo gruppo le miniere di Cogne, nella modesta lente serpentinosi Liconi-Larcinaz; appartengono al primo gruppo numerose vecchie miniere da tempo abbandonate a Chatillon, a Champorcher e intorno al M. Avic, tutte cioè in quella veramente imponentissima massa serpentinosi che misura 24 chilometri da nord a sud, e la metà circa da est ad ovest con dislivello medio di oltre 2000 metri dal fondo valle alle creste di quei monti dirupati. I giacimenti suddetti siano essi modesti o grandiosi, presentano ricchezza varia in magnetite, sempre visibilmente intracciata con ganga serpentinosi, anche con graduale transizione a roccia sterile, o meglio, praticamente sterile; perchè essa pure contiene granuli di magnetite più o meno finamente disseminati nella massa del serpentino, formatisi quelli e questo a spese dell'originaria olivina, come il microscopio permette di rilevare. Se inoltre si aggiunga, che la diagnosi microscopica del comune minerale di questi giacimenti mostra la magnetite intimamente associata col feltro di crisotilo aciculare a microstruttura intersettale, si impone l'idea della singenetica formazione, almeno in parte, di minerale metallico e di ganga serpentinosi; sicchè questi giacimenti ferriferi sarebbero a definirsi come varietà speciali eccezionalmente ferrifere della serpentina. E dato che le nostre masse serpentinosi si rivelano indubbiamente derivate per generale idratazione profonda (autoidratazione) da masse eruttive peridotiche e qua e là pirosseniche, siamo di necessità portati ad ammettere, che gli ammassi di minerale sono il risultato di una ricristallizzazione di porzioni speciali assai ricche in ferro delle originarie masse peridotiche serpentinite.

Nel caso speciale della miniera di Cogne doveva trattarsi di un magma basico alquanto titanifero, data la presenza di idrohumite titanifera (titano-

livina) in granuli nel minerale, insieme con relitti di olivina e anche talora di pirosseno diopside. E la concentrazione di minerale utile riccamente ferri-fero ai due estremi della lente serpentinoso (massa Liconi, e massa Larcinaz) è fenomeno certamente dovuto a influenza termica di contatto delle rocce calcaree col magma basico ferri-fero; le quali rocce presentano anzi in più punti notevoli impregnazioni metasomatiche di magnetite.

Ma inoltre in quelle zone di contatto si notano altri minerali speciali (granati, epidoti, brucite, pirite oltre a magnetite) mancanti fuori della zona stessa e quindi molto probabilmente attribuibili a metamorfismo di contatto, in confronto dei comuni minerali costitutivi dei calcari cristallini e dei calcescisti di questa formazione mesozoica, minerali attribuibili al metamorfismo generale da essa subito. Con ciò nasce difficoltà di inquadrare il fenomeno della mineralizzazione metallifera nella cronologia geologica e nella complicata tettonica della regione, dove osserviamo una scistosità generale di calcari, calcescisti e serpentine con visibile concordanza reciproca, che dà apparenza isoclinale a queste formazioni. Ma una tale isoclinaltà, come è noto, non è che il risultato finale di una tettonica a pieghe costipate e laminate, la cui esistenza è accertata dal rilevamento geologico regionale, ma di cui ci sfugge il preciso andamento di dettaglio.

Tenendo conto di tutti questi fattori, sembra plausibile spiegare il doppio metamorfismo delle rocce incassanti in relazione alla natura del giacimento, assumendo come avvenuto in due tempi il fenomeno tettonico e metallogenico; cosa non certo contraria alle attuali idee sulla orogenesi alpina. In un primo tempo si sarebbe avuta la intrusione della peridotite ferri-fero fra calcari e scisti mesozoici portati da un primo ripiegamento nella attuale reciproca posizione, e metamorfosati a contatto della massa intrusiva peridotica (minerali pirometamorfici); in un secondo tempo, mentre si serpentinnava la peridotite ferri-fero e si formava così anche il nostro giacimento di magnetite, proseguivano intensificandosi le azioni tettoniche, con ulteriore costipamento e laminazione, accompagnate dalla definitiva trasformazione metamorfica generale delle formazioni stesse in calcari cristallini, calcescisti e serpentina scistosa (minerali epimetamorfici).

La porzione elevata della grande zona ofiolitica della riviera di levante che scende dalla strada della cornice verso Levante presenta a sud dell'abitato di Ziona fra la massa di serpentina e la eufotide che la ricopre una stretta zona diabasica. Accentramenti lenticolari ricchi in *cromite nella serpentina* affiorano allineati al tetto della massa serpentinoso per entro ad essa presso il suo contatto colla diabase. Il minerale è visibilmente una intima associazione di cromite colla ganga serpentinoso; e l'esame microscopico lo conferma mostrando sia granuli di cromite idiomorfi sparsi nel serpentino, sia reciproco intreccio cromite-crisotilo, e microstruttura a coccarda con crisotilo interstiziale. Sicchè si è portati a ritenere singenetica forma-

zione di gran parte del minerale metallifero col serpentino. Ciò però deve essere avvenuto in condizioni alquanto speciali, data la presenza della diabase inserita fra serpentina ed eufotide, presumibilmente da interpretarsi come dicco incuneatosi fra l'eufotide e l'originaria peridotite cromifera appena consolidatasi, roccia madre della serpentina. In essa A. M. si osservano relitti dell'olivina; la roccia già probabilmente doveva essersi differenziata al contatto più riccamente cromifera. La autoidratazione di essa peridotite, che implica ricristallizzazione della massa, fu poi accompagnata da un irregolare arricchimento in cromite nella zona di contatto verso la diabase, dando luogo ai noduli e lenti altamente cromiferi che costituiscono il nostro giacimento.

Entro alla grande formazione diorito-kinzigitica Ivrea-Verbano troviamo numerosi giacimenti di *pirrotina*, *variamente nicheliferi e cupriferi* per associazione di *petlandite* e di *calcopirite* subordinate alla *pirrotina*.

La mineralizzazione metallifera si sviluppa essenzialmente in masse di rocce molto basiche racchiuse sia nella principale zona di diorite attraversata dalle valli della Sesia, sia nelle minori lingue dioritiche sparse entro alle rocce scistoso-kinzigitiche, e formanti in certo modo la prosecuzione di quella attraverso alla Valle Strona di Omegna e alla Valle della Toce. Queste rocce madri più basiche possono essere o semplicemente zone più marcatamente melanocratiche della diorite zonata (miniére di Valmaggia, Isola di Voca, e Sella bassa in Val Sesia; Luzzogno in Valle Strona) oppure sono pirosseniti o anfiboliti (Cuzzago e Nibbio in Val Toce), o anche rocce gabbro-noritiche (miniera Gula in Val Mastellone), o peridotiti e lherzoliti incuneate nelle precedenti rocce (miniére Campello Monti-Colle dei Rossi); o infine lenti di rocce basiche inserite nelle rocce scistoso-kinzigitiche (Miggiandone, Ornavasso).

La mineralizzazione consiste in impregnazione delle suddette rocce madri per parte dei solfuri, e dà luogo a un aggregato in cui i solfuri si associano a uno o più dei silicati femici o salici costitutivi delle rocce includenti. L'esame macro- e microscopico poi mostra, che tale associazione presenta differenze paragenetiche in confronto di quella delle rocce madri; poichè rivela A. M. un aggregato in cui i silicati sono in certo modo cementati dai solfuri, mostrando il tutto di appartenere all'ultima fase di cristallizzazione del magma generatore. Si osserva poi anche qui, che la mineralizzazione metallifera tende a concentrarsi verso i contatti colle rocce incassanti, le quali possono esserne sporadicamente investite. Di rado si osservano trasversalmente alla roccia mineralizzata filoncelli a ganga quarzosa (Luzzogno) con calcopirite come solfuro dominante. E quando il contatto ha luogo verso la formazione scistoso-kinzigitica si hanno talora impregnazioni più notevoli con venuzze anche trasversali alla scistosità dominante, esili fino a diventare capillari (Campello Monti, Miggiandone). Qui inoltre

l'esame microscopico mette in evidenza il fatto, che rispetto ai minerali del tessuto della roccia kinzigitica (strutture cristalloblastiche) i solfuri sono posteriori (postcristallini), come è dimostrato dalla corrosione da essi esercitata sui silicati degli scisti, i quali inoltre mostrano fenomeni di subite azioni meccaniche (cataclasi, ondulosità).

Ciò si nota molto meno nelle rocce eruttive e solo sporadicamente nella maggiore massa dioritica. Anche l'alterazione è minima in queste rocce, salvo parziale serpentinizzazione delle peridotiti.

L'insieme dei caratteri fin qui segnalati giustifica il concetto, che questi giacimenti solfurati siano essenzialmente differenziazioni altamente solfurate delle rocce madri ultrabasiche, avvenute nella fase finale di consolidamento del magma; mentre la parziale serpentinizzazione e la iniezione solfurata nelle formazioni laterali ci indicano una certa azione successiva pneumoidatogena, che passa a idrotermale nei filoncelli quarzosi.

Questo risultato è in buon accordo colle idee che possiamo farci dell'insieme della formazione diorito-kinzigitica: e cioè pensare, che la sottozona scistoso-kinzigitica in un primo tempo fosse un antico complesso di parascisti cristallini tettonicamente laminati, entro i quali e accanto ai quali si intruse il principale enorme dicco dioritico, iniettandoli di apofisi sotto forma di filoni-strati. Passato il tutto per sprofondamento tettonico in zona abissale, la detta formazione scistosa assunse carattere più altamente metamorfico (catazonale), mentre non dovevano modificarsi le già stabili masse di rocce dioritiche e ultrabasiche in essa racchiuse e ad essa collaterali.

Sono noti numerosi *giacimenti piritoso-cupriferi nelle rocce ofiolitiche* dell'Appennino settentrionale, nell'Emilia, in Liguria e in Toscana: pochi hanno dato luogo a miniere importanti, molti a ricerche minerarie o a coltivazioni poco sviluppate; e ciò perchè alla diffusione notevole della mineralizzazione non sempre corrisponde regolarità e continuità dei giacimenti.

Tale frequenza di mineralizzazione nelle sparse masse ofiolitiche non lascia dubbio circa lo stretto legame genetico dei giacimenti col fenomeno eruttivo generatore delle ofioliti, sebbene non sia agevole di precisarne la natura quanto mai complessa. È ciò che tenterò di fare prendendone in esame le caratteristiche essenziali.

Volendo sintetizzare i dati acquisiti, possiamo anzitutto dire, che i minerali metallici variamente presenti in questi giacimenti sono: pirite, calcopirite eventualmente accompagnata da erubescite e calcosina, eccezionalmente da rame nativo; talora accessoria la blenda. Giacimenti di carattere filoniano sono eccezionali; e cioè filoni e vene a ganga quarzosa mineralizzati di pirite, e calcopirite, eventualmente con blenda, incassati nell'eufotide; come alla miniera Bargone, alle ricerche Ragazzi presso miniera Gallinaria, e ai Casali presso Sestri Levante; inoltre a Bonassola e Castiglione. Però presso Sestri Levante si incontrano affioramenti quarzosi mine-

ralizzati anche minuscoli, quasi accidentalità senza continuazione, con forma piuttosto lenticolare.

Tutti gli altri numerosi giacimenti si presentano strettamente legati alle ofioliti: in alcuni è prevalente l'associazione pirite-calcopirite (specialmente in Liguria); in altri prevale l'associazione calcopirite-erubescite-calcosina (specialmente in Toscana). Nel primo caso si rileva A. M. che la calcopirite è minutissimamente disseminata entro o fra i granuli della pirite; nel secondo caso si hanno spesso noduli e blocchi a struttura concrezionare a zone concentriche di più solfuri variamente succedentisi. A questa distinzione corrisponde fino ad un certo punto diversità di ganghe e di rapporti rispetto alle rocce ofiolitiche incassanti: serpentine, eufotidi, diabasi.

In genere si può dire, che gli accentramenti solfurati si sviluppano in corrispondenza o in vicinanza del contatto di rocce ofiolitiche differenti, o di queste colle rocce calcareo-marnosilicee dell'eocene, che tutte le racchiudeva prima del modellamento orografico di erosione. Ciò appare meglio evidente in Liguria, dove si tratta di masse piritoso-cuprifere localizzate nelle zone di contatto fra serpentina e diabase (miniere Libiola, Gallinaria, Bardineto, M. Loreto, Bossea). Esse presentano andamento quasi filoniforme, ma carattere assai diverso dai filoni addietro nominati; poichè sono allineamenti di lenti mineralizzate costituite dal minerale solfurato più o meno compatto, e variamente commisto a quarzo e a prodotti di alterazione delle rocce incassanti, cioè clorite, attinoti, steatite, calcite, zeoliti. Chè anzi il minerale solfurato, anche molto compatto, quasi ovunque mostra A. M. finissime plaghe di granulazioni calcedoniose interstiziali all'aggregato pirite-calcopirite.

In qualche caso la mineralizzazione è in piena eufotide (miniera di Piazza presso Deiva), presentando andamento quasi filoniano per la presenza di strisce irregolarmente impregnate di calcopirite, erubescite e pirite — lungo le quali la roccia madre, che è una eufotide olivinica, si presenta profondamente trasformata, saussuritizzata, con formazione di bastite, serpentino, attinoti, albite, calcite, quarzo e prehnite, anche in venule coi solfuri; e rivela A. M. microstrutture cataclastiche e brecciate.

In certe parti poi dei giacimenti liguri (Libiola, Gallinaria) l'alterazione è anche più spinta, dando luogo in prevalenza a prodotti argillo-steatitosi, nei quali sono immersi e come impastati noduli del minerale solfurato; onde il nome espressivo di « filoni impastati » dato già dal Savi a questo tipo di giaciture, frequenti specialmente in Toscana.

Nessuno forse dei molti giacimenti cupriferi toscani, per quanto minuscolo, è sfuggito alle vecchie ricerche minerarie: parecchie delle quali divennero miniere, ora abbandonate: come quella nota di Montecatini Val di Cecina, di Riparbella, Querceta, Cetine volterrane, Libbiano e Serrazzano, Monte Castelli e Rocca Silana, Sassa, Castellina, M. Vaso — tutte nelle ofio-

liti dei monti fra Livorno e Volterra; e ancora Roccatederighi presso Massa Marittima, e Impruneta presso Firenze. Questi « ammassi cupriferi impastati » a ganga argillo-steatitosa, con mineralizzazione irregolarmente sparsavi dentro, hanno forma irregolare, spesso appiattita, con spessori da pochi metri a una ventina e più, con apofisi e digitazioni incuneate nella roccia sana, e sono fiancheggiati di regola da due rocce ofiolitiche diverse fra loro, talora anche da ofioliti e rocce calcaree (Montecatini, Riparbella, Montecastelli); e le rocce ofiolitiche di salbanda sono non di rado impregnate di solfuri, specialmente pirite.

Nella massa argillo-steatinosa sono anche frammenti di eufotide profondamente alterata impregnata di solfuri ancora riconoscibile, oltre agli arnioni concrezionari di dimensioni e forme varie di solfuri a croste concentriche, talora con nucleo di calcite e di zeoliti, e con scorza cloritica, sostituita in qualche caso da una pellicola di rame nativo: mentre clorite e altri prodotti di alterazione delle ofioliti si intrecciano finamente ai solfuri stessi. Verso le salbande poi avviene in alcuni giacimenti (Montecatini, Riparbella, Rocca Sillana) di trovare frammenti tondeggianti e lisci di ofioliti incassanti accostati a formare una specie di breccia nella massa argillo-steatitosa che è affetta anche da superfici di liscione.

Il complesso dei dati sopra esposti sui giacimenti delle ofioliti permettono di concludere, che nessuno di essi presenta carattere di vere segregazioni magmatiche, mostrandosi piuttosto legati ad azioni concomitanti e postume al fenomeno eruttivo (intravvedute già da A. D'Achiardi come processo « idtroplutonico »); e successivamente assoggettati ad azioni tettoniche, quali furono necessarie per ridurre le masse ofiolitiche eruttive a giacitura di interclusione nei sedimenti eocenici. Onde non si va forse lontani dal vero pensando, che nell'ultima fase di consolidamento del magma da cui si sono differenziate eufotidi e peridotiti intrusive e le diabasi effusive, abbia avuto luogo l'autoidratazione delle peridotiti in serpentine e una specie di propilitizzazione o nelle zone di diretto contatto serpentine-diabasi (tipo Bossea), o in masse eufotidiche (tipo Piazza), con alterazione spinta fino a steatizzazione e argillificazione in quelle incuneate fra serpentina e diabase (tipo Montecatini). E come alla propilitizzazione nota delle andesiti si accompagna la mineralizzazione piritosa aurifera, si sarebbe avuta nel caso nostro analoga impregnazione di pirite variamente accompagnata da solfuri cupriferi, con deposizioni e rideposizioni complicate dei solfuri in associazione fra loro e coi minerali di alterazione delle ofioliti; anche con disposizione concrezionare (arnioni ricchi delle masse impastate). A queste azioni posteruttive, che possono avere avuto lunga durata, si aggiunsero di poi le azioni tettoniche, che da un lato possono avere facilitato rideposizioni di cementazione; e d'altro canto produssero brecciature di frizione e anche fratture, attraverso le quali le ultime azioni postume idrotermali diedero luogo ai riempimenti filoniani (tipo Bargone).

I giacimenti piritoso-cupriferi legati alle pietre verdi alpine (prasiniti, anfiboliti, serpentine scistose ecc.) hanno fino ad un certo punto analogia con quelli delle rocce ofiolitiche; ma la loro interpretazione genetica è resa anche più difficile e incerta per il metamorfismo generale cui furono sottoposti i giacimenti insieme colle rocce eruttive che li racchiudono trasformate in scisti cristallini. Giacimenti principali troviamo in Valle di Aosta (Ollomont, Petit Mond, Champ de Praz, St. Marcel); nella Valle di Lanzo (Chialamberto); nella Val Chisone (Praly, Ghinivert).

I minerali metallici sono qui essenzialmente pirite e calcopirite, rari altri solfuri di rame, accessoria in qualche caso la blenda. E in ciascun giacimento notiamo due tipi di mineralizzazione: 1) minerale massiccio essenzialmente piritoso a ganga di quarzo, con silicati subordinati; 2) minerale scistoso piritoso-cuprifero, a ganga costituita dai silicati delle pietre verdi (plagioclasio albitico, anfibolo anche glaucofanico, epidoti, clorite, granati; carbonati) con quarzo subordinato. I giacimenti sono essenzialmente racchiusi nelle masse prasinitico-anfiboliche, talora negli scisti che le fiancheggiano; non ne conosciamo nelle masse serpentinosi.

La forma dei giacimenti è lenticolare; con allineamento di lenti o masserelle a formare talora quasi un banco mineralizzato fra strati sterili. E questa giacitura lenticolare rispecchia le intense azioni di costipamento e laminazione tettonica cui furono soggette queste formazioni metamorfiche; le quali ebbero poi anche a subire fratture e pieghe posteriori a quei costipamenti, visibili in alcuni giacimenti (sinclinale a Chialamberto, piegafaglia a Champ de Praz; liscioni frequenti alle salbande e nel minerale).

Tutto ciò si riflette nella intima compagine dei giacimenti; il minerale presenta A. M. notevoli strutture cataclastiche e ancor più notevoli intrecci cristalloblastici fra i solfuri e il quarzo e silicati concomitanti. Ciò esclude l'idea di una mineralizzazione posteriore al metamorfismo delle formazioni; e conferma il legame dei giacimenti col fenomeno eruttivo. Se vogliamo tentare di farci un'idea della natura di tale legame conviene distinguere diversi tipi di giaciture. Si possono avere giacimenti racchiusi in piene prasiniti (Petit Mond, Ollomont e Praly p. p.); oppure fra prasiniti e anfiboliti a glaucofone (St. Marcel, Chialamberto); fra serpentina e prasiniti (Praly), fra prasinite e calcescisti (Ollomont); nei calcescisti fiancheggianti rocce prasinitico-anfibolitiche (Ollomont, Ghinivert). Il caso più semplice è quello di Petit Mond, dove la roccia incassante è una prasinite visibilmente eufotidica, e il minerale è di tipo prasinitico, con transizione alla prasinite sterile; qua e là sporadici noduli di minerale di tipo quarzoso. Tutto ciò indica una impregnazione solfurata nella originaria roccia eruttiva eufotidica come differenziazione magmatica; susseguita da leggiera silicizzazione di carattere idrotermale; le azioni metamorfiche hanno di poi trasformato la eufotide in prasinite anfibolico-granatiferi, e insieme prodotto il giacimento nella facies attuale ricristallizzata non solo nei silicati, ma, almeno in parte, anche nei solfuri.

La silicizzazione appena sporadica a Petit Mond si intensifica in altri giacimenti (Ollomont, Champ de Praz, Praly, Ghinivert) ove troviamo abbondante « minerale quarzoso », accompagnato da « minerale prasinitico ». Vi si aggiunge talora una varietà anfibolica e cloritica (St. Marcel) e ancora una varietà gneisica-cloritica (Chialamberto), tutte altamente granatifere. Si è così portati a pensare, che tutti questi giacimenti abbiano bensì la loro lontana origine nella differenziazione da magma più o meno basico, ma variamente influenzata dal fenomeno idrotermale successivo; il tutto facilitato dalla eterogeneità delle rocce a contatto. Quanto alla specifica natura delle originarie rocce madri lo studio A. M. e i passaggi laterali indicano per alcune masse provenienza da eufotidi (Petit Mond, Chialamberto); mentre per altri (Champ de Praz, St. Marcel, Praly) la presenza di banchi di quarziti micacee granatifere alla salbande, o interposte al giacimento e alle rocce incassanti, indicherebbe piuttosto colate diabasiche sottomarine in alternanze con scisti silicei associati a scisti calcarei. In tale ordine di idee riuscirebbe meno difficile analoga interpretazione per i giacimenti che stanno non solo al contatto prasiniti-calcescisti, ma anche in pieni calcescisti fiancheggiati rocce anfibolico-prasinitiche.

Riassumendo possiamo affermare, che dall'esame dei numerosi giacimenti italiani in rocce basiche il solo giacimento di magnetite nella porfiriti di Predazzo si può classificare come segregazione magmatica in senso stretto, e fino ad un certo punto anche i giacimenti di pirrotina nichelocupriferi della zona diorito-kingizitica di Ivrea. In tutti gli altri, se la presenza dei minerali metalliferi (cromite e magnetite nelle serpentine; solfuri piritoso-cupriferi nelle ofioliti e nelle pietre verdi) si deve alla venuta delle singole rocce eruttive, la concentrazione in giacimenti minerari è specialmente legata al contatto di esse rocce con altre differenti; e la speciale fisionomia geo-mineralogica attuale dei giacimenti stessi è dovuta al concorso di azioni pneumo-idrotermali concomitanti e postume al fenomeno eruttivo; alle quali si aggiungono in diverso grado gli effetti delle azioni meccaniche e metamorfiche.

ratteristica, immagine di una funzione bicomplessa $y(x)$ totalmente derivabile. E quindi, se in un S_4 reale si fissa una linea l_x e su questa una funzione $y^*(x)$, è determinata, in generale, una funzione bicomplessa $y(x)$, totalmente derivabile, definita in un intorno quadridimensionale contenente l_x , che su questa linea si riduce alla funzione $y^*(x)$. Sotto quest'ultima forma, il teorema era stato prima dimostrato, con diverso procedimento, dal prof. G. Scorza Dragoni⁽¹⁾ e, per altra via, dal prof. B. Segre⁽²⁾.

In questa Nota dimostro lo stesso teorema nel caso in cui l'algebra A sia l'algebra dei numeri biduali.

Poichè l'algebra bicomplessa e l'algebra biduale sono le due sole algebre complesse d'ordine 2, dotate di modulo, si può intanto affermare che: *nella rappresentazione di un'algebra complessa d'ordine 2 dotata di modulo in un S_4 complesso, per un filo generico dell' S_4 passa una sola superficie caratteristica.*

Il metodo seguito in questa Nota, analogo a quello adottato dal prof. Spampinato nella sua Memoria citata in ⁽³⁾ a p. 839, dipende dalla particolare tabella di moltiplicazione dell'algebra che si considera e quindi non può venire senz'altro esteso ad una qualsiasi algebra complessa d'ordine n , dotata di modulo. Per $n > 2$ non si può quindi per ora dare una risposta alla domanda posta sopra. Mi limito ad osservare qui che il teorema precedente vale anche per l'algebra dei numeri n -complessi, cioè per l'algebra complessa d'ordine n somma diretta ⁽³⁾ di n algebre complesse d'ordine 1, equivalenti all'ordinaria algebra dei numeri complessi. La dimostrazione del teorema in questo caso sarebbe un'immediata estensione di quella fatta dal prof. Spampinato per $n = 2$ (algebra bicomplessa).

1. Consideriamo l'algebra I' dei numeri biduali⁽⁴⁾, cioè l'algebra complessa a due unità u_1, u_2 , con la tabella di moltiplicazione:

$$(1) \quad u_1^2 = u_1, \quad u_1 u_2 = u_2 u_1 = u_2, \quad u_2^2 = 0.$$

Le funzioni $y(x)$ della variabile biduale

$$(2) \quad x = x_1 u_1 + x_2 u_2,$$

(1) G. SCORZA DRAGONI, *Sulle funzioni olomorfe di variabile bicomplessa*. (« Memorie della R. Accademia d'Italia », vol. V, 1934), cap. III, § 7. Si osservi che le funzioni bicomplesse olomorfe secondo Scorza Dragoni sono le funzioni bicomplesse totalmente derivabili.

(2) B. SEGRE, *Questioni geometriche legate alla teoria delle funzioni di due variabili complesse*. [« Rendic. del Seminario Matem. della R. Università di Roma », vol. VII, parte II, 1930-31]. Vedasi N. SPAMPINATO, loc. cit. in (3) a p. 839, nota (8) di p. 312.

(3) Cfr. G. SCORZA, *Corpi numerici ed algebre*. (Principato, Messina (1921)), parte II, cap. II, § 8.

(4) Per questa denominazione vedasi N. SPAMPINATO, *I punti bicomplessi e le varietà iperalgebriche del Segre*. [« Esercitazioni Matematiche », Circolo Matem. di Catania, vol. VIII, fasc. 4-5 (1935)].

analitiche secondo Sobrero e Agostinelli⁽¹⁾, o totalmente derivabili secondo N. Spampinato, sono tutte e sole le funzioni del tipo⁽²⁾:

$$(3) \quad y(x) = y_1(x_1) u_1 + [x_2 \cdot y'_1(x_1) + f(x_1)] u_2,$$

con $y_1(x_1)$ e $f(x_1)$ funzioni olomorfe della variabile complessa x_1 .

Se ad una coppia (x, y) di numeri biduali, con x dato dalla (2) ed $y = y_1 u_1 + y_2 u_2$, facciamo corrispondere, in un S_4 complesso dove si suppone fissato un sistema di coordinate cartesiane non omogenee, il punto $P(x_1, x_2, y_1, y_2)$, considerata una funzione $y(x)$ totalmente derivabile, e quindi del tipo (3), alle coppie $[x, y(x)]$ che si ottengono al variare di x nel campo di esistenza della $y(x)$, corrisponderanno i punti della superficie analitica F di equazioni:

$$(4) \quad \begin{cases} y_1 = y_1(x_1) \\ y_2 = x_2 \cdot y'_1(x_1) + f(x_1). \end{cases}$$

Questa superficie si dirà la *superficie caratteristica*, dell' S_4 complesso, immagine della funzione totalmente derivabile (3) della variabile biduale x .

2. Indicate con r' ed r'' le rette improprie dei piani coordinati $\rho_1(x_1, y_1)$ e $\rho_2(x_2, y_2)$, la superficie F è proiettata da r'' su ρ_1 in un tratto c_1 della curva analitica di equazione:

$$(5) \quad y_1 = y_1(x_1)$$

[e precisamente nel tratto di questa curva che si ottiene al variare di x_1 nel campo in cui è definita, oltre la $y_1(x_1)$, anche la $f(x_1)$]. Ogni piano proiettante da r'' un punto di c_1 , cioè ogni piano di equazioni:

$$(6) \quad \begin{cases} x_1 = c \\ y_1 = y_1(c), \end{cases} \quad (c \text{ essendo un punto di detto campo})$$

seca la superficie F nella retta di equazione:

$$(7) \quad y_2 = y'_1(c) \cdot x_2 + f(c)$$

(considerando (x_2, y_2) come le coordinate del punto variabile in questo piano). La F contiene dunque infinite rette tutte incidenti la retta r'' .

Si osservi che se fra le due punteggiate r' ed r'' si considera la proiettività ω subordinata dall'involuzione, nell' S_4 complesso proiettivo, di equazioni:

$$(8) \quad x'_1 = x_2, \quad x'_2 = x_1, \quad y'_1 = y_2, \quad y'_2 = y_1, \quad t' = t,$$

(1) L. SOBRERO, *Di una variabile ipercomplessa* ecc. [«Memorie della R. Accademia d'Italia», vol. VI, 1934]; C. AGOSTINELLI, *Sopra l'unità ipercomplessa* ecc. [«Atti del R. Istituto Veneto», to. XCIV, parte II, 1935].

(2) N. SPAMPINATO, loc. cit. in (2) a p. 839, n. 6.

il punto in cui una generatrice g della rigata F incontra r'' è l'omologo in ω del punto intersezione di r' con la tangente a c_1 nel punto in cui il piano $g r''$ incontra questa curva.

Viceversa se F è una rigata le cui generatrici appartengono a piani passanti per r'' (tale che ogni piano passante per r'' e incidente F la secchi soltanto in una generatrice), essa sarà proiettata da r'' sul piano ρ_1 in un tratto c_1 di curva analitica e se F è inoltre tale che il punto in cui una tangente a c_1 incontra r' e il punto in cui la generatrice di F , appartenente al piano determinato da r'' e dal punto di contatto di detta tangente, incontra r'' sono omologhi nella proiettività ω , F sarà rappresentata da equazioni del tipo (4) e quindi sarà una superficie caratteristica.

Si osservi ora che un numero biduale $x = x_1 u_1 + x_2 u_2$ è un divisore dello zero quando e solo quando è $x_1 = 0$ (e $x_2 \neq 0$). Le coppie di numeri biduali (x, y) divisori dello zero o nulli sono dunque rappresentati, nell' S_4 complesso, nei punti del piano $\rho_2(x_2, y_2)$. Per tal fatto⁽¹⁾ diremo *seminulli* i piani dell' S_4 paralleli al piano ρ_2 , cioè i piani propri passanti per r'' .

Possiamo allora concludere che:

I) *Le superficie caratteristiche dell' S_4 complesso, cioè le superficie immagini delle funzioni, di una variabile biduale, totalmente derivabili, o analitiche secondo Sobrero e Agostinelli, sono tutte e sole le superficie rigate secate in una sola generatrice da ogni piano seminullo che abbia con esse punti in comune e ciascuna tale che, detta c_1 la curva in cui essa è proiettata da r'' sul piano ρ_1 , la tangente a c_1 in un punto P_1 di questa e la generatrice, della rigata, appartenente al piano $P_1 r''$, sechino rispettivamente r' ed r'' in punti omologhi nella proiettività ω di equazioni (8).*

3. Una funzione lineare intera

$$y(x) = ax + b,$$

con a e b numeri biduali dati da

$$a = a_1 u_1 + a_2 u_2, \quad b = b_1 u_1 + b_2 u_2,$$

è una funzione totalmente derivabile. Infatti essa è data da:

$$y(x) = (a_1 x_1 + b_1) u_1 + [a_1 x_2 + (a_2 x_1 + b_2)] u_2$$

che rientra nel tipo (3). Una tale funzione ha per immagine nell' S_4 un piano. Si ha:

II) *I piani caratteristici dell' S_4 complesso, cioè i piani immagini delle funzioni lineari intere di una variabile biduale, sono i piani incidenti la retta r''*

(1) Analogamente ad una definizione data dal prof. SPAMPINATO per l'algebra dei numeri bicompleksi (loc. cit. in (3) a p. 839, § 1, n. 4).

e ciascuno tale che lo spazio determinato da esso e da r'' incontri la retta r' in un punto che ha per omologo, nella proiettività ω considerata al n. 2, il punto in cui detto piano incontra r'' .

4. Si osservi che la più generale funzione razionale fratta di una variabile, nell'algebra I' dei numeri biduali, è del tipo (essendo I' commutativa):

$$(9) \quad y(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m},$$

con $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ numeri biduali. Essa è una funzione totalmente derivabile. Infatti, posto la (2) e le altre:

$$(10) \quad a_j = a_{j1} u_1 + a_{j2} u_2, \quad b_i = b_{i1} u_1 + b_{i2} u_2$$

$$(j = 0, 1, \dots, n; \quad i = 0, 1, \dots, m),$$

e posto ancora:

$$A_1(x_1) = a_{01} x_1^n + a_{11} x_1^{n-1} + \dots + a_{n-1,1} x_1 + a_{n,1},$$

$$A_2(x_1) = a_{02} x_1^n + a_{12} x_1^{n-1} + \dots + a_{n-1,2} x_1 + a_{n,2},$$

$$B_1(x_1) = b_{01} x_1^m + b_{11} x_1^{m-1} + \dots + b_{m-1,1} x_1 + b_{m,1},$$

$$B_2(x_1) = b_{02} x_1^m + b_{12} x_1^{m-1} + \dots + b_{m-1,2} x_1 + b_{m,2},$$

si ha, tenendo conto della tabella di moltiplicazione delle unità u_1 e u_2 :

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = A_1(x_1) u_1 + [x_2 \cdot A'_1(x_1) + A_2(x_1)] u_2,$$

$$(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{B_1(x_1)} u_1 - \frac{x_2 B'_1(x_1) + B_2(x_1)}{[B_1(x_1)]^2} u_2,$$

indicando con $A'_1(x_1)$ e $B'_1(x_1)$ i polinomi derivati dei polinomi $A_1(x_1)$ e $B_1(x_1)$ rispettivamente. È quindi:

$$y(x) = (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n) \cdot$$

$$\cdot (b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m)^{-1} = \frac{A_1(x_1)}{B_1(x_1)} u_1 +$$

$$+ \left[- \frac{x_2 A_1(x_1) B'_1(x_1) + A_1(x_1) B_2(x_1)}{[B_1(x_1)]^2} + \frac{x_2 A'_1(x_1) + A_2(x_1)}{B_1(x_1)} \right] u_2 = \frac{A_1(x_1)}{B_1(x_1)} u_1 +$$

$$+ \left[x_2 \frac{A'_1(x_1) B_1(x_1) - A_1(x_1) B'_1(x_1)}{[B_1(x_1)]^2} + \frac{A_2(x_1) B_1(x_1) - A_1(x_1) B_2(x_1)}{[B_1(x_1)]^2} \right] u_2$$

e si scorge che la funzione (9) è del tipo (3), cioè totalmente derivabile.

Le superficie caratteristiche immagini delle funzioni razionali fratte sono algebriche.

5. Sia f un tratto di filo analitico dell' S_4 complesso; esso determina un tratto c di curva analitica al quale appartiene⁽¹⁾. Supponiamo che f non sia seminullo, cioè non appartenga ad un piano seminullo (n. 2); anche tale sarà allora il tratto di curva c , che verrà quindi proiettato da r'' sul piano p_1 in un tratto di curva c_1 . Se P è un punto di c e P_1 il punto, di c_1 , proiezione di P da r'' su p_1 , si consideri la tangente t_1 a c_1 in P_1 e sia T'' il punto di r'' omologo, in ω , del punto $T' = t_1 r'$. La retta PT'' genera, al variare di P su c , una superficie analitica caratteristica F contenente il tratto di curva c e quindi il tratto di filo l . Viceversa è evidente che una superficie caratteristica contenente l , e quindi c , coincide con F .

Supponiamo invece che il tratto di filo l appartenga ad un piano seminullo α . Se l è rettilineo, per esso passano infinite superficie caratteristiche. Infatti, detta r la retta alla quale l appartiene ed R' il punto di r' omologo in ω del punto in cui r incontra r'' , per fissare una superficie caratteristica contenente l basta fissare in S_4 una curva analitica c (non seminulla) passante per un punto P di r e tale che la sua proiezione c_1 da r'' su p_1 ammetta come tangente nel punto $P_1 \equiv \alpha p_1$ la retta $P_1 R'$: la superficie caratteristica passante per la curva c conterrà evidentemente la retta r e quindi il tratto di filo l ⁽²⁾.

Se infine l è seminullo ma non rettilineo, e quindi il tratto di curva c da esso determinato non è un segmento rettilineo, per c , e quindi per l , non passerà alcuna superficie caratteristica, perchè abbiamo già osservato (n. 2) che una superficie caratteristica con un piano seminullo che la sechi ha in comune soltanto una generatrice.

Concludendo si ha il teorema:

III) *Per un tratto di filo analitico non seminullo passa una ed una sola superficie caratteristica dell' S_4 complesso.*

Per un tratto di filo analitico seminullo l passano infinite superficie caratteristiche o nessuna, secondo che l sia o no rettilineo.

6. Analogamente a quanto avviene nel campo bicompleso⁽³⁾, del teorema precedente si può dare un'altra interpretazione, qualora si rappresentino i numeri biduali in un S_4 reale.

(1) Vedasi N. SPAMPINATO, loc. cit. in (3) a p. 839, § I, n. 5.

(2) In altri termini, se $x_1 = h$, $y_1 = k$, $y_2 = ax_2 + b$ sono le equazioni della retta r , per scrivere le equazioni (4) (n. 1) di una superficie caratteristica passante per r basta fissare una funzione $y_1(x_1)$ che nel punto $x_1 = h$ assuma il valore k e la cui derivata nello stesso punto assuma il valore a ; e fissare inoltre una funzione $f(x_1)$ che nel punto $x_1 = h$ assuma il valore b . Ciò evidentemente può farsi in infiniti modi.

(3) Vedasi N. SPAMPINATO, loc. cit. in (3) a p. 839, § II, n. 1.

Precisamente, se ad un numero biduale $x = x_1 u_1 + x_2 u_2 = (x'_1 + ix''_1) u_1 + (x'_2 + ix''_2) u_2$ (x'_1, x''_1, x'_2, x''_2 numeri reali) si fa corrispondere il punto (x'_1, x''_1, x'_2, x''_2) di un S_4 reale, assegnato un tratto di filo analitico l , di equazioni:

$$(11) \quad x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad y_1 = y_1(t), \quad y_2 = y_2(t),$$

dove $x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t)$ indicano funzioni complesse olomorfe della variabile reale t , definite in un certo intervallo (t', t'') , i numeri biduali $x = x_1 u_1 + x_2 u_2$ che si ottengono dalle prime due delle (11) al variare di t in detto intervallo, hanno per immagini nell' S_4 reale i punti di una linea analitica l_x . Posto $x_1(t) = x'_1(t) + ix''_1(t)$, $x_2(t) = x'_2(t) + ix''_2(t)$, la linea l_x ha le equazioni:

$$(12) \quad x'_1 = x'_1(t), \quad x''_1 = x''_1(t), \quad x'_2 = x'_2(t), \quad x''_2 = x''_2(t).$$

L'assegnare il filo l equivale ad assegnare la linea l_x e su questa una funzione biduale $y^*(x)$: quella che nel punto di l_x , rispondente ad un assegnato valore del parametro reale t , assume il valore biduale $y_1(t) u_1 + y_2(t) u_2$.

L'assegnare poi nell' S_4 complesso una superficie caratteristica, immagine delle coppie di numeri biduali $[x, y(x)]$, essendo $y(x)$ una funzione totalmente derivabile della variabile biduale x , equivale ad assegnare nell' S_4 reale una regione quadridimensionale G (campo di variabilità della x) e la funzione biduale $y(x)$ del punto variabile in questa regione.

Se la superficie caratteristica contiene il filo l , la regione quadridimensionale G conterrà la linea l_x e la funzione $y(x)$ si ridurrà, lungo questa linea, alla funzione $y^*(x)$.

Il teorema III) si può allora enunciare nel seguente modo:

III') Sia l_x una linea analitica dell' S_4 reale, di equazioni (12), $y^*(x)$ una funzione biduale del punto variabile su l_x , ed l il filo dell' S_4 complesso determinato da l_x e dalla funzione $y^*(x)$ definita lungo questa linea. Il problema della determinazione di una funzione biduale $y(x)$ totalmente derivabile, o analitica secondo Sobrero e Agostinelli, definita in un intorno quadridimensionale G di l_x , che su l_x si riduca alla funzione assegnata,

a) ammette una ed una sola soluzione se il filo l non è seminullo;

b) se invece il filo l è seminullo, cioè se la linea l_x appartiene ad un piano parallelo al piano (x'_2, x''_2) ed è costante il coefficiente di u_1 della funzione $y^*(x)$, il problema ammette infinite soluzioni o nessuna secondo che il filo l sia o no rettilineo.

(1) Se il filo è seminullo, le funzioni $x_1(t), y_1(t)$ si ridurranno a delle costanti. In tal caso la linea l_x apparterrà ad un piano parallelo al piano (x'_2, x''_2) dell' S_4 reale, e della funzione $y^*(x)$, definita lungo questa linea, si ridurrà ad una costante il coefficiente di u_1 .

Matematica (Analisi). — *Sulle radici caratteristiche delle funzioni olomorfe di matrici*. Nota di S. CHERUBINO, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. G. SCORZA.

Se, in un'algebra A commutativa e contenente l'identità, la matrice y è funzione olomorfa della matrice variabile x , in un intorno conveniente di x (appartenente ad A ed all'insieme in cui $y = f(x)$ è definita), questa funzione è sviluppabile in serie di potenze della matrice x , con coefficienti appartenenti ad A ⁽²⁾.

La costruzione delle radici caratteristiche di $y = f(x)$ si riconduce dunque, in ogni intorno opportuno di x , al caso delle serie di potenze di x a coefficienti matrici di A .

Se questi coefficienti fossero dei numeri (complessi, come l'algebra A che consideriamo) cioè se la serie di potenze di x fosse *scalare*, le radici caratteristiche di $f(x)$ sarebbero i numeri $f(\alpha)$ ottenuti sostituendo x con le proprie radici caratteristiche α , il che è garantito senz'altro dalle stesse condizioni di convergenza delle serie scalari di potenze.

È naturale pensare che se la serie $f(x)$ non è scalare, occorre sostituire sia x sia i coefficienti con le relative radici caratteristiche, onde ottenere quelle di $y = f(x)$. Ciò è suggerito sia dal fatto or mentovato, che costituisce una generalizzazione del noto teorema del Sylvester, sia dal fatto che, per un polinomio in x con coefficienti matrici di A , essendo A commutativa, un famoso teorema del Frobenius assicura appunto che le radici caratteristiche di $f(x)$ si otterrebbero nel modo anzidetto.

Ci proponiamo, in queste pagine, di accertarci che anche al teorema del Frobenius è consentita l'estensione già data a quella del Sylvester.

1. Sia A un'algebra commutativa di matrici, possedente l'identità ed

$$u_1, u_2, \dots, u_m$$

un suo sistema di unità (m è l'ordine di A).

Ogni elemento a di A si esprime come combinazione lineare

$$(I) \quad a = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_m u_m$$

(1) Nella seduta del 5 giugno 1936.

(2) Per la nozione di funzione olomorfa di matrice e per le sue proprietà vedasi una mia Memoria in corso di stampa negli « Annali della Scuola Normale » dal titolo: *Funzioni olomorfe di matrici*. Ved. anche una mia Nota nei « Comptes Rendus » (1936) col titolo: *Fonctions holomorphes de matrice*.

delle unità u_i , coi coefficienti a_s numeri complessi, e le sue radici caratteristiche, giusta il citato teorema del Frobenius, si hanno sostituendo in (1) le u_1, \dots, u_m con le proprie radici caratteristiche. L'ordine col quale devono esser prese queste radici per ottenere quelle di a è determinato non dai coefficienti a_s , ma dalle u_1, \dots, u_m stesse, ossia dall'algebra A . Quindi, fissato l'ordine col quale si sostituiscono le radici caratteristiche di una, a piacere, delle u_i resta fissato quello corrispondente delle radici di ciascuna delle rimanenti unità.

In altri termini, detto n l'ordine delle matrici di A , se le mn radici caratteristiche delle u_1, \dots, u_m si dispongono su m righe ed n colonne in modo che sulla riga i^{ma} vi siano quelle di u_i , riempiendo ad arbitrio una di queste righe, ad es. la prima, resta fissata la distribuzione delle radici delle u_2, \dots, u_m su tutti i rimanenti posti; ed una permutazione sugli elementi di una riga induce la stessa permutazione su tutte le altre righe.

Ciò si può esprimere dicendo che:

L'algebra A fissa l'ORDINE RELATIVO delle radici caratteristiche di ciascun suo sistema di unità.

Segue che volendo prefissare l'ordine delle radici caratteristiche di un elemento di A , basta fissare opportunamente quello delle radici caratteristiche di una sola qualsiasi delle unità u_i .

Se $R(a, b, \dots)$ è una matrice funzione razionale intera qualunque delle matrici a, b, \dots appartenenti ad A , con coefficienti scalari, per avere le radici caratteristiche di R basta esprimere a, b, \dots per mezzo delle unità u_i e poi sostituir queste con le proprie radici caratteristiche nell'ordine relativo individuato da A . Tanto perchè, a norma del detto teorema del Frobenius, l'ordine col quale vanno prese le radici caratteristiche di u_1, \dots, u_m in qualunque funzione razionale di queste è sempre lo stesso. Il che vale sostituire ad a, b, \dots le rispettive radici caratteristiche in ordine relativo opportuno, che sarà quello determinato da A a mezzo di un sistema di unità.

2. Consideriamo ora una serie di potenze.

$$(2) \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_p x^p + \dots$$

in cui coefficienti a_s appartengono all'algebra A insieme alla matrice x e supponiamo che questa serie converga ad un elemento $y = f(x)$ della stessa A ⁽¹⁾.

Ponendo

$$(3) \quad a_s = a_1^{(s)} u_1 + a_2^{(s)} u_2 + \dots + a_m^{(s)} u_m$$

(1) Per le condizioni di convergenza ved.: N. SPAMPINATO, *Sulle funzioni di una variabile in un'algebra ad n unità dotata di modulo*. Mem. I, « Rend. Pal. ». to. 57 (1933), p. 31 e: S. CHERUBINO, *Sulle serie di potenze di una variabile, in un'algebra*, « Rend. Lincei », vol. XXII, 1935.

$$(4) \quad f_i(x) = a_i^{(0)} + a_i^{(1)}x + a_i^{(2)}x^2 + \dots + a_i^{(p)}x^p + \dots$$

$$(5) \quad H_i = f_i(x) \cdot u_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

risulta

$$(6) \quad f(x) = H_1 + H_2 + \dots + H_m$$

e la convergenza della serie (2) equivale a quella delle serie scalari $f_i(x)$, nella stessa matrice x .

Indichiamo con

$$(7) \quad \mu_1^{(i)}, \mu_2^{(i)}, \dots, \mu_n^{(i)}$$

le radici caratteristiche di u_i e poniamo che facendo nelle (7) $i = 1, 2, \dots, m$ si ottengano le radici caratteristiche delle unità u_i precisamente nell'ordine relativo, individuato da A .

Indichiamo con

$$(8) \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

le radici caratteristiche di x scritte nell'ordine col quale si dedurrebbero prendendo quelle delle u_i con la disposizione (7).

Le condizioni di convergenza delle serie scalari (4) ci assicurano che le radici caratteristiche delle matrici $f_i(x)$ sono precisamente

$$(9) \quad f_i(\alpha_1), f_i(\alpha_2), \dots, f_i(\alpha_n).$$

Di qui non siamo senz'altro autorizzati a dedurre che le radici caratteristiche delle H_i sono date dai prodotti

$$(10) \quad \chi_i^{(s)} = f_i(\alpha_s) \mu_i^{(s)} \quad (i = 1, 2, \dots, m; s = 1, 2, \dots, n).$$

Ciò accade certamente, giusta l'osservazione che chiude l'articolo precedente, per quelle H_i in cui le corrispondenti $f_i(x)$ invece di esser serie sono funzioni razionali intere di x . Se tutte le $f_i(x)$ son finite, le H_i son tutte funzioni razionali intere di x e delle unità u_1, u_2, \dots, u_m , ed è tale anche $f(x)$, onde la distribuzione relativa (7) insieme alla (8), dà luogo alle radici caratteristiche di $f(x)$, che si otterranno sostituendo ciascuna radice (7) al posto di u_i e ciascuna radice (8) al posto di x , scegliendole con lo stesso indice.

È poi ovvio che, considerando $f(x)$ come funzione razionale intera di x con coefficienti le matrici a_s , l'operazione ultimamente indicata lascia esprimere le radici caratteristiche di $f(x)$ a mezzo delle (8) e delle radici caratteristiche degli a_s , le quali vengono a prendere il posto degli stessi coefficienti a_s . L'ordine relativo delle (8) e di queste ultime radici caratteristiche è sempre fissato da quello delle u_i , ossia dall'algebra A .

3. Si tratta di assodare che la stessa regola di costruzione delle radici caratteristiche di $f(x)$ vale anche quando $f(x)$ sia una serie anzichè una funzione razionale intera. È chiaro che, per tale scopo, basta assodare che le radici caratteristiche di ogni H_i si ottengono da quelle di x e di u_i con la stessa regola che è applicabile nell'ipotesi di $f_i(x)$ funzione razionale intera.

Ebbene, ciò è senz'altro vero. Basta osservare che gli ordinamenti possibili delle radici di u_i e di $f_i(x)$, ossia di x , sono in numero finito, cioè $(n!)^2$, mentre le possibili funzioni $f_i(x)$ sono in numero infinito, per riconoscere che nel caso in esame può ripetersi lo stesso ragionamento adoperato nella dimostrazione del teorema di Frobenius più volte citato ⁽¹⁾. Si conclude che tale ordinamento è indipendente dai coefficienti $a_s^{(i)}$, $s = 1, 2, \dots$, della serie $f_i(x)$ ed è quindi lo stesso di quello che si ha per $f_i(x)$ funzione razionale intera.

Possiamo dunque enunciare che:

per ogni matrice dell'algebra A (commutativa e contenente l'identità) assegnata mediante una serie di potenze di x con coefficienti elementi di A, le radici caratteristiche si ottengono sostituendo x ed i coefficienti della serie con le proprie radici caratteristiche, prese nell'ordine relativo individuato da A (mediante un sistema di unità).

(1) Cfr. la dimostrazione di J. SCHUR riportata nel trattato dello SCORZA, *Corpi numerici ed Algebre*. Messina (1921), pp. 175-179.

Matematica (Fisica matematica). — *Sopra un problema relativo alla propagazione lineare*. Nota di F. SBRANA, presentata dal Corrisp. G. GIORGI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Astronomia. — *Sullo sviluppo delle orbite dei sistemi binari*⁽¹⁾. Nota di G. BEMPORAD, presentata⁽²⁾ dal Socio G. ARMELLINI.

In una Nota di recente pubblicazione⁽³⁾, H. von Schelling riprende in esame la questione se il progressivo aumento dell'eccentricità nelle orbite delle stelle doppie trovi la sua spiegazione nella progressiva diminuzione della massa per effetto della radiazione, ammettendo che questa diminuzione avvenga secondo la legge di Eddington-Jeans $dm/dt = -\lambda m^3$. L'A. osserva in primo luogo che tutti coloro che si sono occupati in precedenza di tale problema hanno arbitrariamente aggiunto il postulato che l'orbita abbia infiniti absidi, e si propone di darne una trattazione che astragga da questo postulato aggiuntivo. Egli arriva per tal modo a far vedere come il complesso delle soluzioni del problema è costituito da due gruppi ben caratterizzati di soluzioni: un gruppo che comporta infiniti absidi, e un gruppo in cui gli absidi non ci sono o sono in numero limitato. Nelle soluzioni del primo gruppo l'eccentricità rimane sensibilmente costante, in quelle del secondo gruppo essa ha invece una variazione progressiva che sarebbe in buon accordo coi dati statistici relativi alle stelle doppie. Ove perciò non vi siano serie ragioni di carattere extra matematico per escludere la possibilità di esistenza di orbite senza absidi, il risultato essenziale ottenuto dai precedenti autori, che cioè la diminuzione di massa secondo la legge Eddington-Jeans conduca esclusivamente ad orbite con eccentricità sensibilmente costante, rimarrebbe del tutto infirmato.

Di questo problema anch'io ho avuto occasione di occuparmi⁽⁴⁾, cercando di caratterizzare le variazioni, anche non progressive, dell'eccentricità, e pervenendo in particolare alla esclusione di variazioni progressive in relazione con l'età del sistema; ma la discussione da me esposta non è in alcun modo legata al postulato della esistenza di absidi, né in numero finito né in numero infinito. Il risultato è del tutto generale, e questo mi interessa di rilevare di fronte alla obbiezione del von Schelling.

La formola fondamentale su cui la mia discussione è imperniata è

$$(I) \quad e^2 = \frac{2\lambda \sin v}{1 + e \cos v} + \text{costante}$$

(1) Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astronomico di Pino Torinese (Torino).

(2) Nella seduta del 5 giugno 1936.

(3) H. von SCHELLING, *Zur Evolution der Doppelsternbahnen*, A. N. 6190.

(4) G. BEMPORAD, *Sulle variazioni dell'eccentricità nelle orbite dei sistemi binari*. Questi « Rendiconti », 6, 19, pp. 880-886.

nella quale $v = \theta - \omega$ è l'anomalia contata a partire dal periastro. È superfluo notare che l'introduzione della quantità ω , longitudine del periastro, non implica che l'orbita debba avere un effettivo periastro, potendo la variabile v non assumere mai valori multipli di π . La sola limitazione da me posta al problema è stata che la costante di (1) sia positiva e minor d'uno. Ho bensì notato come questa limitazione discende anche come conseguenza dell'ipotesi che vi siano absidi, ma il fatto che essa traduce come condizione necessaria e sufficiente è un altro. Ciò che noi vogliamo appurare è se sia possibile che un'orbita inizialmente poco eccentrica, diventi in progresso di tempo molto eccentrica. È quindi strettamente aderente al problema l'ipotesi che inizialmente l'eccentricità sia piccola, ed in questa ipotesi la costante di (1) è piccola e positiva. Ponendo allora ϵ^2 la costante stessa, si trova che le variazioni totali dell'eccentricità sono insensibili quando $1 - \epsilon^2$ sia grande rispetto al coefficiente λ , il quale è estremamente piccolo. Basta dunque che inizialmente l'eccentricità non sia estremamente vicina ad uno perchè rimanga esclusa la possibilità di variazioni progressive di essa. Sono perciò escluse variazioni che trasformino orbite con piccola eccentricità in orbite molto allungate. E tale conclusione ha valore generale e non limitato da alcuna ipotesi sulla esistenza o meno di absidi.

L'analisi del von Schelling condurrebbe invece a stabilire l'esistenza effettiva di orbite (prive di absidi o con absidi in numero limitato) in cui l'eccentricità aumenta progressivamente. A tale risultato l'autore perviene ponendo sotto una particolare forma gl'integrali del moto, nella quale gli elementi sono tutti espressi parametricamente in funzione di un'unica variabile q che ha poi il significato di $\frac{d}{d\theta} \left(l g \frac{1}{r} \right)$. La quantità q risulta non poter assumere qualsiasi valore, ma solo quelli contenuti entro certi intervalli, affinché una certa espressione w^2 che compare sotto il segno di radice quadrata, risulti positiva. Precisamente, essendo w^2 un polinomio di 3° grado in q col primo coefficiente negativo, se q_1, q_2, q_3 sono le radici, supposte tutte reali, di w^2 , q può variare soltanto fra $-\infty$ e q_1 , oppure soltanto fra q_2 e q_3 . Il caso nuovo, che viene cioè automaticamente escluso con l'assunzione dell'esistenza di infiniti absidi, è quello in cui q trovandosi nel primo di questi intervalli (oppure a sinistra dell'unica radice reale), sia decrescente in un certo istante: allora, da quell'istante in poi seguita a decrescere e tende a $-\infty$ per $t \rightarrow \infty$. Le condizioni trovate sono, come l'A. avverte, necessarie ma non sufficienti per l'esistenza delle corrispondenti soluzioni, e l'indagine non è spinta fino alla ricerca se possa effettivamente la quantità q variare decrescendo a sinistra di q_1 e se il polinomio w^2 possa avere una sola radice reale. Tale polinomio contiene la costante arbitraria d'integrazione C , e nessuna ricerca vien fatta circa l'ordine di grandezza fisicamente possibile per questa costante. Di fatto è possibile che l'arbitrarietà della costante C venga limitata dalla circostanza che la diminuzione di massa è estre-

mamente lenta, ed è possibile che una indagine più minuziosa da questo punto di vista conduca ad escludere qualche caso. Ma è facile vedere che anche nell'ipotesi $\lim q = -\infty$ la variazione progressiva dell'eccentricità è puramente illusoria. Sostituendo nelle formole che rappresentano gli elementi del moto in funzione di q , i rispettivi valori asintotici per $q \rightarrow -\infty$ l'A. perviene infatti all'eguaglianza:

$$(2) \quad e^2 \sim 1 + C + \frac{4\alpha^2 r_0^2}{m^2}$$

nella quale C , r_0 sono costanti, m è la massa variabile, e α è il coefficiente (da me indicato con λ) che compare nell'equazione di Eddington-Jeans. Ora, mentre formalmente la (2) mostrerebbe la variazione progressiva di e per effetto della progressiva diminuzione di m , si deve però tener conto del fatto che la quantità α è estremamente piccola. Fintanto che m non sia diventata essa stessa così piccola da rendere sensibile il rapporto $\frac{\alpha}{m}$, risultano anche dalla (2) insensibili le variazioni di e . Ma, d'altra parte, assai prima che la massa sia ridotta così piccola (ossia praticamente sia annientata) è ragionevole pensare che debba raffreddarsi, cessar di irradiare, e quindi cessar di diminuire.

È molto interessante il fatto messo in evidenza dal von Schelling che la statistica dimostra l'esistenza di una relazione del tipo (2) fra e ed m , ma con un coefficiente b , in luogo di α^2 , che è di ben altro ordine di grandezza. Tale dipendenza rimane perciò ancora non spiegata, e rimane confermato che la diminuzione di massa è del tutto impotente a spiegarla.

Astronomia. — *Osservazioni meridiane di SATURNO, di URANO e della LUNA nel 1935* ⁽¹⁾. Nota di L. GIALANELLA, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. ARMELLINI.

1. Il lavoro di osservazione dei Pianeti grandi e medi per mezzo dell'invertibile meridiano *Bamberg* del R. Osservatorio Astronomico del Campidoglio è continuato regolarmente durante tutto il decorso anno 1935, nel quale ho potuto compiere buone serie di osservazioni di Marte, Giove, Vesta, Saturno, Urano e della Luna. Questa Nota, che fa seguito ad altre precedenti già pubblicate in questi « Rendiconti », riporta i risultati delle osservazioni di *Saturno*, di *Urano* e della *Luna*.

I dettagli riguardanti lo strumento adoperato, il metodo delle osservazioni e dei calcoli, le costanti strumentali sono descritti diffusamente nelle Note citate, e tralascio pertanto di riportarli qui per esteso. Ricorderò soltanto che lo strumento adoperato è munito di micrometro impersonale mosso a mano, collegato col cronografo Cavignato in sincronizzazione col pendolo siderale Kobell (ad asta *invar* di Riefler e a compensazione barometrica Riefler). Le osservazioni comprendono la determinazione delle *ascensioni rette* dei tre Pianeti, nonchè la misura — sempre per mezzo del micrometro impersonale — del *diametro orizzontale* di *Saturno* internamente al sistema degli anelli. Le stelle di confronto — per la determinazione delle ascensioni — sono state scelte fra le fondamentali del *Nautical Almanac*, avendo cura che avessero coordinate prossime a quelle del Pianeta osservato. L'elenco di queste stelle è riportato nella Tabella I, e di esse sono date le posizioni medie, e per ognuna anche la correzione complessiva C_{sec8} comprendente la correzione per l'*aberrazione diurna meridiana* e quella per la *larghezza dei contatti* e *passo morto* della vite micrometrica.

(1) Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astronomico di Roma (sul Campidoglio).

(2) Nella seduta del 5 giugno 1936.

TABELLA I.

N.	Stella	mg.	$\alpha_{1935,0}$	$\delta_{1935,0}$	C sec δ
1	δ Cassiopeiae . .	2.8	1 ^h 21 ^m 32 ^s .651	+ 59° 53' 53".69	+ 0 ^s .018
2	η^A Piscium . . .	3.7	1 28 00.047	+ 15 00 40.92	+ 0 .009
3	θ Piscium . . .	4.5	1 41 57.460	+ 8 49 53.18	+ 0 .009
4	α Trianguli . .	3.6	1 49 22.142	+ 29 15 46.68	+ 0 .011
5	ϵ Cassiopeiae . .	3.4	1 49 41.684	+ 63 21 03.56	+ 0 .019
6	ν Ceti	4.2	1 56 56.502	— 21 23 31.16	+ 0 .010
7	ξ^1 Ceti	4.5	2 09 33.054	+ 8 32 34.16	+ 0 .009
8	θ Arietis . . .	5.7	2 14 30.266	+ 19 36 05.25	+ 0 .010
9	β Virginis . . .	3.8	11 47 18.508	+ 2 07 52.18	+ 0 .009
10	π Virginis . . .	4.6	11 57 32.494	+ 6 58 36.60	+ 0 .009
11	θ Virginis . . .	4.2	12 01 53.861	+ 9 05 38.69	+ 0 .009
12	ϵ Corvi	3.2	12 06 46.653	— 22 15 29.52	+ 0 .010
13	γ Virginis . . .	2.9	12 38 21.836	— 1 05 35.05	+ 0 .009
14	ϵ Ursae Majoris .	1.7	12 51 10.490	+ 56 18 44.92	+ 0 .016
15	κ Virginis . . .	4.3	14 09 25.449	— 9 58 19.14	+ 0 .009
16	λ Librae	6.3	14 19 55.487	— 11 25 04.96	+ 0 .009
17	λ Librae	5.9	15 24 35.148	— 16 29 27.81	+ 0 .009
18	α Aquarii . . .	3.2	22 02 26.739	— 0 38 10.59	+ 0 .009
19	ζ Cephei	3.6	22 08 35.718	+ 57 52 49.87	+ 0 .017
20	θ Aquarii	4.3	22 13 24.282	— 8 06 27.24	+ 0 .009
21	γ Aquarii	4.0	22 18 17.952	— 1 42 55.44	+ 0 .009
22	η Aquarii	4.1	22 32 00.969	— 0 27 10.83	+ 0 .009
23	κ Aquarii	5.3	22 34 23.437	— 4 33 49.81	+ 0 .009
24	ι Cephei	3.7	22 47 21.631	+ 65 51 29.96	+ 0 .022
25	λ Aquarii	3.8	22 49 13.432	— 7 55 33.14	+ 0 .009
26	ϵ^2 Aquarii	3.8	23 05 59.012	— 21 31 31.75	+ 0 .010
27	ψ^3 Aquarii . . .	5.2	23 15 34.836	— 9 57 58.37	+ 0 .009
28	κ Piscium	4.9	23 23 35.959	+ 0 53 58.61	+ 0 .009
29	γ Cephei	3.4	23 36 39.566	+ 77 16 10.19	+ 0 .041

TABELLA II.

Data	Stella	Oculare	α app.	t oss.	$i \cos \gamma$ sec δ	$a \sin \gamma$ sec δ	Δt	Medie serali Δt
1935								
Maggio 14	9	WE	47 ^m 21 ^s .23	48 ^m 03 ^s .10	+ 0 ^s .12	+ 2 ^s .52	- 44 ^s .51	- 44 ^s .58
	10	WE	57 35.27	58 17.54	+ 0.07	+ 2.29	- 44.63	
	11	EW	61 56.66	62 39.07	+ 0.09	+ 2.17	- 44.67	
	12	WE	66 49.40	67 30.20	- 0.06	+ 3.82	- 44.56	
	13	EW	98 24.74	99 06.66	- 0.03	+ 2.68	- 44.57	
	14	WE	111 14.33	112 00.77	- 0.13	- 1.77	- 44.54	
Giugno 14	15	EW	09 28.71	11 12.06	0.00	+ 3.00	- 106.35	- 106.36
	16	WE	19 58.81	21 42.10	- 0.01	+ 3.07	- 106.35	
	17	WE	24 38.87	26 21.96	+ 0.02	+ 3.28	- 106.39	
Settembre 30	19	EW	08 39.53	10 07.32	- 0.14	- 0.67	- 86.98	- 86.98
	20	WE	13 28.72	14 54.79	- 0.07	+ 0.98	- 86.98	
	21	EW	18 22.30	19 48.53	- 0.07	+ 0.88	- 87.04	
	25	EW	49 17.93	50 43.96	- 0.08	+ 0.98	- 86.93	
Ottobre 3	20	WE	13 28.70	14 51.14	- 0.04	+ 0.79	- 83.19	- 83.16
	21	EW	18 22.28	19 44.78	- 0.04	+ 0.71	- 83.17	
	23	WE	34 27.84	35 50.29	- 0.05	+ 0.75	- 83.15	
	24	EW	47 26.12	48 50.54	- 0.25	- 1.02	- 83.15	
Ottobre 10	21	WE	18 22.22	19 37.08	- 0.06	+ 0.77	- 75.57	- 75.56
	22	WE	32 05.27	33 20.12	0.00	+ 0.75	- 75.60	
	24	EW	47 25.97	48 42.77	- 0.19	- 1.10	- 75.51	
	26	EW	66 03.71	67 18.24	- 0.04	+ 1.06	- 75.55	
Ottobre 11	18	EW	02 30.91	03 44.41	+ 0.01	+ 0.89	- 74.40	- 74.38
	19	WE	08 39.29	09 54.37	0.00	- 0.69	- 74.39	
	21	EW	18 22.21	19 35.70	+ 0.01	+ 0.90	- 74.40	
	22	EW	32 05.26	33 18.72	0.00	+ 0.88	- 74.34	
Ottobre 13	19	WE	08 39.24	09 51.09	- 0.06	- 0.67	- 71.12	- 71.11
	20	EW	13 28.61	14 38.77	- 0.03	+ 0.98	- 71.11	
	23	EW	34 27.77	35 38.00	- 0.04	+ 0.93	- 71.12	
	27	WE	75 39.35	76 49.47	- 0.03	+ 1.02	- 71.11	

Segue: TABELLA II.

Data	Stella	Oculare	$\alpha_{app.}$	$t_{oss.}$	$i \cos \chi$ sec δ	$\bar{n} \sin \chi$ sec δ	Δt	Medie serali Δt
1935								
Ottobre 14	23	WE	34 ^m 27 ^s .76	35 ^m 36 ^s .66	+ 0 ^s .03	+ 0 ^s .97	— 69.90	— 69.87
	26	WE	06 03.69	07 12.28	+ 0.01	+ 1.26	— 69.86	
	27	EW	15 39.35	16 48.14	+ 0.01	+ 1.06	— 69.86	
	28	WE	23 40.39	24 49.30	+ 0.08	+ 0.88	— 69.87	
	29	EW	36 46.37	37 59.73	0.00	— 3.50	— 69.86	
Ottobre 16	23	WE	34 27.75	35 34.45	— 0.01	+ 0.92	— 67.61	— 67.59
	26	WE	06 03.67	07 10.00	— 0.01	+ 1.20	— 67.52	
	28	EW	23 40.38	24 47.12	+ 0.01	+ 0.83	— 67.58	
	29	WE	36 46.31	37 57.40	— 0.21	— 3.31	— 67.57	
Ottobre 17	18	EW	02 30.85	03 36.41	+ 0.03	+ 0.84	— 66.43	— 66.40
	19	WE	08 39.14	09 46.19	0.00	— 0.65	— 66.40	
	20	EW	13 28.57	14 34.02	— 0.01	+ 0.95	— 66.39	
	23	WE	34 27.74	35 33.21	0.00	+ 0.90	— 66.37	
Ottobre 30	19	EW	08 38.76	09 22.31	0.00	— 0.70	— 42.85	— 42.86
	20	WE	13 28.42	14 10.26	0.00	+ 1.02	— 42.86	
	21	EW	18 22.01	19 03.96	+ 0.01	+ 0.91	— 42.87	
	23	EW	34 27.60	35 09.51	0.00	+ 0.96	— 42.87	
Novembre 29	5	EW	49 48.96	50 37.77	— 0.13	— 1.22	— 47.46	— 47 ^s .47
	6	WE	57 01.11	57 47.18	— 0.04	+ 1.40	— 47.46	
	7	WE	09 38.01	10 24.67	+ 0.01	+ 0.82	— 47.49	
	8	EW	14 35.47	15 22.34	+ 0.01	+ 0.59	— 47.47	
Dicembre 6	1	EW	21 38.87	22 22.16	— 0.06	— 0.87	— 42.36	— 42.35
	3	WE	42 02.27	42 43.73	+ 0.08	+ 0.78	— 42.32	
	4	WE	49 27.38	50 09.30	+ 0.12	+ 0.35	— 42.39	
	8	WE	14 35.46	15 17.22	+ 0.02	+ 0.56	— 42.34	
Dicembre 15	1	EW	21 38.69	22 14.59	— 0.12	— 0.79	— 34.99	— 34.99
	2	WE	28 04.79	28 39.19	— 0.02	+ 0.60	— 34.99	
	3	EW	42 02.20	42 36.51	— 0.01	+ 0.70	— 35.00	

2. Per il calcolo della correzione dell'orologio Δt ho impiegato la formula di Mayer:

$$\Delta t = \alpha - t_{\text{oss.}} - i \cos \chi \sec \delta - a \sin \chi \sec \delta$$

essendo: α e δ l'ascensione retta e la declinazione (apparenti) della stella; $t_{\text{oss.}}$ il tempo di osservazione (in cui è stata conglobata la correzione $C_{\text{sec} \delta}$); χ la distanza zenitale (apparente); i il coefficiente d'inclinazione; a il coefficiente azimutale. Il coefficiente d'inclinazione è stato ottenuto applicando a ciascuna stella la correzione quale è risultata dalla corrispondente lettura della livella, fatta avanti l'inizio dell'osservazione nella prima posizione del cannocchiale e dopo la fine dell'osservazione nella seconda posizione a rovesciamento eseguito. Nella Tabella II ho raccolto i risultati delle osservazioni stellari di tutte le serate e i Δt medi conclusi per ognuna di esse.

3. I pianeti *Saturno* ed *Urano* sono stati osservati subito dopo le rispettive opposizioni, adoperando gli stessi procedimenti impiegati per le osservazioni delle stelle di confronto. Di *Saturno* ho osservato sempre il 1° lembo, portando il filo mobile del micrometro impersonale tangente al bordo, internamente al sistema degli anelli. Di esso ho determinato anche, in quasi tutte le serate, il *diametro orizzontale*, sempre mediante il micrometro impersonale, e col metodo descritto in una Nota precedente⁽¹⁾. Con questi valori del diametro ho ottenuto l'*ascensione retta* del centro del Pianeta riportata nell'ultima colonna della Tabella III. I confronti sono stati fatti con l'Effemeride del *Nautical Almanac*.

Le osservazioni di *Urano* sono state molto ostacolate dal persistente cattivo tempo degli ultimi mesi del 1935, che mi ha costretto ad utilizzare soltanto un numero molto esiguo di osservazioni. Queste sono state sempre fatte a campo lucido e fili oscuri coll'ingrandimento massimo di 120. Le ascensioni sono naturalmente dell'intero disco, che nel campo appare puntiforme.

La *Luna* è stata osservata occasionalmente, durante il corso dell'annata. Le ascensioni rette sono del 1° lembo e i confronti sono stati ottenuti con l'effemeride del *Nautical Almanac*. La seguente Tabella III dà conto dei risultati di tutte queste osservazioni.

(1) L. GIALANELLA, *Osservazioni meridiane di Giove e Vesta nel 1935*. Questi « Rendiconti », vol. XXIII, fasc. 10, p. 762 (1936).

TABELLA III.

Pianeta e Data	Oculare	$t_{oss.}$	$i \cos \gamma$ sec δ	$a \sin \gamma$ sec δ	$\Delta \gamma$	$\alpha_{1.0}$ lembo	O-C	Diametro osservato	O-C	α centro
1935										
Saturno										
Settembre 30	WE	^{22h} 30 ^m 27 ^s .33	— 0 ^s 08	+ 1 ^s 04	— 86 ^s .98	^{22h} 29 ^m 01 ^s .31	— 0 ^s 02	1 ^s 34	+ 0 ^s 06	^{22h} 29 ^m 01 ^s .98
Ottobre 3	EW	29 45.02	— 0.07	+ 0.84	— 83.16	28 22.63	— 0.04	—	—	—
Ottobre 10	EW	28 16.92	— 0.03	+ 0.93	— 75.56	27 02.26	— 0.06	—	—	—
Ottobre 11	WE	28 05.28	— 0.01	+ 1.09	— 74.38	26 51.98	— 0.06	1.40	+ 0.14	26 52.68
Ottobre 13	WE	27 42.44	— 0.06	+ 1.05	— 71.11	26 32.32	— 0.10	1.31	+ 0.05	26 32.97
Ottobre 14	WE	27 31.81	+ 0.01	+ 1.10	— 69.87	26 23.05	— 0.05	1.33	+ 0.07	26 23.72
Ottobre 16	EW	27 12.02	— 0.04	+ 1.05	— 67.59	26 05.44	+ 0.01	1.35	+ 0.09	26 06.11
Ottobre 17	EW	27 02.38	— 0.03	+ 1.02	— 66.40	25 56.97	— 0.13	1.38	+ 0.12	25 57.66
Ottobre 30	WE	25 23.24	— 0.03	+ 1.09	— 42.86	24 41.44	— 0.04	1.36	+ 0.14	24 42.12
Urano										
Novembre 29	EW	^{2h} 01 ^m 47 ^s .46	0.00	+ 0.75	— 47.47	^{2h} 01 ^m 00 ^s .74	+ 0 ^s .11	—	—	^{2h} 01 ^m 00 ^s .74
Dicembre 6	EW	00 54.40	+ 0.07	+ 0.86	— 42.35	00 12.98	+ 0.17	—	—	00 12.98
Dicembre 15	WE	^{1h} 59 56.43	— 0.02	+ 0.67	— 34.99	^{1h} 59 22.09	+ 0.12	—	—	^{1h} 59 ^m 22 ^s .09
Luna										
Maggio 14	WE	12 ^h 31 ^m 57 ^s .16	— 0.03	+ 3.11	— 44.58	12 ^h 31 ^m 15 ^s .66	+ 0 ^s .27	—	—	—
Giugno 14	EW	15 39 18 ^s .36	+ 0.02	+ 1.69	— 106.36	15 37 33.71	+ 0.26	—	—	—
Dicembre 6	EW	1 45 59.90	+ 0.08	+ 0.63	— 42.35	1 45 18.26	+ 0.27	—	—	—

Geofisica (Sismologia). — *Confronto delle profondità ipocentrali di due recenti terremoti consimili*. Nota di G. AGAMENNONE, presentata⁽¹⁾ dal Socio F. MILLOSEVICH.

Si tratta di due forti scosse: l'una in Italia (Carnia) avvenuta a 3^h 17^m (Gr.) dell'8 giugno 1934, l'altra in Germania (Lago di Costanza) a 13^h 40^m del 31 gennaio 1935; entrambe studiate da due valenti cultori di sismologia⁽²⁾. Io mi limito a riportare i risultati da essi ottenuti per la profondità del focolare sismico, ed alcune considerazioni oggettive, a supplemento di altri miei lavori precedenti sulla stessa indagine, nei quali ho richiamato l'attenzione sulla grande incertezza che ancora incombe nella risoluzione dell'arduo quanto importantissimo problema⁽³⁾.

Terremoto dell'8 giugno 1934. — L'epicentro è vicinissimo a Cimolais (Udine) e precisamente a 46°18' lat. N e 12°28' long. E, quale risultò al Caloi da accurati calcoli sulle ore di varie stazioni. Stando alle notizie favoritemi dal R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geofisica, a Claut (Udine), a un 5 km. di distanza, la scossa produsse risveglio generale, movimento di mobili, caduta di calcinacci, tegole e comignoli, e lievi fessure nei muri; per cui la sua intensità deve ascriversi al grado VI (M.). Fu stimata del grado V-VI a Lozzo di Cadore (a 20 km. N dall'Ep.), V a Maniago (25 SE), Belluno (25 SW), Auronzo (30 N) e forse anche a Spilimbergo e Pordenone (40). Disgraziatamente sono pochi e anche insufficienti i dati per il tracciamento delle isosiste, sicchè riesce difficile precisare la decrescenza dell'intensità con la distanza, tanto più che manca ogni notizia su località oltre il confine austriaco. Tuttavia sembra che la propagazione sia stata minore verso WNW, NW e NNW, a giudicare dalla mancanza assoluta di relazioni al di là di Dobbiaco (50), Brunico (70) e Bolzano (85) in cui la scossa fu stimata del grado IV al pari di Fonzaso (60), Udine (65), Latisana (70) e Treviso (72). Come in quasi tutti i terremoti, non si è osser-

(1) Nella seduta del 5 giugno 1936.

(2) P. CALOI, *Studio microsismico del terremoto delle Prealpi Carniche dell'8 giugno 1934*. (« Boll. Com. per la Geod. e la Geof. Consiglio N. Ricerche », ser. 2^a, V, ottobre 1935, pp. 209-34); W. HILLER, *Die Erdbeben am Untersee (Bodensee) vom 31. Januar 1935*. (« Jahresberichte und Mitt. des Oberreinischen geolog. Vereins », XXV, 1936, pp. 81-92).

(3) G. AGAMENNONE, *Considerazioni sopra l'ipocentro dei terremoti Laziali*. (« Rend. R. Acc. N. Lincei », ser. 6^a, XXVII, p. 725, febbraio 1933); Id., *L'origine dei terremoti nei Colli Laziali* (« Atti del III Congresso Naz. di Studi Romani ». Bologna, 1934); Id., *Esame di alcune profondità ipocentrali calcolate con la formula dell'Inglada*. (« Boll. Soc. Sism. It. », XXXII, 1934, pp. 115-33); Id., *Ulteriore esame della formula dell'Inglada per il calcolo della profondità dei focolari sismici*. (« Ivi », XXXIII, 1935, pp. 63-75).

vata una decrescenza regolare nell'intensità. Così, ad es., essa si ridusse già al III grado a Vittorio Veneto (40), S. Vito al Tagliamento (50) e Codroipo (55), forse in dipendenza della natura geologica locale. Oltre i 70 km. lo scotimento dovette, in genere, riuscire più o meno lieve, giusta l'annuncio che ne dettero i giornali di Bolzano, Brescia, Padova e Treviso da me compulsati, e anche più dal fatto che nelle numerosissime corrispondenze, pervenute ai medesimi dalle rispettive province (in data 8, 9 e 10 giugno), non si accenna che *rarissimamente* alla scossa in questione. A Venezia (95) e Padova (110) l'intensità non sorpassò certamente il grado II-III, ma fu segnalato un rinforzo (grado IV) a maggiori distanze e, cioè, a Trieste (123), Riva e Monselice (130)⁽¹⁾. Comunque, l'insieme delle osservazioni riportate dà l'impressione che la forza della scossa andò rapidamente declinando a partire dal VI grado.

Il C. ha determinato la profondità dell'*ipocentro* con tre metodi diversi. Il 1°, quello dell'Inglada, basato sull'arrivo delle onde P a Treviso (72), Venezia (96), Padova (110) e Trieste (123). Le ore sono state da lui rilevate sui sismogrammi originali servendosi di un cannocchiale che consente la valutazione di 0,01 sec.; sicchè, a suo giudizio, l'errore negli inizi delle varie fasi non dovrebbe, in genere, superare i $\pm 0,4$ sec. Con i dati orari, accoppiati in tutti i modi possibili, egli ha ottenuto una profondità di 44 km. *senza errore medio apprezzabile*. Questo splendido risultato non può mancare dal sorprendere, conoscendosi il fallimento del metodo « Inglada » riscontrato in tanti altri terremoti⁽²⁾. Anche ammessa una grande precisione delle ore, i risultati sono sempre incerti per la natura stessa del problema, essenzialmente pel fatto che nella realtà non si verificano le condizioni poste a base della formula geometrica adoperata. Ben peggio poi quando non si può neppure contare sulla bontà delle ore, come nel caso degli osservatori di

(1) Questo rinforzo, se non apparente, cioè, dovuto a falsa stima del grado, può spiegarsi con le speciali condizioni geografiche e geologiche. Per Trieste il grado IV è forse troppo alto, avendo riguardo al gran numero degli abitanti ed alla maggiore altezza dei fabbricati in confronto di altre città secondarie. Ad ogni modo è singolare il fatto che mentre « Il Popolo di Trieste » dell'8 giugno dà la notizia di una lieve perturbazione sismica del giorno 7 a Sofia, e « Il Piccolo di Trieste » del 10 riporta una forte scossa nel pomeriggio dell'8 nell'Austria Superiore e nel Tirolo, detti giornali dell'8, 9 e 10 giugno tacciono completamente sulla scossa in Trieste! Il grado IV a Riva (130), in disaccordo col III a Trento (100), potrebbe essere giustificato dal III a Salò (160 km.), e forse spiegabile con una scossa locale nella regione così instabile del Garda, provocata dalle onde sismiche provenienti dalla Carnia. Infine, l'intensità IV stimata a Monselice (130) è contraddetta dal grado II-III di Padova (110) nella stessa direzione dell'epicentro.

(2) Ciò è stato ribadito in queste due recentissime pubblicazioni: G. ANDREOTTI, *Sismicità del Garda. Studio del terremoto 19 febbraio 1932*. (« Atti R. Istituto Ven. Sc., Lett., Arti », XCV, parte 2°, pp. 141-60. Venezia, 1936); J. COMAS SOLÀ, *Sobre el calculo de la profundidad hipocentral de los terremotos*. (« Urania », XXVI, aprile 1936, pp. 49-53. Barcellona).

Treviso, Padova e Venezia, dove è difficile garantire il secondo, stando alle dichiarazioni degli stessi direttori. Ad ogni modo sarebbe stata desiderabile una discussione particolareggiata sulle varie ore e sulle varie fasi, per spiegare le sensibili differenze tra le ore utilizzate nei calcoli e quelle comunicate al R. Ufficio Centrale di Met. e Geof. Così, l'ora (03.17.14,2) assegnata dal C. alle \bar{P} di Treviso è troppo diversa da quella (03.17.18) rilevata in quell'osservatorio. Similmente per la stazione di Venezia è riportata 03.17.18, invece di 03.17.22. Nel caso nostro, infine, a complicare le cose, il focolare sismico sarebbe lungo ben 5 km., come il C. dichiara di aver trovato con i suoi calcoli, invece d'un ipocentro puntiforme.

Il 2° metodo è fondato sulla misura dell'angolo di emergenza delle onde \bar{P} , eseguita dal C. in otto stazioni distanti fino a 427 km. Anche qui il risultato non potrebbe essere più soddisfacente, poichè le otto profondità calcolate variano soltanto da 36 a 39 km.; ma, senza un esame dei sismogrammi, riesce impossibile farsi un'idea della fiducia da accordare a tale risultato. Comunque, osservo che questo metodo, già adoperato da tanti anni dall'Omori e da altri sismologi giapponesi, ha sempre condotto a rilevanti profondità, anche quando si trattava di modestissimi sismi.

Il 3° metodo, del Gutenberg, basato sugli intervalli $\bar{P}-P_n$ riscontrati nelle varie stazioni, ha condotto a profondità ancora minori, cioè, di 30-35 km.; ma il C. osserva che, in genere, questo metodo conduce a risultati piuttosto approssimativi e minori del vero, a causa di valori alquanto diversi adottati per la velocità di dette onde, e conclude perciò che questo terzo metodo conferma la profondità media di 37 km., trovata col secondo.

Terremoto del 31 gennaio 1935. — L'epicentro cade a 2 km. W dall'isola di Reichnau, a 47° 22', 1 lat. N e 9° 1' long. E, posizione risultata dal calcolo sopra le ore esattissime di 6 stazioni a distanze da 46 a 174 km. Nella zona epicentrale l'intensità raggiunse il grado VI della scala « Mercalli-S. » e forse lo sorpassò, a giudizio di Hiller, per la caduta di vari oggetti dalle pareti e fenditure in parecchie stanze d'un castello. Alla distanza di 15-20 km. dall'Ep: l'intensità si mantenne del grado V-VI. Per le scarse notizie non si poterono tracciare con sicurezza le isosiste; ma il grado V fu notato maggiormente verso W fino a circa 40 km.; il IV fino a 100 km. e il III fino a 120 km. (Stoccarda). A causa di sì rapida decrescenza nella ristretta zona megasismica, l'H. propende per un ipocentro poco profondo, perchè altrimenti l'estensione della scossa non si sarebbe limitata a 110-120 km. e dice che, data la costituzione delle Prealpi nordiche, la probabile profondità del foco deve aver raggiunto soltanto 15-25 km. Ma sebbene la posizione dell'Ep. fosse esattissima e in buon accordo con i dati macrosismici, e inoltre fossero ineccepibili i dati orari delle varie fasi, anche questa volta egli non ha voluto procedere alla determinazione della profondità ipocentrale col metodo « Inglada », ma ha preferito quello del Gutenberg fondato sull'intervallo ben distinto $Q-\bar{P}$, cioè, sul ritardo delle onde distor-

zionali superficiali Q (*Scherungsoberflächenwelle*) sulle onde dirette $\bar{P}^{(1)}$; ritardo che fu di 5,4 sec. a Ravensburg e di 6,4 sec. a Zurigo. Col 1° dato la profondità risultò di 21–22 km., col 2°, di circa 16 km., valori dunque ben inferiori a quello di 34–40 km. che egli trovò con lo stesso metodo per un ben più modesto terremoto avvenuto nel Württemberg l'11 dicembre 1931, ciò che veramente depone poco bene a favore del procedimento adottato.

Data l'esattissima posizione dell'Ep. e la precisione delle ore fino a 0,1 sec., ho voluto procedere al calcolo della profondità col metodo « Inglada » per vedere se fosse stato possibile, questa volta, pervenire a un risultato concreto. A tal fine ho scelto le sole 7 stazioni in cui l'arrivo delle \bar{P} fu ben distinto (\bar{P}); e allo scopo di accrescere viepiù la precisione degli intervalli di tempo introdotti nei calcoli, mi sono servito della media delle ore relative alle stazioni quasi equidistanti dall'Ep., come si vede qui appresso:

I	49,5	{	46 km. Ravensburg	13. 39. 39,0	{	39,55
			53 » Messtetten	13. 39. 40,1		
II	114	{	109 » Basilea	13. 39. 50,2	{	50,95
			119 » Stoccarda	13. 39. 51,7		
III	174	Neuchâtel		61,90
IV	419	{	405 » Jena	13. 39. 102,2	{	104,90
			433 » Gottinga	13. 39. 107,6		

Per avere anche un'idea dell'influenza attribuita alla velocità v delle \bar{P} , ho adottato diversi valori. Ecco il risultato dei calcoli:

Profondità ipocentrale in chilometri.

Combinazioni	I-II	I-III	I-IV	II-III	II-IV	III-IV
$v = 5,2$ km.	32,7	36,7	68,9	46,9	96,7	123,0
$v = 5,3$ »	28,4	30,7	58,6	37,0	83,5	108,0
$v = 5,4$ »	23,7	23,8	47,8	24,3	69,2	91,8
$v = 5,5$ »	18,2	15,0	35,8	negativa	52,7	73,6
$v = 5,6$ »	10,9	negativa	20,4	negativa	30,4	50,8

(1) Tanto questo metodo quanto l'altro del C., basato sull'intervallo $\bar{P}-P_n$, presentano indubbiamente il vantaggio di prescindere dal valore assoluto delle ore; ma d'altra parte prestano il fianco a qualche dubbio circa la sicura identificazione di dette onde, come giustamente osserva H. A proposito di ciò, è singolare il fatto che tra le varie specie di onde rilevate da C., non figurino le Q , identificate distintamente, invece, da H. Trattandosi d'intervalli di pochi secondi, non è chi non veda come un equivoco nella corrispondenza esatta delle $P_n, P_m, P^*, \bar{P}, Q$ ecc., nelle varie stazioni possa far cambiare notevolmente i risultati; corrispondenza resa maggiormente difficile per la diversità dei sismografi adoperati, e quindi anche della loro sensibilità.

Sebbene il metodo « Inglada » comporti una maggiore esattezza per le combinazioni di punti poco distanti dall'Ep., pure si riscontra gran disaccordo anche nelle combinazioni I-II, I-III, II-III, e perfino coll'adozione delle velocità più alte (5,5 e 5,6), preferite da C. e H.: e ciò dimostra, una volta di più, il poco peso da accordarsi a simili risultati.

Come s'è visto, la profondità del foco è risultata ben diversa per due sisnii paragonabili tra loro per intensità ed estensione. In quello italiano sarebbe risultata di 30-44 km. e in quello tedesco di 16-22, cioè, quasi la metà dell'altra. In presenza di sì gran divario, e nonostante la concordanza dei risultati ottenuti da C. con tre metodi diversi, si resta perplessi nell'accettare come verosimile la profondità di 37 km.; e la perplessità si accresce anche per il forte disaccordo nei valori trovati per lo spessore del 1° strato (granito) — ritenuto costante per l'Europa centrale — nel quale si propagano le \bar{P} , mentre alle P_n è riservato il percorso nel sottostante strato (basalto). L'ipocentro è supposto al limite dei due strati, posto dal C. alla profondità di 44 km., ed a 20 da H. il quale ultimo pensa pure che il foco potrebbe risiedere entro lo stesso 1° strato, cioè, anche a meno di 20 km. Se mi si domandasse a quale dei due valori io sarei disposto ad accordare maggior fiducia, non esiterei a preferire il 2°, e ciò per la mia concezione sulla genesi dei terremoti e la mia opinione, già altre volte espressa, che cioè — salvo le debite eccezioni — i focalari sismici, dovuti presumibilmente ad accidenti geologici, sono relativamente poco profondi. Questa opinione è condivisa anche dai geologi, tanto che per l'altro sismo della Carnia del 27 marzo 1928, con intensità del IX grado ed estensione fino a ben 360 km., il geologo Gortani trovò col metodo « Dutton » la profondità di soli 8-10 km.⁽¹⁾; e pel famoso terremoto di Avezzano (13 gennaio 1915) il geologo Lotti propendette pure per una modesta profondità e, cioè, un ulteriore sprofondamento del distretto Fucense. Per analogia, la mia opinione è rafforzata dal fatto che forti vibrazioni, impresse comunque al suolo, si propagano a distanze notevoli. Ricordo che una sfera di acciaio di 2000 kg., fatta cadere da un'altezza di soli 15 m., produsse vibrazioni registrate fino a 2 km. di distanza; che l'accensione di 45.000 kg. di esplosivo entro una cava di pietre (16 agosto 1934) perturbò i sismografi fino a quasi 100 km.⁽²⁾; che la tremenda esplosione di Oppau (21 settembre 1921) fu registrata fino a 364 km.; e che la caduta della meteorite in Siberia (30 giugno 1908), stimata del peso di 160.000 kg., vuolsi abbia perturbato vari sismografi distanti migliaia di chilometri!⁽³⁾.

(1) M. GORTANI, *Il terremoto del 27 marzo 1928 nelle Prealpi dell'Arzino (Friuli)*. (« L'Universo », IX, dic. 1928); A. CAVASINO, *Il terremoto nelle Prealpi Carniche orientali del 27 marzo 1928*. (« Boll. Soc. Sism. Ital. », XXVIII, 1928-29, p. 77).

(2) PERRY BYERLY and J. T. WILSON, *The Richmond Quarry Blast of August 16, 1934*. (« Bull. Seism. Soc. of America », XXV, Juli 1935, pp. 259-268).

(3) F. J. W. WHIPPLE, *The great Siberian Meteor and the Waves, seismic and aerial, which it produced*. (« Quart. Journal R. Met. Soc. », LVI, Juli, 1930, pp. 287-304).

Aggiungo essere stata attribuita una modestissima profondità — forse non più di 10 km. — alla scossa di Niles (California), del grado VIII, studiata recentemente da due ben noti sismologi, stimata del grado V a 50-90 km. di distanza e del III fino a 200 ⁽¹⁾.

Il confronto delle profondità ipocentrali, relative a terremoti uguali o diversi per intensità ed estensione, può costituire, a mio parere, un mezzo indiretto per saggiare la più o meno consistenza dei risultati ottenuti con i vari metodi, ispirati tutti a concezioni teoriche le quali non sempre si accordano con la reale costituzione degli strati terrestri attraversati dalle onde sismiche.

Pongo fine a questa Nota col ripetere la chiusa d'altro mio lavoro precedente sullo stesso argomento: « Gli insuccessi fin qui riscontrati non debbono scoraggiare, anzi sono da ritenersi degne d'encomio tutte le vie finora tentate; ma non è mai abbastanza da raccomandare una grande circospezione ed una maggiore riserva circa la fiducia da accordare ai risultati dei calcoli, in modo da non esagerarne l'esattezza, la quale potrebbe essere soltanto apparente, e quindi indurre in errore altri studiosi che credessero di potersi basare su dati sicuri, per ulteriori indagini ».

*
* *

La notizia di una scossa in Austria presso il confine italiano la quale, secondo « Il Piccolo di Trieste », sarebbe avvenuta nel pomeriggio dello stesso 8 giugno, mi fece nascere il sospetto d'un equivoco nell'ora, e m'indusse a chiedere informazioni al « Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik » di Vienna. Nella risposta, pervenuta proprio al momento di licenziare le bozze della presente Nota, si comunica che quella scossa fu sentita in numerose località dell'Austria meridionale proprio alla stessa ora di quello della Carnia; e si aggiunge che l'epicentro fu ritenuto nei pressi di *Kötschach-Mauthen*, e ciò tanto in base alle notizie macrosismiche quanto alle distanze epicentrali, dedotte dai sismogrammi di Vienna e di Trieste; ma non sarebbe impossibile che l'epicentro si trovasse alquanto più al Sud.

Le notizie provenienti dall'Austria potranno dunque darci un'idea più concreta sull'estensione della scossa verso il Nord, e forse anche permettere il tracciamento — sia pure approssimativo — delle *isosiste*, allo scopo di identificare meglio la zona *megasismica* e vedere fino a qual punto essa si trovi in accordo con la posizione dell'epicentro, la quale fu calcolata in base alle ore \bar{P} , registrate negli osservatori di Treviso, Venezia, Padova e Trieste.

(1) PERRY BYERLY and J. T. WILSON, *The central California Earthquakes of May 16, 1933* ecc. (« Bull. Seism. of America », XXV, 1935, pp. 223-246).

Fisica (Matematica). — *Sulla temperatura assoluta T , e sulle principali relazioni termodinamiche.* Nota di F. Odone, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Nota in corso di stampa sul « Nuovo Cimento » ho ottenuto le principali relazioni termodinamiche, seguendo un procedimento completamente nuovo rispetto a quelli conosciuti e ponendomi in condizioni più generali di quelle ordinariamente supposte.

Mi son accorto che conviene definire l'energia libera in modo lievemente diverso da quello adottato nella Nota citata: è precisamente tale modificazione che mi propongo qui di esporre. Inoltre in questa nuova Nota introduco la temperatura assoluta in modo un po' diverso da quello seguito nel lavoro del « Nuovo Cimento », lavoro che nel seguito indicherò brevemente con (N. C.) e a cui rimando per la dimostrazione di quei risultati che qui sono appena richiamati.

I. — CONDIZIONI SOTTO CUI ESISTE UNA FUNZIONE T DELLA SOLA TEMPERATURA TALE CHE $\frac{1}{T}$ È UN FATTORE INTEGRANTE DI $d^x Q$, ESSENDO $d^x Q$ L'ESPRESSIONE DIFFERENZIALE DI UNA QUANTITÀ INFINITESIMA DI CALORE.

Sia ϑ la temperatura letta su un termometro qualunque e $T = F(\vartheta)$ una funzione della sola ϑ . Sia $d^x Q$ l'espressione differenziale della quantità di calore scambiata da un sistema qualunque con l'ambiente esterno, durante una trasformazione infinitesima; il simbolo d^x indica che $d^x Q$ non è necessariamente un differenziale esatto. È facile controllare (N. C.) la proprietà seguente: affinché $\frac{1}{T}$ sia un fattore integrante di $d^x Q$, è necessario e sufficiente che $d^x Q$ possa ridursi alla forma

$$(1) \quad d^x Q = dW + H d\vartheta,$$

essendo dW un differenziale totale, e che inoltre le funzioni H, W siano tali che

$$(2) \quad H + W \frac{T'}{T} = \mu(\vartheta),$$

essendo $T' = \frac{dT}{d\vartheta}$ e $\mu(\vartheta)$ una funzione della sola ϑ .

(1) Nella seduta del 5 giugno 1936.

In queste condizioni, posto

$$(3) \quad \lambda(\vartheta) = T \left[C + \int \frac{\mu}{T} d\vartheta \right],$$

con C costante arbitraria, si ha

$$(4) \quad d^x Q = T d \left(\frac{W + \lambda}{T} \right).$$

2. — DETERMINAZIONE DELLA TEMPERATURA ASSOLUTA MEDIANTE IL GAS PERFETTO.

*Imponiamo la condizione che la funzione $T = F(\vartheta)$, tale che $\frac{d^x Q}{T}$ è un differenziale esatto, sia una FUNZIONE UNIVERSALE, cioè sempre la stessa qualunque siano le funzioni H, W . È allora facile vedere che la funzione universale $T = F(\vartheta)$, a cui si dà il nome di *temperatura assoluta termodinamica*, deve coincidere con la temperatura assoluta calcolata mediante il gas perfetto.*

Infatti: consideriamo una massa determinata di un gas perfetto. Questa massa sottoposta alla pressione p e portata alla temperatura ϑ occupa un certo volume v ; il prodotto pv dipende dalla sola temperatura e quindi si può scrivere

$$(\alpha) \quad pv = p_0 v_0 \frac{f(\vartheta)}{f(\vartheta_0)};$$

inoltre l'energia interna U è pure essa funzione della sola temperatura e quindi si ha

$$(\beta) \quad U = U(\vartheta).$$

Consideriamo una trasformazione consistente in uno spostamento infinitesimo di equilibrio, in modo che sia

$$d^x Q = \frac{dU}{d\vartheta} d\vartheta + p dv = \frac{dU}{d\vartheta} d\vartheta + \frac{p_0 v_0}{f(\vartheta_0)} f(\vartheta) \frac{dv}{v},$$

e quindi

$$\frac{d^x Q}{f(\vartheta)} = \frac{dU}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{f(\vartheta)} + \frac{p_0 v_0}{f(\vartheta_0)} \frac{dv}{v}.$$

Nel 2° membro le variabili sono separate e perciò, a meno di un fattore costante arbitrario, risulta

$$(5) \quad T = f(\vartheta) = f(\vartheta_0) \cdot \frac{pv}{p_0 v_0}.$$

3. — PRINCIPALI RELAZIONI TERMODINAMICHE.

Prendiamo la 1^a equazione della termodinamica sotto la forma

$$(6) \quad d^x Q = dU + dE_c + d^x L,$$

essendo dU il differenziale totale dell'energia interna, dE_c il differenziale totale dell'energia cinetica, $d^x L$ l'espressione differenziale del lavoro infinitesimo contro le forze esterne.

Affinchè $d^x Q$ possa ridursi alla forma (1) è necessario e sufficiente (N. C.) che $d^x L$, cioè l'espressione differenziale del lavoro infinitesimo relativo ad una trasformazione isoterma, sia un differenziale totale, e quindi il $d^x L$ deve avere (N. C.) una delle forme seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} d^x L = dV_1 + M d\vartheta, \\ d^x L = d_\vartheta V_2 + N d\vartheta, \\ d^x L = d_\vartheta V_3. \end{array} \right.$$

In queste formule l'indice ϑ indica che nel calcolo del differenziale si suppone $\vartheta = \text{costante}$ e quindi $d\vartheta = 0$.

Scriviamo ora le principali relazioni termodinamiche, distinguendo tre casi corrispondenti alle tre espressioni possibili del $d^x L$.

1° caso. — $d^x L = dV_1 + M d\vartheta$.

Da $d^x Q = dU + dE_c + d^x L = dW + Hd\vartheta$ si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} W = U + E_c + V_1, \\ H = M, \end{array} \right.$$

e quindi (N. C.), per le (2) e (3),

$$(\gamma_1) \quad M + (U + E_c + V_1) \frac{T'}{T} = \mu_1(\vartheta) = \lambda_1 - \frac{T'}{T} \lambda_1,$$

$$\text{con } \lambda_1 = T \left[C + \int \frac{\mu_1}{T} d\vartheta \right].$$

$U + E_c, V_1$ sono funzioni determinate ciascuna a meno di una costante arbitraria; affinchè λ_1 abbia un valore indipendente da queste costanti arbitrarie basta procedere nel modo seguente: se invece di $U + E_c$ si prende $U + E_c + \alpha$, si prenderà $V_1 - \alpha$ invece di V_1 .

Da $d^x Q = T d \left(\frac{W + \lambda}{T} \right) = T dS$, si ottiene

$$(\delta_1) \quad S = \frac{W + \lambda}{T} = \frac{U + E_c + V_1 + \lambda_1}{T};$$

S è l'entropia del sistema.

Poniamo

$$V_x + \lambda_x = -F_x$$

e chiamiamo la funzione F_x *potenziale termodinamico interno* del sistema ⁽¹⁾.

Ne viene

$$(\epsilon_x) \quad F_x = U + E_c - TS$$

e quindi, quando sia $E_c = 0$, F_x coincide con l'espressione solita del potenziale termodinamico interno, cioè con $U - TS$. Nella Nota del « Nuovo Cimento » avevo invece posto $V_x + \lambda_x + E_c = -F'_x$ e quindi risultava $F'_x = U - TS$; ma in rapporto alle formule che ora seguono, mi pare assai più conveniente la nuova definizione.

Da (γ_x) e (δ_x) si ha ancora

$$(\zeta_x) \quad S = -\frac{1}{T'} \left(M - \frac{d\lambda_x}{d\vartheta} \right) = -\frac{1}{T'} \left(M + \frac{\partial F_x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial V_x}{\partial \vartheta} \right),$$

e quindi per (ϵ_x)

$$U + E_c = F_x - \frac{T}{T'} \left(M + \frac{\partial F_x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial V_x}{\partial \vartheta} \right).$$

Da (ϵ_x) si ha pure:

$$dF_x = dU + dE_c - T dS - S dT;$$

di qui e da (ζ_x) si ricava

$$d^x L = T dS - dU - dE_c = -dF_x - T' S d\vartheta = -d_\vartheta F_x + \left(M + \frac{\partial V_x}{\partial \vartheta} \right) d\vartheta,$$

da cui, come caso particolare, si ha

$$d_\vartheta^x L = -d_\vartheta F_x.$$

L'entropia S , l'energia totale $U + E_c$, l'espressione differenziale $d^x L$ del lavoro infinitesimo contro le forze esterne sono così calcolate in funzione di F_x , potenziale termodinamico interno, di M , delle derivate parziali di F_x e della derivata parziale di V_x rispetto a ϑ .

$$2^\circ \text{ caso. } - d^x L = d_\vartheta V_x + N d\vartheta = dV_x + \left(N - \frac{\partial V_x}{\partial \vartheta} \right) d\vartheta.$$

(1) Poichè V_x è determinato a meno di una costante e λ_x a meno del termine CT , con C costante arbitraria, ne segue che F_x , cioè il *potenziale termodinamico interno*, è determinato a meno di una funzione di 1° grado della temperatura assoluta. Questa osservazione vale in generale, ossia anche per i due casi successivi, secondo e terzo, come facilmente si controlla.

Come prima si ha

$$\begin{cases} W = U + E_c + V_2, \\ H = N - \frac{\partial V_2}{\partial \vartheta} \end{cases}$$

ed inoltre

$$(\gamma_2) \quad N - \frac{\partial V_2}{\partial \vartheta} + (U + E_c + V_2) \frac{T'}{T} = \mu_2(\vartheta) = \frac{d\lambda_2}{d\vartheta} - \frac{T'}{T} \lambda_2,$$

$$\text{con } \lambda_2 = T \left[C + \int \frac{\mu_2}{T} d\vartheta \right].$$

$U + E_c$ è funzione determinata a meno di una costante arbitraria; V_2 è determinata a meno di una funzione arbitraria $\Phi(\vartheta)$ della sola ϑ ; affinchè λ_2 sia indipendente da questi elementi arbitrari, basterà scegliere $\Phi(\vartheta)$ in questo modo (N. C.); se invece di $U + E_c$ si pone $U + E_c + \alpha$, invece di V_2 basterà porre $V_2 + AT - \alpha$, cioè prendere $\Phi(\vartheta) = AT - \alpha$, essendo A una costante arbitraria.

Da $d^x Q = T d \left(\frac{W + \lambda}{T} \right) = T dS$, si ottiene per l'entropia S :

$$(\delta_2) \quad S = \frac{U + E_c + V_2 + \lambda_2}{T}.$$

Definiamo il potenziale termodinamico interno F_2 ponendo

$$V_2 + \lambda_2 = -F_2.$$

Ne viene:

$$(\varepsilon_2) \quad F_2 = U + E_c - TS,$$

e si ottiene, procedendo come al 1° caso,

$$S = - \frac{1}{T'} \left(N - \frac{\partial V_2}{\partial \vartheta} - \frac{d\lambda_2}{d\vartheta} \right) = - \frac{1}{T'} \left(N + \frac{\partial F_2}{\partial \vartheta} \right),$$

$$U + E_c = F_2 - \frac{T}{T'} \left(N + \frac{\partial F_2}{\partial \vartheta} \right),$$

$$d^x L = -dF_2 - T' S d\vartheta = -d_\vartheta F_2 + N d\vartheta,$$

$$d_\vartheta^x L = -d_\vartheta F_2.$$

L'entropia S , l'energia totale $U + E_c$, l'espressione differenziale $d^x L$ del lavoro infinitesimo contro le forze esterne sono così calcolate in funzione di F_2 , potenziale termodinamico interno, di N e delle derivate parziali di F_2 .

3° caso. — $d^x L = d_\vartheta V_3$.

Per questo caso basta ripetere quanto si è detto per il 2°, supponendo $V_2 = V_3$ ed inoltre $N = 0$.

Posto

$$V_3 + \lambda_3 = -F_3,$$

con $\lambda_3 = T \left[C + \int \frac{\mu_3}{T} d\vartheta \right]$, essendo $\mu_3(\vartheta) = -\frac{\partial V_3}{\partial \vartheta} + (U + E_c + V_3) \frac{T'}{T}$, risulta

$$S = \frac{U + E_c + V_3 + \lambda_3}{T},$$

$$F_3 = U + E_c - TS,$$

ed infine

$$S = -\frac{1}{T'} \frac{\partial F_3}{\partial \vartheta},$$

$$U + E_c = F_3 - \frac{T}{T'} \frac{\partial F_3}{\partial \vartheta},$$

$$d^x L = -d_\vartheta F_3.$$

Si vede così che in questo 3° caso, il solo comunemente considerato, l'entropia S , l'energia totale $U + E_c$, il lavoro elementare $d^x L$ sono espressi in funzione unicamente di F_3 , potenziale termodinamico interno, e delle sue derivate ⁽¹⁾.

Applichiamo queste formule al gas perfetto, supponendo di fare $\vartheta = T$ e quindi $T' = \frac{dT}{dT} = 1$. Ammettiamo l'ipotesi semplificativa che la capacità termica γ del gas a volume costante sia costante: sarà allora $U = \gamma T + \alpha$, con α costante arbitraria. Da $d^x L = p dv$ e $p = \frac{p_0 v_0}{T_0} \frac{T}{v}$ si ricava, ricordando che V_3 è determinato a meno della funzione $AT - \alpha$,

$$V_3 = \frac{p_0 v_0}{T_0} T \log v + AT - \alpha.$$

Risulta subito $\mu_3 = \gamma$ e quindi $\lambda_3 = T [C + \gamma \log T]$. Ne segue infine:

$$F_3 = -\frac{p_0 v_0}{T_0} T \log v - \gamma T \log T - (A + C) T + \alpha,$$

$$S = \frac{p_0 v_0}{T_0} \log v + \gamma (1 + \log T) + A + C;$$

in queste ultime formule $A + C$ rappresenta una costante arbitraria ⁽²⁾.

(1) Si veda, p. es., DUHEM, *Traité d'énergétique*. (Paris, Gauthier-Villars, 1911), to. I, capit. IX, in particolare pp. 367, 368, 369, 372, 373.

(2) Per le formule relative al gas perfetto, si veda, p. es., DUHEM, op. cit., to. I, pp. 392, 393, 394.

Fisica. — *Sull'aberrazione sferica del 5° ordine dei sistemi centrali.*
Nota di C. MOVAIS, presentata dal Corrisp. U. BORDONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sui cloruri di solfocianogeno*⁽¹⁾. Nota di A. BARONI, presentata⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

La preparazione dei derivati alogenati del radicale solfocianico presenta notevoli difficoltà. I primi che ne hanno tentata la preparazione sono stati H. P. Kaufmann e Liepe⁽³⁾ che, facendo agire il cloro sul radicale solfocianico libero, avrebbero ottenuto un cloruro (SCN)Cl ed un tricloruro (SCN)Cl₃, nel quale il radicale solfocianico si comporterebbe da trivalente.

Il monocloruro di solfocianogeno sarebbe un composto solido incolore, solubile in cloroformio, acido acetico e benzolo ed infusibile. Questo fatto ha indotto gli AA. a ritenere che si tratti di un polimero, probabilmente trimolecolare del tipo del cloruro di cianurile, cioè (SCN)₃Cl₃, però la determinazione del peso molecolare in cloroformio da essi eseguita col metodo ebullioscopico avrebbe dato un valore corrispondente alla formula monomolecolare. Nel suo comportamento rispetto all'acqua il monocloruro di solfocianogeno mostra, con una mediocre stabilità, un comportamento corrispondente a quello di SCl₂: come prodotti di decomposizione si formano S, HCN, HCl, HCNS ed H₂SO₄; in soluzione alcalina diluita l'idrolisi avviene in modo uguale mentre in soluzione alcalina concentrata non si osserva separazione di zolfo perchè si formano polisolfuri.

Questi risultati sono discussi e confutati in un successivo lavoro di H. Lecher e G. Joseph⁽⁴⁾ i quali basandosi sulle analogie che logicamente devono esistere fra NC·S·CN, NC·S·Cl, Cl·S·Cl, NCS·SCN, NCS·Cl₃, ritengono che il monocloruro di solfocianogeno dovrebbe essere una sostanza liquida o facilmente fusibile. Essi hanno ripetuto le esperienze di Kaufmann e Liepe in condizioni identiche a quelle date da questi AA. ed hanno trovato che essi devono essere incorsi in un errore nella determinazione del peso molecolare del composto da essi preparato. Infatti essi hanno trovato ebullioscopicamente in benzolo e cloroformio che al composto di

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale e Chimica fisica della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 5 giugno 1936.

(3) « Berichte », 57, 923 (1924).

(4) « Berichte », 59, 2603 (1926).

Kaufmann e Liepe corrisponderebbe una formula esamolecolare $(\text{CNSCl})_6$. Il vero monoclورو di solfocianogeno non sarebbe quindi stato preparato ancora da nessuno.

Io ho voluto ripigliare questi lavori per l'interesse che indubbiamente presenta questo campo di ricerche. I metodi sperimentali da me usati sono gli stessi di Kaufmann e Liepe, con la differenza che mentre questi AA. eseguono la reazione fra cloro e solfocianogeno a 0° , io ho effettuato questa reazione a bassa temperatura (-50 – -60°) raffreddando anche preventivamente il cloro gassoso. Questo accorgimento si è rivelato ottimo perchè nella preparazione del triclورو di solfocianogeno mi ha permesso di ottenere un rendimento del 95% mentre Kaufmann e Liepe avevano ottenuto un rendimento massimo del 23% e nella preparazione del monoclورو mi ha permesso di ottenere un prodotto solido, ma facilmente fusibile che è un polimero molto meno elevato di quello di Kaufmann e Liepe. Non sono riuscito invece, non ostante i miei numerosi tentativi, a preparare il monoclورو semplice, probabilmente perchè esso presenta, anche a bassa temperatura, una grande tendenza alla polimerizzazione.

PARTE SPERIMENTALE.

Monoclورو di solfocianogeno. — Il monoclورو di solfocianogeno è stato da me preparato partendo da una soluzione di solfocianogeno in cloroformio ottenuta per azione di bromo su $\text{Pb}(\text{CNS})_2$. In questa soluzione raffreddata a -60° ho fatto arrivare una corrente di cloro gassoso secco ottenuta per azione di acido cloridrico concentrato sulla quantità calcolata di permanganato di potassio in modo da evitare un eccesso di cloro che sposta la reazione nel senso della formazione del triclورو di solfocianogeno. Durante il passaggio del cloro nella soluzione si ha formazione di una sostanza solida gialla che è la dicloroimidoditioazolidina che si forma per azione sul solfocianogeno dell'acido cloridrico che si origina per parziale clorurazione del cloroformio. A sviluppo del cloro ultimato ho filtrato ed ho conservato la soluzione per dodici ore a -60° ottenendo la separazione di una sostanza solida bianca molto facilmente sublimabile e che fonde a circa 70° , quando venga riscaldata rapidamente. Ho filtrato questo prodotto e dopo essiccamento nel vuoto a bassa temperatura lo ho analizzato in micro Carius ottenendo i seguenti valori:

sostanza pesata	Ba SO_4 pesato	AgCl pesato	S% trovato	Cl% trovato
0,00423	0,01053	0,00646	34,19	37,78
0,00564	0,01497	0,00861	34,02	37,76

Le percentuali di cloro e di zolfo corrispondenti alla formula CNSCl risultano rispettivamente 37,91% e 34,29%.

Per determinare la grandezza molecolare e quindi stabilire il grado di polimerizzazione di questo composto ho applicato il metodo crioscopico usando bromoformio come solvente. Eseguendo la determinazione sul prodotto appena preparato ho avuto un peso molecolare 160,05 superiore quindi a quello del monoclورو che è 93,538. Usando la stessa soluzione ho eseguito altre determinazioni dopo 12 e 24 ore ottenendo rispettivamente i valori 270,45 e 380,21; non ho potuto seguire ulteriormente l'andamento perchè la soluzione separa un polimero insolubile di colore giallo rossastro. Il prodotto da me preparato operando a bassa temperatura si può quindi ritenere una miscela di monoclورو semplice con polimeri superiori, probabilmente col trimero.

Tricloruro di solfocianogeno. — Il tricloruro di solfocianogeno lo ho ottenuto facendo agire cloro in eccesso su una soluzione di solfocianogeno in bromuro di etile e cioè con lo stesso metodo già usato da Kaufmann e Liepe, però operando a bassa temperatura (-50°). Questo composto è un liquido che bolle a $57-58^{\circ}$ a 20 mm., di colore arancio, di odore sgradevole, a tensione di vapore molto elevata, dotato di una spiccata azione irritante e lagrimogena.

Per cercare di stabilire con mezzi chimico-fisici una probabile formula di costituzione di questo composto, ne ho determinato indice di rifrazione e densità ottenendo i valori:

$$n_D^{19} = 1,576$$

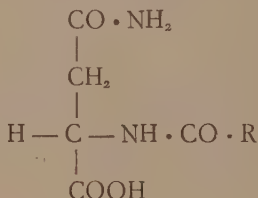
$$d_4^{19} = 1,6208$$

La rifrazione molecolare trovata, che risulta 33,55, non è in accordo coi valori che si possono calcolare in base a formule probabili.

Poichè ho pensato che questo composto potesse servire come eventuale vulcanizzante del caucciù, ho compiuto con esso delle ricerche sulla preparazione di fatturati usando olio di ricino in assenza di solventi. La sua azione si è rivelata molto più blanda di quella di tutti i cloruri di zolfo e mi ha condotto alla preparazione di prodotti di aspetto diverso da quello dei fatturati comuni e cioè semisolidi, molto viscosi e dotati di energico potere adesivo.

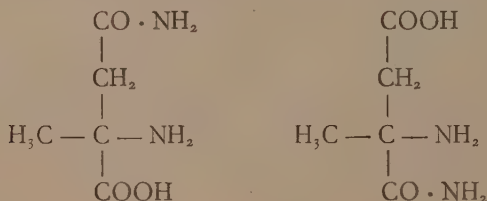
Chimica. — *Ricerche sugli aminoacidi rotatori* ⁽¹⁾. Nota di S. BERLINGOZZI e G. FRANCINI NALDI, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. G. BARGELLINI.

Negli ultimi anni uno di noi ha svolto alcune ricerche nel campo degli aminoacidi a struttura dissimmetrica ⁽³⁾. In queste indagini è stato preso in speciale considerazione il comportamento di alcuni composti di tale tipo nei riguardi della possibilità o meno di realizzare forme racemiche dalla diretta unione degli antipodi ottici. Così, in relazione al singolare comportamento delle asparagine rotatorie che non sono suscettibili di fornire il composto racemico, si riuscì invece ad ottenere due serie di acil-asparagine



enantiomorfe, dalla cui diretta unione risultò nettamente la corrispondente serie completa delle acil-asparagine racemiche.

Un'altra singolarità nello stesso gruppo di aminoacidi era offerta dalla C-metil-asparagina (omoasparagina), alla quale si attribuisce una delle due figurazioni ⁽⁴⁾



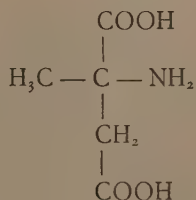
(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica e tossicologica della R. Università di Siena.

(2) Nella seduta del 5 giugno 1936.

(3) BERLINGOZZI, « Atti R. Accad. Lincei », [VI], 7, I, 1037 (1928); BERLINGOZZI e CAROBBI, « Gazz. Chim. Ital. », 60, 573 (1930).

(4) Cfr. KÖRNER e MENOZZI, « Atti R. Accad. Lincei », [V], 2, II, 368 (1893); PIUTTI « Gazz. Chim. Ital. », 28, II, 147 (1898).

Questa sostanza, funzionalmente vicinissima alla asparagina, mostra un comportamento assai differente: trattandosi di un composto sintetico, corrisponde alla forma racemica la quale, malgrado ripetuti e vari tentativi, non ha potuto essere scissa nei suoi antipodi ottici⁽¹⁾. Al contrario, il corrispondente acido C·metil-aspartico



ottenuto per saponificazione ammidica della C·metil-asparagina, presenta secondo Körner e Menozzi un comportamento ben diverso da quello della sua ammido; esso risulta, cioè, da un miscuglio a parti uguali di cristalli enantiomorfi corrispondenti ai due antipodi ottici⁽²⁾. A tale proposito è da rilevare che questa separazione di cristalli enantiomorfi non fu notata successivamente da Piutti⁽³⁾. Questi autori non danno precise indicazioni a proposito della temperatura alla quale essi ottenevano la cristallizzazione dell'acido C·metil-aspartico durante le loro esperienze. Secondo il nostro modo di vedere, ciò potrebbe avere una importanza notevole per spiegare la diversità dei risultati, in quanto non appare inverosimile che il campo di esistenza della forma racemica sia limitato da una temperatura rispettivamente superiore ed inferiore a quelle realizzate nelle differenti esperienze sopra citate. Sarà forse interessante approfondire le indagini su questo punto.

Frattanto, considerati gli insuccessi dei tentativi di sdoppiamento della C·metil-asparagina, ritenemmo opportuno rivolgere le esperienze ai derivati di tale composto ed anche a quelli dell'acido C·metil-aspartico. Una breve comunicazione preliminare fu fatta recentemente sopra questo argomento⁽⁴⁾; nella presente Nota riferiamo in particolare sopra nuove esperienze al riguardo.

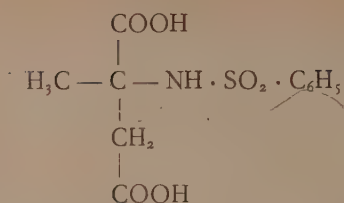
La possibilità (già rilevata dal primo di noi) di ottenere comodamente i derivati acilaminici degli aminoacidi del tipo suaccennato, ci ha indotti alla preparazione dei loro derivati benzensolfonilici

(1) Cfr. BERLINGOZZI e DE CECCO, « Atti V Congresso Naz. Chimica, Sardegna », 1935, 308.

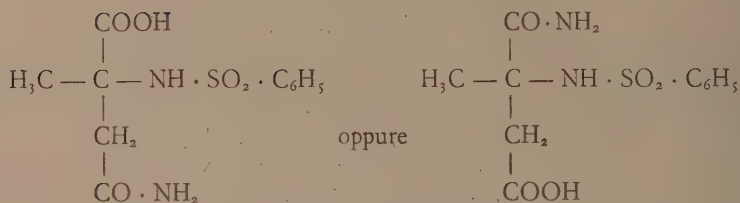
(2) I due autori (cfr. loc. cit.) accennano semplicemente alla attività ottica delle soluzioni senza fornire indicazioni sul valore del potere rotatorio.

(3) Cfr. loc. cit.

(4) Ved. BERLINGOZZI e DE CECCO, loc. cit.



acido benzensolfonil-C-metil-aspartico



benzensolfonil-C-metil-asparagina

per i quali era prevedibile un carattere acido abbastanza marcato e perciò opportuno per tentare la scissione mediante salificazione con alcaloidi attivi. Ciò si è verificato, ed è stata possibile la scissione di entrambi i composti attraverso il frazionamento dei sali di brucina nelle condizioni descritte più avanti.

La C-metil-asparagina da noi impiegata fu ottenuta per azione dell'ammoniaca alcoolica sull'anidride citraconica secondo le indicazioni fornite dalla letteratura ⁽¹⁾. Il composto anidro aveva l'aspetto di una polvere microcristallina bianca fusibile a 254-256°. Per saponificazione con acido cloridrico 4/1 N si passò all'acido C-metil-aspartico monoidrato. Questo composto si presentava in ciuffi di aghi prismatici fusibili a 232-234° con decomposizione.

Acido benzensolfonil-C-metilaspartico. — Gr. 5,5 di acido C-metilaspartico monoidrato (p. m. 165) sono sciolti in cc. 67 di NaOH/N. Questa soluzione viene trattata, a temperatura ordinaria, con altri cc. 33,5 della stessa soluzione titolata e con gr. 6 di cloruro benzensolfonilico. La soluzione alcalina ed il cloruro acido debbono essere aggiunti a piccole porzioni, alternativamente, sotto energica agitazione e controllando spesso la reazione che deve rimanere costantemente basica. Dopo alcune ore di riposo si acidifica con acido cloridrico e si lascia a sè. Molto lentamente si separano minutissimi cristalli prismatici incolori e trasparenti che si raccolgono alla pompa e si purificano ricristallizzandoli dall'acqua in cui sono discretamente solubili. Il composto

(1) V. PIUTTI, «Gazz. Chim. Ital.», 28, II, 148 e 151 (1898).

puro pesa gr. 4,5 e fonde con decomposizione a 195-197°. Già all'aria libera ed a temperatura ordinaria i cristallini diventano lentamente opachi perdendo di peso. La perdita di peso a 100° e le successive determinazioni di azoto e solfo concordano con la formula $(C_7H_8NO_4 \cdot SO_2 \cdot C_6H_5) \cdot H_2O$. Le soluzioni acquose del sale sodico dell'acido benzensolfonil-C-metilaspartico non manifestano attività ottica. Si tratta verosimilmente del composto racemico.

Salificazione dell'acido benzensolfonil-C-metilaspartico con la brucina e frazionamento dei sali. — Gr. 5,74 di acido preventivamente anidrificato (p. m. 287) sono sciolti a bagnomaria in 500 cc. di acqua. Gr. 15,76 di brucina pure anidrificata (p. m. 394) sono sciolti in 100 cc. di alcool. Si mescolano le due soluzioni, si agita e si lascia in riposo. Dopo circa 20 ore si raccoglie il prodotto depositato e si essicca nel vuoto su acido solforico. Pesa gr. 5,8 e fonde non nettamente con decomposizione verso i 130°. All'analisi dà risultati concordanti con la composizione del sale bibrucinico dell'acido benzensolfonil-C-metil-aspartico.

Dalle acque madri, lasciate evaporare sempre all'aria libera e a temperatura ordinaria, si separa lentamente un prodotto polverulento bianco. Dopo tre giorni si raccoglie e si essicca: pesa gr. 9,3.

Le nuove acque madri sono sottoposte ad evaporazione in essiccatore a vuoto fino a raccogliere altri gr. 5,5 di prodotto depositatosi, che appare costituito omogeneamente da minutissimi aghetti bianchi fusibili verso i 125° con svolgimento gassoso. Questa sostanza, essiccata nel vuoto su acido solforico ed analizzata, ha mostrata la stessa composizione del sale meno solubile.

Acidi benzensolfonil-C-metilaspartici otticamente attivi. — La separazione degli acidi dei sali bibrucinici precedentemente descritti si effettua macinando questi a freddo con piccolo eccesso di idrossido sodico, filtrando per separare la brucina spostata, ed aggiungendo al filtrato acido cloridrico fino a lieve acidità. Operando in tal modo separatamente sopra i due sali (più solubile e meno solubile) si ottiene la separazione dei due acidi rotatori che cristallizzano in prismetti allungati trasparenti incolori, spesso disposti a raggiera, fusibili entrambi a 190-191° con decomposizione. Non è stato finora possibile ottenere cristalli isolati e ben formati per un esatto studio cristallografico. I risultati analitici concordano con la composizione degli acidi bibrucinati della formula $(C_7H_8NO_4 \cdot SO_2 \cdot C_6H_5) \cdot 2H_2O$. L'acido *destrogiro* proviene dal sale bibrucinico *meno solubile*; l'acido *levogiro* dal sale *più solubile*. Ripe-tute osservazioni polarimetriche eseguite sopra soluzioni acquose dei sali sodici degli acidi stessi, per concentrazioni intorno al 5%, hanno fatto dedurre, come media

$$[\alpha]_D^{20} = \pm 9^{\circ},7.$$

Nella citata comunicazione preliminare di Berlingozzi e De Cecco fu descritta la scissione della benzensolfonil-C-metilasparagina nei suoi antipodi ottici per i quali si ebbe

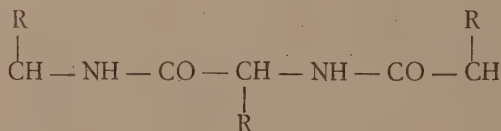
$$[\alpha]_D^{20} = \pm 10^{\circ},4'$$

Anche a proposito di queste sostanze si nota dunque (come avviene per le asparagine e per gli acidi aspartici) una lievissima differenza fra il potere rotatorio degli acidi e quello delle corrispondenti ammidi.

Sono in corso esperienze sulla idrolisi di questi derivati benzensolfonilici rotatori.

Chimica. — *Contributo alla conoscenza biochimica delle ossa durante lo sviluppo*⁽¹⁾. Nota di V. CAGLIOTI e D. GIGANTE, presentata⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Uno di noi (V. C.) ha recentemente mostrato⁽³⁾ che nel tessuto osseo la sostanza organica e quella inorganica sono collegate in modo da formare un reticolo semi-combinato. I loro elementi costitutivi, l'idrossiapatite e le catene di aminoacidi, hanno alcuni parametri fondamentali praticamente coincidenti: la cella elementare dell'idrossiapatite lungo l'asse *c* e la lunghezza del doppio aggrovamento



misurano infatti entrambi 6.88–6.90 Å.

Tale identità di dimensioni rende conto della funzione di sostegno che l'idrossiapatite compie nel tessuto osseo: i gruppi RCH—NH—CO—CHR, che in molti tessuti animali, come i capelli, i peli, sono disposti lungo una spirale molto contratta, nelle ossa vengono mantenuti tesi e sorretti dai prismetti d'idrossiapatite che hanno lungo l'altezza dimensioni coincidenti.

E ciò risulta dimostrato dal fatto che, per decalcificazione delle ossa, e cioè eliminando il sostegno, i radicali aminoacidi assumono una disposizione sterica analoga al collagene con una disposizione dei radicali RCH—NH—CO—CHR, quale si osserva nei muscoli e nei tessuti molli.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 5 giugno 1936.

(3) V. CAGLIOTI, *Sulla struttura delle ossa*. «Atti del V Congresso Nazionale di Chimica pura e applicata» (1935), p. 325.

Nella Nota citata è stato inoltre mostrato che le ossa che hanno funzione di sostegno, come ad es. il femore di bue, presentano i loro elementi costitutivi orientati nel senso longitudinale, e cioè con l'asse del prisma dell'idrossiapatite e le catene di valenza principale degli aminoacidi paralleli alla lunghezza dell'osso.

Ci è parso interessante estendere le ricerche anche ad ossa diverse di altri animali, per stabilire di quali ossa è caratteristico tale orientamento, e in quale periodo dell'accrescimento esso si manifesta.

Tale ricerca era tanto più necessaria, in quanto non tutti gli sperimentatori trovano orientamento nello spettro delle ossa, e la letteratura è alquanto discorde sull'argomento.

Abbiamo perciò esaminato le ossa di rattini nati da madri in ottime condizioni di nutrizione e salute, e normalmente allattati. Dalla nascita si è sacrificato un ratto al giorno, a partire dalla prima giornata dopo il parto, fino alla 15^a. Di ciascun animale abbiamo preso in esame il femore e la tibia, per studiare due tipiche ossa lunghe, indispensabili alla stazione e alla deambulazione, e il parietale, come rappresentante di ossa piatte. Si è preparata la diafisi del femore e della tibia di destra; e, dopo aver sezionato l'osso secondo un piano frontale, è stata esposta ai raggi X la parte centrale della metà anteriore. L'orientamento veniva valutato dall'aumento d'intensità della riga (002) in corrispondenza dei meridiani degli anelli di diffrazione, come è stato indicato nel precedente lavoro.

I risultati sono i seguenti:

Femore: gli spettri sono stati eseguiti dopo due e 24 ore, dopo 6, 8, 10 e 14 giorni di vita: l'orientamento, che s'inizia nell'osso di 24 ore, diviene nettamente distinto dopo 6 giorni di vita, e si completa durante lo sviluppo ulteriore.

Tibia: anche in questo caso l'orientamento è abbastanza evidente dopo 6 giorni di vita, ed è completo dopo 10 giorni.

Parietale: l'orientamento non si manifesta ancora dopo 6 giorni, è poco evidente nelle ossa di 8 giorni, ed è abbastanza netto dopo 10 giorni di vita.

Nelle ossa lunghe, l'orientamento si compie nel senso che l'asse *c* dei prismetti di ossiapatite, si dispone parallelamente alla direzione longitudinale dell'osso, lungo la quale si compie il maggiore sforzo; nel parietale si compie nella direzione del Bregma.

Come si è visto, nelle ossa dei rattini appena nati l'orientamento non è apprezzabile: esso si manifesta durante il loro accrescimento con un decorso diverso per le diverse ossa. L'orientamento nella tibia e nel femore coincide infatti con l'inizio dei movimenti locomotori volontari; l'orientamento nel parietale, osso piatto che ha semplice funzione contensiva e protettiva, segue invece a distanza di giorni l'orientamento delle ossa lunghe.

Ci sembra perciò dimostrata l'esistenza di un rapporto fra le caratteristiche strutturali dell'osso e la funzione che esso deve esplicare.

Per meglio precisare questi rapporti e completare lo studio biostrutturale, abbiamo in corso ricerche su ossa di animali, capaci di stazione eretta e deambulazione sin dalla nascita (come la cavia e il pollo) da comparare con quelle su ossa di animali incapaci ancora alla nascita di stazione eretta e deambulazione (come il ratto e il colombo); su queste ricerche riferiremo in seguito.

Il metodo d'esame da noi impiegato ci sembra degno di vasta applicazione nella biologia, perchè consente di mettere in evidenza fenomeni che interessano le dimensioni dell'Å, e che non sono rivelabili da comuni mezzi d'indagine e con la tecnica attualmente impiegata nelle ricerche biologiche. Così, ad es., nelle varie ossa di ratti, studiate dopo due ore, o dopo 6 o 10 giorni di vita e ridotte in lamine sottili e montate col balsamo del Canada, si notano nettamente le lacune ossee e gli spazi midollari, decorrenti longitudinalmente e piuttosto accostati gli uni agli altri: con tale tecnica non si sono rilevate differenze sostanziali tra le varie ossa appartenenti a individui di età diversa.

Tutto ciò era da prevedere, perchè le sezioni istologiche sono state ottenute, come vien fatto comunemente, con materiale già decalcificato. Orbene, nel precedente lavoro è stato dimostrato che la decalcificazione comporta, oltre all'eliminazione della sostanza inorganica, anche una trasformazione strutturale nella sostanza organica delle ossa, che distrugge ogni traccia degli aspetti morfologici del legame che esisteva fra sostanza organica e sostanza inorganica nel tessuto primitivo.

Perciò è ovvio che l'esame roetgenografico può essere molto utile, laddove l'esame microscopico non può rilevare differenze sostanziali.

Conclusione. — È stato dimostrato che nel periodo di accrescimento del ratto, le sostanze costituenti il tessuto osseo che inizialmente non sono orientate, acquistano orientamento che conferisce maggiore solidità: il femore e la tibia, ossa indispensabili alla stazione e alla deambulazione, sono già orientati quando hanno inizio i movimenti volontari: il parietale che ha semplice funzione protettiva e contensiva, si orienta invece a distanza di parecchi giorni.

Chimica. — *Relazioni fra struttura e proprietà meccaniche di pellicole e fili di acetilcellulosa*⁽¹⁾. Nota di G. CENTOLA, presentata⁽²⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

In una precedente ricerca sulla struttura della acetilcellulosa solubile in acetone (o cellite) si è messo in evidenza che questa sostanza, ritenuta finora amorfa, può assumere assetto cristallino se trattata a caldo con alcool metilico⁽³⁾.

Nel corso delle esperienze si è notato che le proprietà meccaniche delle pellicole e delle fibre risultano notevolmente peggiorate dopo la ricristallizzazione: le pellicole diventano alquanto fragili ed i fili subiscono una notevole diminuzione di resistenza alla rottura.

Lo studio dei fenomeni osservati appare di notevole interesse per il contributo che può apportare alla conoscenza delle relazioni che intercorrono fra struttura e proprietà meccaniche delle fibre artificiali.

Per comodità di lavoro e per ottenere dati più precisi e più facilmente confrontabili fra loro, le ricerche sono state eseguite su fili di rayon all'acetato di cellulosa (titolo = 75 denari; acido acetico = 51,6 %).

Mediante determinazioni del carico di rottura, è stato possibile seguire quantitativamente la variazione delle proprietà meccaniche in relazione ai trattamenti subiti dai fili.

Sulle pellicole sono state eseguite solo prove qualitative i cui risultati sono analoghi a quelli ottenuti con il rayon.

È stato determinato il carico di rottura dei seguenti fili:

- 1) rayon non sottoposto ad alcun trattamento;
- 2) » trattato per 5 ore in corrente di vapor d'acqua (senza tensione);
- 3) » trattato per 5 ore in corrente di vapor d'acqua (stirato; allungato del 31 %);
- 4) » trattato per 2 ore in corrente di vapori di alcool metilico (senza tensione);
- 5) » trattato per 2 ore in corrente di vapori di alcool metilico (stirato; allungato del 49 %).

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 5 giugno 1936.

(3) « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei » (in corso di stampa).

Per la determinazione del carico di rottura è stato adoperato il dispositivo di O' Neill ⁽¹⁾ che ha dato risultati soddisfacenti.

Prima delle esperienze le fibre sono state essiccate sotto vuoto per 4 ore a 56° e portate poi tutte allo stesso grado di umidità esponendole per 24 ore all'aria nello stesso ambiente.

Per ogni campione sono state eseguite sei determinazioni prelevando i pezzi di filo in punti differenti della massa, allo scopo di ovviare per quanto era possibile alle eventuali differenze di titolo e di omogeneità.

I dati ottenuti sono riportati nella tabella seguente le cui cinque colonne si riferiscono rispettivamente ai cinque campioni in esame.

TABELLA. — *Carico di rottura in grammi per denaro.*

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1,20	1,18	1,60	0,65	1,55
1,20	1,19	1,64	0,60	1,55
1,22	1,20	1,62	0,64	1,53
1,23	1,21	1,63	0,65	1,51
1,22	1,20	1,64	0,67	1,54
1,21	1,20	1,60	0,62	1,55
Media . . . 1,21	1,20	1,62	0,64	1,54

Nel calcolo del carico di rottura delle fibre stirate si è tenuto conto della variazione di titolo causata dall'allungamento.

Dall'esame della tabella si nota che lo stiramento dei fili, perfezionando l'orientamento delle molecole filiformi nella direzione dell'asse fibroso, fa aumentare sensibilmente il carico di rottura. Ciò è dovuto al fatto che le molecole orientate hanno un numero maggiore di punti di contatto laterali rispetto a quelle non orientate, e quindi occorre uno sforzo maggiore per farle scorrere le une sulle altre e rompere le fibre.

Si nota inoltre che i vapori di alcool metilico (o anche l'alcool metilico bollente) cagionano un forte abbassamento del carico di rottura: nell'esperienza n. 4, in cui non si è avuta alcuna variazione delle dimensioni dei fili, il carico di rottura si è ridotto a circa metà di quello iniziale, mentre il vapor d'acqua in condizioni analoghe non produce effetti sensibili.

Le fibre stirate sotto l'azione dei vapori di alcool metilico hanno un carico di rottura elevato, ma inferiore a quello dei fili stirati in corrente

(1) DORÉE, *The methods of cellulose chemistry*. (Chapman & Hall, London, 1933), p. 82.

di vapor d'acqua, pur essendo questi meno allungati e quindi orientati meno perfettamente.

In questo caso bisogna considerare due fattori che agiscono in senso opposto sulla solidità delle fibre: l'orientamento che tende ad aumentarla e l'azione dell'alcool metilico che tende a diminuirla.

È ovvio che il peggioramento delle proprietà meccaniche non è dovuto semplicemente alla temperatura più o meno elevata a cui vengono mantenute le fibre, ma è dovuto ad una azione specifica dell'alcool metilico. Questa può manifestarsi nei tre modi seguenti:

- a) demolizione delle molecole del derivato cellulosico;
- b) estrazione di una sostanza che funziona da cemento fra i cristalliti di acetilcellulosa;
- c) ricristallizzazione della sostanza.

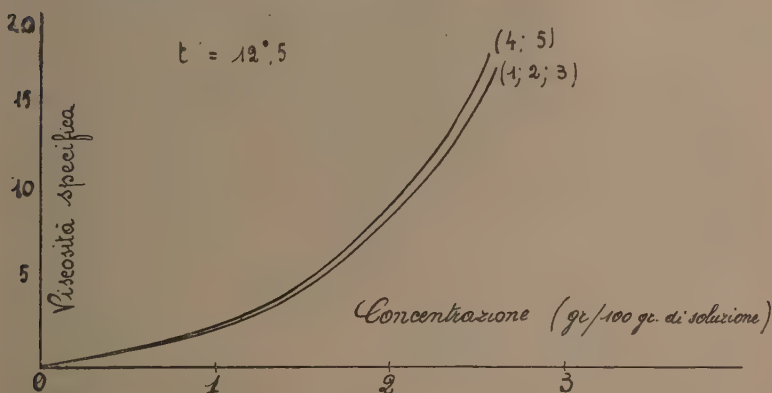


Fig. 1.

Se il peggioramento delle proprietà meccaniche dipende da fenomeni di depolimerizzazione, si deve verificare un abbassamento della viscosità delle soluzioni del rayon trattato con alcool metilico, perchè è noto che, a parità di tutte le altre condizioni, la viscosità di una soluzione è direttamente proporzionale alla grandezza delle molecole del soluto.

Ho determinato la viscosità di soluzioni acetoniche dei cinque campioni di rayon descritti prima. Per l'esecuzione delle misure mi sono servito del dispositivo di A. van der Wik e K. H. Meyer⁽¹⁾.

Le viscosità dei preparati 1, 2 e 3 sono praticamente uguali fra loro ed un po' più basse di quelle dei preparati 4 e 5, come risulta evidente dalla fig. 1 nella quale sono riportati i valori delle viscosità specifiche a 12,5 delle varie soluzioni in funzione della concentrazione espressa in grammi per 100 grammi di soluzione.

(1) « Journ. de Chim. phys. », 32, 549 (1935).

Dato che la viscosità della cellite aumenta in seguito al trattamento con alcool metilico a caldo, è da escludersi che si verifichino fenomeni di depolimerizzazione.

Si può invece supporre che l'alcool metilico bollente estragga qualche sostanza contenuta nella cellite.

Per verificare ciò, ho trattato, per 10 ore, 100 gr. di rayon all'acetato con alcool metilico in un estrattore a caldo ed ho poi ricercato le sostanze eventualmente estratte dall'alcool metilico, per stabilirne la natura e le proprietà.

Dopo l'estrazione, l'alcool metilico contiene sostanze disciolte le quali sono state separate in due frazioni nel modo seguente:

per raffreddamento si ottiene un precipitato, il quale filtrato, lavato con alcool metilico freddo ed essiccato si presenta come una polvere bianca, amorfa, solubile in acetone (frazione I; resa = 1,9 % del peso originario delle fibre);

il filtrato, svaporato a bagno maria fino a piccolo volume, per aggiunta di acqua dà un precipitato che, filtrato, lavato con acqua, ed essiccato risulta simile alla frazione precedente per aspetto e proprietà (frazione II; resa = 0,7 % del peso originario delle fibre).

Le caratteristiche più importanti delle due frazioni sono le seguenti:

	I	II
$\text{CH}_3\text{COOH } \%$ =	51,5	51,4
Viscosità specifica (in acetone, a 12°,5 conc. = 0,8 %)	0,598	0,423
Spettrogramma	amorfo	amorfo

Le due sostanze in esame, dopo saponificazione con soluzione metilica 2N di soda caustica, danno lo spettrogramma della cellulosa mercerizzata.

Dal confronto delle proprietà della cellite e delle due sostanze estratte da essa, risulta molto evidente che queste ultime sono costituite da prodotti di demolizione della cellulosa, acetilati, formati probabilmente durante il processo di acetilazione.

Hanno la stessa composizione chimica della cellite e si differenziano da questa perchè sono solubili più facilmente e danno soluzioni di bassa viscosità specifica. Questo indica che sono costituite da molecole più piccole.

L'allontanamento di queste sostanze è la causa che determina l'aumento di viscosità che si verifica per le soluzioni acetoniche della cellite trattata con alcool metilico.

È noto che i prodotti di demolizione della cellulosa, o i loro derivati, hanno una influenza dannosa sulle proprietà meccaniche delle fibre, perchè

basta un contenuto relativamente basso di catene molecolari corte per creare dei punti di minor resistenza nell'edificio molecolare. È noto ancora che esiste una relazione di diretta proporzionalità fra la viscosità della cellulosa e dei suoi derivati e le proprietà meccaniche delle pellicole, fili ecc. preparati con essi.

Perciò le esperienze riferite finora dimostrano che non è ammissibile attribuire la diminuzione di resistenza meccanica dei fili di cellite a fenomeni di depolimerizzazione causati dall'azione dell'alcool metilico, nè all'estrazione di sostanze cementanti.

Sembra più verosimile ammettere che il semplice processo di ricristallizzazione ⁽¹⁾ può influire sfavorevolmente sulle proprietà meccaniche degli oggetti in esame.

Questa ipotesi è stata confermata dalle seguenti esperienze. Una pellicola preparata per svaporamento di una soluzione acetonica di cellite al 5 % risulta abbastanza flessibile ed amorfa. Dopo 10 ore di ebollizione con alcool metilico diventa cristallina e si rompe facilmente per piegamento sotto un angolo molto acuto.

Se si ridiscioglie in acetone il film così trasformato e si svapora la soluzione, si ottiene un nuovo film che è amorfo e flessibile come il primo.

Per determinazioni quantitative ho preso in esame due campioni di rayon all'acetato, uno in condizioni normali (amorfo; carico di rottura = gr. 1,21 per denaro), l'altro cristallizzato con alcool metilico senza stramento (carico di rottura = gr. 0,64 per denaro), e li ho sospesi sotto una campana di vetro a temperatura ambiente (circa 20°), per 24 ore, in presenza di cloroformio, i cui vapori sono capaci di rigonfiare i fili di cellite senza scioglierli.

Dopo questo trattamento i fili, liberati dal cloroformio per riscaldamento a 65° sotto vuoto, risultano inalterati per quanto riguarda la loro forma e le loro dimensioni.

All'esame roentgenografico danno entrambi lo stesso spettrogramma amorfo. La misura del loro carico di rottura ha dato i seguenti risultati (espressi in gr./denaro):

Fili cristallizzati trattati con cloroformio	Fili amorfi trattati con cloroformio
1,22	1,20
1,19	1,19
1,18	1,21
1,21	1,20

(1) Per evitare equivoci si fa notare che non bisogna confondere l'orientamento delle molecole nella direzione dell'asse fibroso con la cristallizzazione dei fili.

Si osserva quindi che l'azione rigonfiante del cloroformio riporta i fili cristallizzati nelle loro condizioni originarie di struttura e di proprietà meccaniche.

Si può pertanto concludere che il peggioramento delle proprietà meccaniche dei fili e delle pellicole di cellite è da attribuirsi alla ricristallizzazione operata dall'alcool metilico alla temperatura di ebollizione.

Il fenomeno della ricristallizzazione della cellite consiste nel riavvicinamento di alcune molecole, le quali, perfezionando i loro legami laterali, riformano dei cristalliti.

Questi sono delimitati da superfici, in corrispondenza delle quali le forze di coesione fra le molecole appartenenti agli strati superficiali di due cristalliti contigui risultano alquanto indebolite.

Si creano in tal modo soluzioni di continuità nella massa globale del filo e quindi punti di minor resistenza.

Limitando le nostre considerazioni ai singoli cristalliti, si può dire che il processo di ricristallizzazione, avvicinando fra loro le molecole e perfezionandone i legami laterali, rende la massa più compatta in alcuni punti; se però prendiamo in esame tutta la massa del filo, possiamo renderci facilmente conto come in essa si abbia una distribuzione più omogenea delle molecole allo stato amorfo anzichè allo stato cristallino.

Questo spiega perchè la cellite ha proprietà meccaniche superiori alla triacetilcellulosa, la quale dà fili e pellicole alquanto cristallizzati.

Lo stesso può ripetersi per quanto riguarda le relazioni che intercorrono fra trinitrocellulosa e cotone collodio ⁽¹⁾.

Il fenomeno osservato può essere paragonato a quello che si verifica per il caucciù il quale, se raffreddato fortemente, diventa fragile e cristallino, e da questo stato può ritornare nelle sue condizioni normali, ridiventando contemporaneamente amorfo.

Anche nell'invecchiamento del caucciù, oltre ad azioni chimiche dovute in prevalenza all'ossigeno atmosferico, può ammettersi l'influenza della ricristallizzazione: difatti è noto che il caucciù invecchiato ha struttura cristallina e che, sottoposto ad opportuni trattamenti, ridiventa amorfo e riacquista, almeno parzialmente, le caratteristiche fisiche che aveva perdute nell'invecchiamento ⁽²⁾.

A questa interpretazione si potrebbe obiettare che le fibre naturali di cellulosa, anche risultando ben cristallizzate, presentano proprietà meccaniche notevolmente elevate.

(1) K. H. MEYER, *IX Congreso de Química pura y aplicada (Madrid, 1934)*, to. IV, p. 123.

(2) J. J. TRILLAT, *Les applications des Rayon X*. Presse Universitaires, Paris (1930), p. 214.

Per chiarire questo punto bisogna notare che le fibre naturali non sono costituite totalmente di cellulosa chimicamente pura, ma che esse contengono anche altre sostanze (come è stato dimostrato in varie ricerche da parecchi autori) le quali funzionano da cemento fra i cristalliti di cellulosa ed impartiscono alle fibre una particolare « biostruttura » ⁽¹⁾.

Riferendoci ad osservazioni macroscopiche, le sostanze incrostanti, contenute nelle fibre, cementano le fibrille fra loro per formare le fibre, ed, ancora più in grande, uniscono le fibre a costituire gli steli di alcune piante.

Se le sostanze estranee vengono allontanate, in principio si riesce a suddividere gli steli in fibre elementari, poi queste in fibrille, ed infine, se fosse possibile eliminare anche la sostanza cuticolare senza alterare chimicamente la cellulosa, si potrebbe avere la suddivisione della cellulosa nei singoli cristalliti.

Noi non sappiamo ancora con precisione cosa avvenga della sostanza cuticolare nelle trasformazioni cui viene sottoposta la cellulosa nella preparazione dei prodotti artificiali, ma tutto fa supporre che essa vada più o meno distrutta e comunque perda quasi del tutto le sue capacità cementanti.

Perciò, quando facciamo cristallizzare artificialmente un derivato cellulosico, otteniamo un edificio che differisce di molto dalle fibre naturali, nelle quali i cristalliti si sono formati in seno alla pianta in presenza di sostanze che hanno colmato i vuoti esistenti fra di essi.

Chimica. — *Sulla costituzione chimica della colesterina.* — XIII. *Il 13-18-dimetil-9-13-ciclopentano-5-6-deidro-idrofenantrolo-3, dalla colesterina* ⁽²⁾. Nota di R. DE FAZI e F. PIRRONI, presentata ⁽³⁾ dal Socio N. PARRAVANO.

Nel 1932 ⁽⁴⁾ siamo riusciti a trovare un metodo che, senza deidrogenare la colesterina, ci ha permesso di tentare di togliere la grande catena a 8 atomi di carbonio, lasciando intatto il residuo tetranucleare ed il gruppo alcoolico secondario.

Le difficoltà sperimentali incontrate per ottenere prodotti puri ed il rendimento piccolissimo del composto che maggiormente ci interessava, non permisero uno studio completo. Fermammo però la nostra attenzione particolarmente su un composto fondente a 201°, che, da tutti i risultati analitici ritenemmo probabile trattarsi di un alcool secondario della formula $C_{19}H_{30}O$.

(1) K. HESS, « Naturwissenschaften », 22, 469 (1934).

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica della R. Università di Pisa.

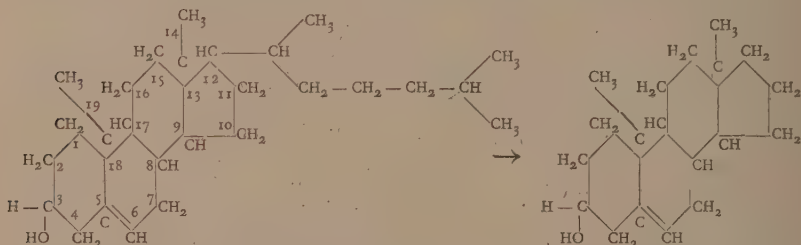
(3) Nella seduta del 5 giugno 1936.

(4) R. DE FAZI, F. MONFORTE e F. PIRRONI, « Gazz. Chim. Ital. », 62, 108 (1932).

L'anno scorso abbiamo ripreso queste ricerche operando su 315 gr. di colesterina e siamo riusciti a separare circa 10 gr. del composto puro, dai vari prodotti della reazione del cloruro rameoso sulla colesterina, a 240–260°. Le condizioni precise e i risultati ottenuti sono dettagliatamente descritti nella parte sperimentale. Per ora è stato studiato soltanto il composto già da noi trovato nelle precedenti ricerche, ed abbiamo osservato all'apparecchio Kofler che quando è puro fonde a 202–203°.

Le numerose analisi eseguite sono concordanti per $C_{19}H_{30}O$, inoltre si ottiene un acetil derivato (p. f. 185–186°) $C_{21}H_{32}O_2$, che per azione dell'idrato potassico in soluzione alcoolica dà nuovamente $C_{19}H_{30}O$. Per azione del bromo si ha un dibromo-derivato, (p. f. 164–165°) e non un tetrabromoderivato. Il peso molecolare determinato sul composto $C_{19}H_{30}O$ e sul suo acetil-derivato hanno confermato le nostre previsioni.

Con la nuova formula di costituzione *attribuita* alla colesterina il composto fondente a 202–203°, sarebbe il 13-18-dimetil-9-13-ciclopentano-5-6-deidro-idrofenantrolo-3, e perciò l'alcool secondario corrispondente alla colesterina priva della grande catena ad 8 atomi di carbonio:



PARTE SPERIMENTALE.

La colesterina adoperata per le operazioni successivamente descritte era della Ditta Frankel Landau di Berlino ed aveva le seguenti caratteristiche: p. f. 147–148°; $[\alpha]_D^{25} = -39,50$ (in soluz. cloroformica al 4% e in un tubo da 10 cm.); reazione Rosenheim, negativa.

In un pallone da 100 cc., chiuso da un tappo ad un foro, portante un tubo a cloruro di calcio, venne introdotta un'accurata mescolanza, ben polverizzata, di gr. 21 di colesterina con gr. 3 di cloruro rameoso. Il miscuglio su bagno di lega è stato tenuto a 240–260° per due ore (termometro nel bagno). Si nota svolgimento di acido cloridrico e formazione di prodotti che distillano, aventi odore di sostanze grasse.

L'operazione suddescritta venne ripetuta 15 volte, operando così in definitività su gr. 315 di colesterina.

Il prodotto della reazione, ancora caldo, venne versato su lastra di porcellana, sulla quale, entro qualche giorno, assumeva consistenza dura e poteva

essere staccato con facilità. Si è notato che non sempre assumeva tale consistenza; alcune volte questa mancava, ed in tali casi, il rendimento in resine ed in prodotti a p. f. 78-79° era maggiore, mentre risultava scarsissimo il rendimento dei prodotti fondenti a 192-193° e 202-203°. Se si potesse eseguire la reazione variando la temperatura in spazio più ristretto di gradi, molto probabilmente i rendimenti dei vari prodotti sarebbero costanti.

Il prodotto della reazione venne esaurito dapprima con alcool etilico, poi con etere acetico ed infine con cloroformio. — Si ebbero: dalla soluzione alcoolica, gr. 31 di un prodotto gialliccio p. f. 70-74°, gr. 4 di un prodotto gialliccio p. f. 116-120° e gr. 180 di una resina rossiccia; dalla soluzione in etere acetico, gr. 9 di sostanza bianca cristallina p. f. 169-172°; dalla soluzione cloroformica gr. 12 di un composto bianco cristallino p. f. 200°. — I prodotti ottenuti furono purificati ripetute volte dallo stesso solvente, e si ebbero in definitiva: gr. 25 di aghi bianco giallici p. f. 77-78°, gr. 3 di druse traslucide p. f. 142-143°, gr. 7 di aghi bianchi sottili p. f. 195-196° e gr. 10 di aghi bianchi lucidi p. f. 202-203°. La resina distillata a 25 mm. ha fornito: gr. 85 di resina trasparente arancione con p. e. 295-303°, gr. 15 con p. e. 303-313°, gr. 18 con p. e. 313-323° e gr. 50 di resina rosso bruna con p. e. al di sopra di 323°.

PRODOTTO FONDENTE A 202-203°. — Le analisi hanno dato i seguenti risultati:

I	Sost. gr. 0,2579	trov.: C %	83,25	H %	11,54
II	» gr. 0,2082	» C %	82,93	H %	11,36
III	» gr. 0,1652	» C %	83,07	H %	11,02
IV	» gr. 0,1981	» C %	83,12	H %	11,21
	calcolato per $C_{19}H_{30}O$	C %	83,21	H %	10,94

La determinazione del peso molecolare in soluzione canforica (metodo Rost) ha dato i seguenti risultati:

sostanza gr. 0,1965	canfora gr. 2,1870;	Δ osservato	13,3;
trovato P. M. 270;	calcolato per $C_{19}H_{30}O$	P. M.	274.

La determinazione del potere rotatorio specifico ha dato i seguenti risultati:

sostanza gr. 0,6438	solvente ($CHCl_3$) cc. 50	t. = 15°,
tubo da 20 cm.;	$\alpha = -0,80$	$[\alpha]_D^{15} = -31,06.$

ACETILAZIONE DEL PRODOTTO A P. F. 202-203°. — 2 gr. di prodotto fondente a 202-203° vennero addizionati di 6 cc. di anidride acetica e posti a bollire a ricadere in un palloncino, per due ore.

Dopo tale tempo la soluzione raffreddata venne buttata in acqua, il prodotto bianco separatosi, asciugato, allo stato grezzo fondeva a 180-193°. Cristallizzato dal benzene è in aghi setacei bianchi fondenti a 185-186°.

L'acetilazione ripetuta su gr. 0,5 di prodotto a p. f. 202-203° in soluzione piridinica e con cloruro di acetile ha fornito dopo cristallizzazione dal benzene lo stesso prodotto a p. f. 185-186° in aghi setacei bianchi.

L'analisi eseguita sul prodotto a p. f. 185-186° ha dato i seguenti risultati:

I	Sost. gr. 0,2132	trov.: C %	79,60	H %	10,29
II	» gr. 0,1978	» C %	79,47	H %	10,41
III	» gr. 0,2099	» C %	79,29	H %	10,36
	calcolato per $C_{21}H_{32}O_2$	C %	79,74	H %	10,12

Fu eseguita la determinazione del peso molecolare in soluzione canforica (metodo Rost):

sostanza gr. 0,2032	canfora gr. 2,1006;	Δ osservato 12,7;
trovato P. M. 305;	calcolato per $C_{21}H_{32}O_2$	P. M. 316.

Venne inoltre determinato il potere rotatorio specifico:

sostanza gr. 0,1986	solvente ($CHCl_3$) cc. 25	$t = 15^\circ$,
tubo da 20 cm.;	$\alpha = -0,61$;	$[\alpha]_D^{15} = -39,02$.

SAPONIFICAZIONE dell'acetil derivato, fondente a 185-186°. — gr. 0,5 di prodotto fondente a 185-186° addizionati di 100 cc. di soluzione alcoolica di idrato potassico al 4 %, furono lasciati bollire a ricadere per tre ore. Dopo tale tempo il prodotto versato in acqua fu lavato sino a reazione neutra. Il prodotto grezzo fondeva a 196-200°, cristallizzato dal cloroformio si ottenne in aghi bianchi fondenti a 201-202°; il punto di fusione della miscelanza del prodotto testè ottenuto col prodotto originariamente usato fondente a 202-203° non ha dato alcun abbassamento.

BROMODERIVATO del prodotto a p. f. 202-203°. — 2 gr. di prodotto fondente a 202-203° disciolto in 150 cc. di cloroformio a t. o. vennero addizionati di gr. 1,6 di bromo in soluzione acetica al 10 %. La soluzione decoloratasi dopo qualche minuto fu posta in una capsula a t. o. per evaporare rapidamente il solvente. Il residuo avuto fonde a 160-167°. Si cristal-

lizza dal benzene, si ottengono minuti aghi bianchi a p. f. 164–165° con decomposizione. Dalle acque madri si hanno cristalli a più basso punto di fusione (140°, 129°), che danno reazione acida al tornasole, emanano odore di acido bromidrico ed hanno basso contenuto in bromo (23 %, 19,8 %).

Il dosaggio del bromo sul prodotto fondente a 164–165° ha dato i seguenti risultati:

I sost. gr. 0,1765	trov.: Br. %	36,20
II » gr. 0,1589	» Br. %	36,50
calcolato per $C_{19}H_{30}O$	Br. %	36,82

Il tentativo di bromurazione del prodotto a p. f. 202–203° con quantità doppia di bromo di quella usata nell'esperienza sopra descritta, ha dato come risultato che la soluzione cloroformica non si è decolorata e che il prodotto ottenuto a p. f. 161–162° ha reazione acida: svolge acido bromidrico e varia continuamente il suo punto di fusione.

Eseguito il dosaggio del bromo sul prodotto fondente a 142–145° si è avuto:

sost. gr. 0,2623	trov. Br. %	25,31.
------------------	-------------	--------

Chimica-fisica. — *Amplificazione galvanometrica mediante celle fotoelettriche differenziali*⁽¹⁾. Nota di L. MAZZA presentata⁽²⁾ dal Corrisp. L. ROLLA.

Recentemente A. V. Hill⁽³⁾ ha descritto nella « Nature » una nuova cella differenziale costituita da una normale cella Weston « photronic » opportunamente modificata e il suo impiego per amplificare le deviazioni galvanometriche. In realtà una cella molto simile a quella di Hill era stata descritta ed applicata fin dal 1927 da L. Rolla e dall'A.⁽⁴⁾ Poichè l'impiego di questo tipo di celle si è dimostrato molto utile in varie applicazioni ed in particolare nel campo della misura delle correnti deboli riferisco in questa Nota, insieme ad una breve descrizione della nostra cella, un dispositivo che ha dato risultati veramente notevoli per accrescere indirettamente la sensibilità dei galvanometri.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale e Chimica fisica della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 5 giugno 1936.

(3) A. V. HILL, « Nature », 134, 289, agosto 1934; Id., 133, 685, maggio 1934.

(4) R. ROLLA, L. MAZZA, F. CIANI, *Disposizioni costruttive per celle fotoelettriche*, « Priv. Ind. », 261, 361 – 1927, V.

È ben noto che il campo di impiego di un galvanometro destinato a misure quantitative dipende fondamentalmente dalla sensibilità e dalla precisione che esso può dare. La sensibilità non deve evidentemente essere disgiunta dalla costanza dello zero; e quindi si deve tener conto non già dell'ampiezza della deviazione per una determinata corrente o forza elettromotrice, ma della più piccola corrente o f. e. m. misurabile. Criteri analoghi sono comuni in molti strumenti di misura specialmente elettrici. In numerosi casi, quando ad es. si tratta di misurare delle debolissime correnti o tensioni rapidamente variabili, nel campo delle radiazioni in generale ed in particolare in quello delle ricerche spettrali nell'infrarosso ecc. si

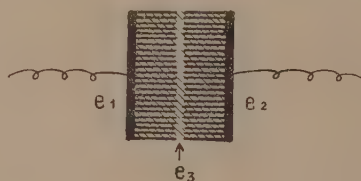


Fig. 1.

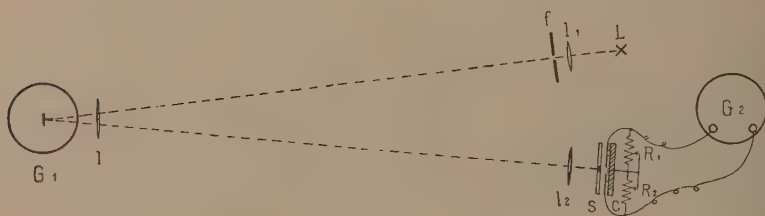


Fig. 2.

richiede o è preferibile, che il galvanometro sia molto rapido ma ciò non è conciliabile con una elevata sensibilità⁽¹⁾. Mediante il nuovo tipo di cella fotoelettrica e due galvanometri è possibile realizzare una elevata sensibilità senza aumentare il tempo di indicazione anche se il periodo dei galvanometri è molto piccolo. Ciò porta un reale vantaggio in questo genere di applicazioni in confronto al così detto « relais » termoelettrico di Moll⁽²⁾. Preferibilmente, per questo scopo, la cella è costituita da una lastrina rettangolare di nichel o acciaio nichelato con una superficie smerigliata sulla quale è stratificato del selenio⁽³⁾, al di sopra di questo strato sono applicati due

(1) La sensibilità cresce nei galvanometri elettromagnetici con il quadrato del periodo di oscillazione e nei galvanometri magnetoelettrici (a bobina mobile) con la radice quadrata di detto periodo.

(2) MOLL, « Phil. Mag. », 1 (1925); « Zeitschr. f. Physik », 34, 109 (1925).

(3) L'elemento sensibile è sottoposto al normale trattamento termico.

elettrodi metallici a forma di reticolo disposti simmetricamente nel modo indicato schematicamente dalla figura 1. Il sistema di amplificazione è illustrato dalla stessa fig. 2. La lampada L , munita di condensatore l e fenditura f è destinata a proiettare sullo specchio del galvanometro « primario » G_1 un intenso fascio luminoso in modo da formare mediante la lente di proiezione l_1 e la lente collettrice l_2 , una immagine ben netta della fenditura f su di un diaframma costituito da una sottile striscia argentata su di una lastrina di vetro piana e parallela posta a piccola distanza dall'elemento sensibile. La larghezza della fenditura deve essere aggiustata in modo che l'immagine reale della fenditura copra esattamente, quando il galvanometro è a zero, la sottile striscia argentata.

È evidente che finchè il galvanometro primario rimarrà a zero, ossia non sarà attraversato da alcuna corrente, anche il galvanometro connesso con la cella differenziale rimarrà immobile, ma quando una corrente debolissima attraverserà il primo galvanometro determinando una piccola deviazione dell'equipaggio mobile, uno dei semielementi della cella fotoelettrica sarà illuminato ed il galvanometro secondario devierà fortemente. Le deviazioni del galvanometro secondario⁽¹⁾ aumentano al crescere di quelle del galvanometro primario purchè le piccole deviazioni di questo non siano superiori alla larghezza del diaframma, ossia alla larghezza dell'immagine reale della fenditura.

Si possono raggiungere con celle sensibili e fasci luminosi intensi delle amplificazioni grandissime, a condizione che i galvanometri impiegati siano sufficientemente stabili, in particolare il galvanometro primario deve avere una costanza di zero molto elevata.

Molto interessante è l'applicazione della cella per ottenere una sensibilità notevolissima con galvanometri a cortissimo periodo come quelli a torsione o a vibrazione. In questo caso è possibile ottenere delle sensibilità paragonabili a quelle dei più sensibili galvanometri a quadro mobile e lungo periodo.

(1) Queste deviazioni sono, entro certi limiti, proporzionali a quelle del galvanometro primario. Per avere una migliore equilibratura si dispongono due resistenze variabili R_1 e R_2 secondo lo schema della fig. 2.

Chimica-fisica. — *Sull'ossidazione del nichel monovalente per azione dell'acqua in presenza di ioni CN^-* ⁽¹⁾. Nota di G. TEDeschi, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. O. SCARPA.

A. Job e A. Samuel⁽³⁾ proseguendo gli studi di I. Bellucci e R. Corelli⁽⁴⁾ sui composti del nichel monovalente, osservarono che il nichel-(I)-tricianuro-potassico ($\text{K}_2[\text{Ni}(\text{CN})_3]$) presenta una certa stabilità, in soluzione acquosa e in ambiente d'idrogeno, alla condizione che non vi sia nella soluzione un eccesso di ioni CN^- ; nel caso invece che questi ioni siano in eccesso, anche relativamente piccolo, il $\text{K}_2[\text{Ni}(\text{CN})_3]$ si ossida alle spese dell'ossigeno dell'acqua, liberando idrogeno gassoso.

Dato che è sufficiente una piccola quantità di ioni CN^- per realizzare l'ossidazione del Ni monovalente nelle condizioni suddette, questi Autori pensarono ad un fenomeno catalitico.

L'esame dettagliato del fenomeno mi ha portato invece alla conclusione che non si tratta di un fenomeno catalitico perchè l'aggiunta dell'eccesso di ioni CN^- , alla soluzione di $\text{K}_2[\text{Ni}(\text{CN})_3]$, varia il livello energetico del sistema, mettendolo in condizione di reagire, mentre altrimenti la reazione si trova nella impossibilità termodinamica di effettuarsi.

Un sistema ossiriducete può venire caratterizzato, com'è noto, dall' $r\text{H}_2$ che può esser preso come misura del suo potere ossidante.

L' $r\text{H}_2$ si esprime con la seguente formula⁽⁵⁾:

$$r\text{H}_2 = \frac{\pi}{RT} + 2P_{\text{H}}$$

dove π , che rappresenta il potenziale che si stabilisce fra un elettrodo indifferente e la soluzione considerata (potenziale di ossiriduzione), è dato dalla espressione:

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrochimica e Chimica fisica del R. Istituto Superiore di Ingegneria di Milano.

(2) Nella seduta del 5 giugno 1936.

(3) A. JOB e A. SAMUEL, «Comptes Rendus», 177, 188, 1923; e A. JOB, *Formes chimiques de transition*, p. 180. Paris, 1931.

(4) I. BELLUCCI e R. CORELLI, «Gazz. Chim. Ital.», 43, II, 569, 1914; Id., «Id.», 49, II, 70, 1919.

(5) Ved., ad es., R. WURMSER, *Oxidations et Réductions*, p. 211 e sgg. Paris, 1930.

$$\pi = -\frac{RT}{zF} \log \frac{a_{rid}}{a_{oss}} + \pi_0.$$

Si vede facilmente che una variazione al rapporto delle attività $\frac{a_{rid}}{a_{oss}}$ porta di conseguenza una variazione al potere di ossidazione e quindi all' νH_2 del sistema; e in particolare un aumento del rapporto delle attività porta una diminuzione dell' νH_2 .

Consideriamo una soluzione di $K_2[Ni(CN)_3]$ ⁽¹⁾ ottenuta per riduzione del complesso $K_2[Ni(CN)_4]$ e facciamo in modo che non vi sia eccesso di ioni CN^- . Poichè i complessi hanno un certo grado di dissociazione si possono considerare i seguenti equilibri:



Per cui si ha:

$$I) \quad K' = \frac{a_{Ni^{++}} a_{CN^-}^3}{a_{[Ni(CN)_3]^{--}}}$$

$$II) \quad K'' = \frac{a_{Ni^{++}} a_{CN^-}^4}{a_{[Ni(CN)_4]^{--}}}$$

e mettendo in evidenza le $a_{Ni^{++}}$ e $a_{Ni^{++}}$

$$III) \quad a_{Ni^{++}} = K' \frac{a_{[Ni(CN)_3]^{--}}}{a_{CN^-}^3}$$

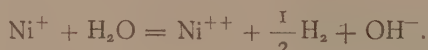
$$IV) \quad a_{Ni^{++}} = K'' \frac{a_{[Ni(CN)_4]^{--}}}{a_{CN^-}^4}.$$

Dividendo membro a membro la III) con la IV), e considerando che, essendo in presenza di complessi pochissimo dissociati, possiamo considerare costanti le attività degli ioni complessi rispetto alle variazioni delle attività degli ioni liberi, abbiamo:

$$V) \quad \frac{a_{Ni^{++}}}{a_{Ni^{++}}} = \frac{K'}{K''} \cdot \frac{a_{[Ni(CN)_3]^{--}} a_{CN^-}^4}{a_{[Ni(CN)_4]^{--}} a_{CN^-}^3} = \text{cost. } a_{CN^-}.$$

(1) Il potenziale di ossidazione nei complessi può essere considerato esclusivamente determinato (L. MICHAELIS, *Oxidations-Reductions Potentials*, 1933) dagli ioni metallici liberi provenienti dalla dissociazione del complesso: nel nostro caso considereremo quindi, a questo riguardo, le attività $a_{Ni^{++}}$ e $a_{Ni^{++}}$.

Dalla V) si vede quindi che un aumento dell'attività a_{CN^-} porta ad un aumento del rapporto $\frac{a_{\text{Ni}^+}}{a_{\text{Ni}^{++}}}$: di conseguenza aumenterà il potere riducente del sistema, l' $r\text{H}_2$ (che prima doveva necessariamente essere maggiore di zero, poichè l'acqua non veniva ridotta) potrà assumere un valore negativo, e il Ni^+ comincerà a ridurre l'acqua ossidandosi a Ni^{++} secondo lo schema



PARTE SPERIMENTALE.

Per verificare le deduzioni precedenti era necessario determinare il potenziale di ossiriduzione del $\text{K}_2[\text{Ni}(\text{CN})_3]$ in assenza di un eccesso di ioni CN^- , e poi in presenza di questo.

Data la grande ossidabilità di questo composto all'aria, la sua preparazione veniva effettuata in atmosfera d'idrogeno in un apparecchio (ved. fig. 1) costituito da quattro recipienti comunicanti fra loro in cui venivano eseguite le successive operazioni.

Una corrente di idrogeno entrava dai tubi H ed usciva dalle tubature K. Nel recipiente A era introdotta una soluzione di nicheltetracianuro potassico (preparato dal carbonato di nichel e dal cianuro potassico, e purificato mediante precipitazione con alcool⁽¹⁾) che veniva ridotto⁽²⁾ con un eccesso di amalgama di potassio all'1 %, preparata elettroliticamente. A riduzione ultimata, si eliminava il mercurio dalla tubulatura C per mezzo del rubinetto a tre vie B e si aggiungeva alla soluzione rosso scura, un eccesso di acido solforico diluito (10 %) che, decomponendo il $\text{K}_2[\text{Ni}(\text{CN})_3]$ formato, faceva precipitare il NiCN di colore arancione svolgendo HCN . Per impedire che questo passasse nell'ambiente si faceva gorgogliare l'idrogeno all'uscita dalla tubulatura K, attraverso due bottiglie di lavaggio piene di una soluzione di potassa. Il liquido e il precipitato venivano quindi introdotti nel recipiente D costituito da un imbuto cilindrico munito di un setto filtrante, di polvere di vetro compressa. Aspirando con una pompa ad acqua da F attraverso al rubinetto a tre vie E, si filtrava tutto il liquido; il precipitato veniva ripetutamente lavato con acqua per eliminare completamente l'acido solforico. A questo punto, chiuso il rubinetto E, venivano aggiunti alcuni cc. di una soluzione di KCN normale in quantità tale da non poter sciogliere tutto il NiCN .

Si veniva così a formare del nichelo-(I)-tricianuro-potassico esente da un eccesso di ioni CN^- . (È da notare che per portare in soluzione il cianuro

(1) G. GRÜBE, «Zeit. f. Elektrochem.», 32, 561, 1926.

(2) I. BELLUCCI e R. CORELLI, loc. cit.

L'equilibrio all'elettrodo di platino non si stabiliva immediatamente: la d. d. p. cresceva per un certo periodo per raggiungere un valore massimo al quale praticamente si stabilizzava. Fatte le letture della differenza di potenziale, e raggiunto l'equilibrio, venivano introdotte nel recipiente M alcune gocce di una soluzione di KCN. La d. d. p. aumentava immediatamente e tornava a stabilizzarsi dopo un certo tempo, a un valore più alto.

Calcolando l' rH_2 delle soluzioni studiate, tenendo conto del loro P_H (13.7), si è trovato che le soluzioni che non contengono ioni CN^- in eccesso hanno un rH_2 il cui valore è positivo, mentre quelle a cui è stata aggiunta una piccola quantità di KCN hanno un rH_2 negativo. Sono state ripetute molte

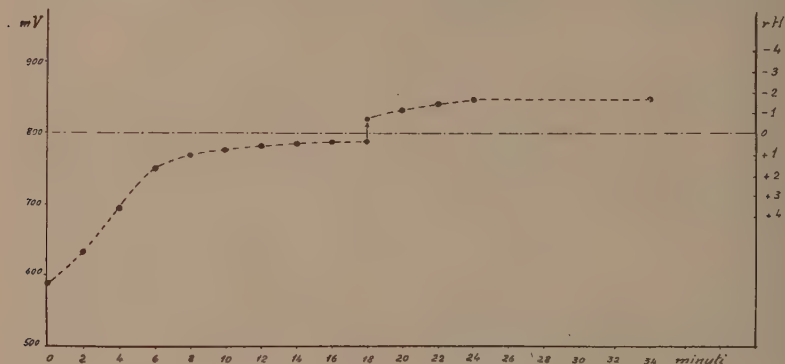


Fig. 2.

esperienze tutte concordi nel risultato. Il diagramma della figura 2 rappresenta le misure fatte in una di queste esperienze riportando le d. d. p. in funzione del tempo.

Si vede chiaramente che raggiunto l'equilibrio, i potenziali di ossiriduzione delle soluzioni, in presenza e in assenza di ioni CN^- in eccesso, si trovano rispettivamente sotto e sopra al valore di quello che presenta l'idrogeno in presenza di una soluzione a quel medesimo P_H , e che quindi, nelle condizioni in cui si è operato, solo le soluzioni di $K_2[Ni(CN)_3]$ contenenti ioni CN^- in eccesso sono in grado di ridurre l'acqua.

Dalla formula V) si poteva inoltre prevedere che, aggiungendo ancora del KCN, l' rH_2 avrebbe dovuto diminuire ulteriormente.

Infatti in un'altra esperienza si è avuto:

	π in mV	rH_2
Senza eccesso di KCN	775	+ 0.8
Dopo una prima aggiunta di KCN	823	— 0.8
» seconda » »	841	— 1.4
» terza » »	864	— 2.2

I valori dei potenziali di ossiriduzione delle soluzioni contenenti un eccesso di ioni CN^- sono in accordo, nell'ordine di grandezza, con quelli determinati da Grube⁽¹⁾, il quale effettuava le misure su soluzioni di $\text{K}_2[\text{Ni}(\text{CN})_3]$ ottenute direttamente per riduzione elettrolitica dal $\text{K}_2[\text{Ni}(\text{CN})_4]$, che contenevano quindi un notevole eccesso di ioni CN^- .

Risulta in questo modo chiarito il meccanismo dell'ossidazione del $\text{K}_2[\text{Ni}(\text{CN})_3]$ da parte dell'acqua in presenza di ioni CN^- .

Si può quindi affermare che non si tratta di un fenomeno catalitico nel vero senso della parola, perchè l'aggiunta degli ioni CN^- viene a spostare l'equilibrio del sistema.

Chimica. — *Ossidabilità e struttura di alcuni neri fumi industriali.* Nota di A. BARONI, presentata dal Socio G. BRUNI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Citologia vegetale. — *Osservazioni sui cloroplasti delle Cactacee*⁽²⁾. Nota di R. SAVELLI, presentata⁽³⁾ dal Socio B. LONGO.

Nell'estate dell'anno scorso, veramente a malincuore mi sono indotto a praticare ferite deturpanti su queste piante — talune così belle — e generalmente possedute in unico esemplare nella nostra collezione. Queste lesioni possono persino comprometterne la vita, ma questo difficilmente avviene nei mesi più caldi, e la cicatrizzazione è favorita con spennellature d'alcool e polvere di carbone. Il risultato ha compensato il rischio, superando ogni migliore aspettativa.

Nel gruppo degli ECHINOCACTUS hanno ELEOCLOROPLASTI:

1° *E. leucacanthus* Zucc. (= *Thelocactus* Britton et Rose) [Messico]: grossi e regolari, tra i più belli che ho visto; volume medio del liquido vescicolare micron cubici 980.

2° *E. nidulans* Quehl. (= *Thelocactus* Br. e R.) [Messico]: grossi e regolari; volume liquido vescicolare μ^3 520.

3° *E. hexaedrophorus* Lem. (= *Thelocactus* Br. e R.) [Messico]; grossi, con tendenza a formare anche due vescicole parastromatiche; volume liquido μ^3 720 per ogni vescicola.

4° *E. Saussieri* Web. (= *Thelocactus* Berger) [Messico]: vol. liquido vescicolare μ^3 700.

(1) Loc. cit.

(2) Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico della Università di Catania.

(3) Nella seduta del 5 giugno 1936.

In questo gruppo, più o meno interessanti per altri riguardi; ma negativi per l'eleocloroplasto:

E. centeterius Lehm.; *E. electracanthus* Lem.; *E. Grusonii* Hildm.; *E. ornatus* DC.; *E. latispinus* (Haw.) Hemsl.; *E. ingens* Zucc.; *E. myriostigma* Salm-Dyck; *E. longibamatus* Gal.; *E. Pfeifferi* Zucc.; *E. phyllacanthus* Mart.; *E. texensis* Hopff.; *E. platensis* Speg.; *E. Saglionis* Cels.; *E. Williamsii* Lem.; (= *Lophophora* Coulter, *Anhalonium* Rümpl.); *E. Lewinii* K. Schumann (= *Lophophora* Tomp., *Anhalonium* Henn.); *E. vaupelianus* Werd.; *E. Wislizeni* Eng.; *E. octacanthus* Muehl.; *E. Schickendantzii* Web.

Nel gruppo degli ECHINOCEREUS hanno ELEOCLOROPLASTI:

5° *E. pentalophus* Lem. [Messico]: grossissimo, vol. liquido vescicolare μ^3 1250.

6° *E. leptacanthus* K. Schumann [Messico]: per questa pianta la determinazione è data con riserva; solo mi preme di notare che è pianta nettamente diversa dalla precedente: eleocloroplasti grossi e regolari, volume del liquido vescicolare μ^3 1000.

7° *E. acifer* Lem. [Messico] vol. l. v. μ^3 700.

8° *E. phoeniceus* Lem. [America boreale] vol. l. v. μ^3 500.

9° *E. leonensis* Math. [Messico]. Anche di questa pianta la determinazione è data con riserva, non avendo ancora fiorito mai. Vol. l. v. μ^3 1100.

In questo gruppo sono negativi per l'eleocloroplasto:

E. chloranthus Rümpl.; *E. Scheerii* Lem.; *E. boliviensis* Poselg.; *E. cirrhifer* Labour.; *E. stramineus* Rümpl.; *E. glycimorphus* Forst.; *E. conglomeratus* (Forst.) Math.; *E. Berlandieri* Lem.; *E. Salm-Dyckianus* Scheer; *E. enneacanthus* Eng.; *E. cinerascens* Rümpl.; *E. maritimus* K. Schumann.

Del gruppo ECHINOPSIS, quelli posseduti dall'Orto Botanico di Catania furono tutti negativi per l'eleocloroplasto: *E. nigricans* Linke; *E. multiplex* Zucc.; *E. tubiflora* Zucc.; *E. oxigona* Zucc.; *E. Wilkensis* Hort.; *E. Lagemannii* Dietr.; *E. Drogeana* Berg.; *E. Bridgesii* Salm. v. *Labouretiana* Hort.; *E. Pentlandii* Salm. (= *Lobivia* Br. e R.).

Ed infine, pel gruppo MYRTILLOCACTUS che, con la specie *geometrizans* (Mart.) Cons., aveva dato alla Dott. Casalaina una prima conferma delle mie osservazioni sull'eleocloroplasto, bisogna aggiungere:

10° *M. pugionifer* (Lem.) Berger [Messico], dove gli ELEOCLOROPLASTI sono di forma più netta e costante che nel *geometrizans*, benchè, come in quello, assai piccoli: volume massimo del liquido vescicolare 30 μ^3 .

Metto tra le specie negative *M. cochal* (Orc.) Br. e R., benchè una piccolissima sferula lipidica in posizione parastomatica stia in essa come un segno, poco cospicuo ma costante, della stessa conformazione.

E così, riassumendo, sono ben dieci nuovi casi trovati fra le 52 Cactacee esaminate: una percentuale veramente notevole. Se ai nuovi reperti si aggiungono i due che ho già illustrato nei CEPHALOCEREUS, *euphorbioides* e *sco-parius*, e quello sopra citato della Casalaina, si vede chiaramente accennata

la possibilità che il nuovo tipo di cloroplasto da me trovato — e finora accertato in 13 specie — sia piuttosto frequente e destinato ad ulteriori estensioni; conformemente, del resto, al concetto da me esposto nel 1933, che si tratti di *variazioni parallele* dovute ad un cospicuo *adattamento* subito, per ragioni ecologiche e per ragioni interne, da un cloroplasto ordinario.

Biologia generale. — *Ulteriori ricerche sulle compatibilità ed incompatibilità embrionali negli Anfibi studiate col metodo degli espianti*⁽¹⁾ Nota di G. COTRONEI e T. PERRI, presentata⁽²⁾ dal Socio F. SILVESTRI.

Nel 1934⁽³⁾ abbiamo reso note le prime osservazioni che, sviluppando le ricerche finora condotte in questo Istituto da Cotronei e allievi (A. Spirito, G. Guareschi, T. Perri, O. Marcucci, E. Ruzza), analizzavano con una nuova tecnica — quella degli espianti — i problemi della compatibilità ed incompatibilità embrionale negli Anfibi. Queste ricerche con gli espianti mirano a valutare direttamente l'influenza del vitello nei suddetti processi.

Non è il caso di esporre quanto è stato già riferito in numerose pubblicazioni comparse in questo stesso periodico, a cominciare dal 1929. Vogliamo solo ricordare, per necessario collegamento con quanto stiamo per riferire, che già con la tecnica dei trapianti era a noi risultato che abbozzi embrionali (particolarmente studiata la vescicola ottica) di Urodelo, trapiantati su embrioni di *Rana esculenta*, vanno rapidamente distrutti: è questa l'incompatibilità da noi chiamata *embrionale*. È stato già messo bene in risalto (Cotronei e Spirito) che non tutti gli Anuri hanno le stesse proprietà citolitiche verso gli abbozzi di Urodeli. Particolarmente interessanti sono a questo riguardo gli embrioni di *Hyla arborea*, poichè permettono lo sviluppo ed il differenziamento di abbozzi embrionali di Urodeli su essi trapiantati.

Ricerche in corso (di Cotronei e Spirito) vanno ulteriormente studiando peculiari caratteri che si presentano sul trapianto di Urodelo (es. *Triton*) su *Hyla arborea*.

Oltre all'incompatibilità embrionale ne abbiamo definita un'altra: l'incompatibilità *larvale*. Essa si verifica nei trapianti di embrioni di Anuro su embrioni di Urodeli (es. *Rana esculenta* su *Triton taeniatatus*). Gli abbozzi continuano a svilupparsi e differenziarsi, ma quando inizia la vita larvale allora vanno distrutti.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia ed Embriologia comparate della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 5 giugno 1936.

(3) COTRONEI e PERRI, questi « Rendiconti », vol. XX, 1934.

La prima incompatibilità — *embrionale* — è stata da Cotronei posta in rapporto col metabolismo vitellino; soprattutto bene accertate sono state le influenze citolizzanti del vitello dell'ospitante.

La seconda incompatibilità — *larvale* — è stata da Cotronei posta in rapporto con le condizioni biochimiche, che (Cotronei 1921-22) caratterizzano lo stadio larvale e coincidono con il termine dell'assorbimento del vitello e con l'inizio dell'assunzione d'alimento esterno ⁽¹⁾.

Le ricerche eseguite nel 1934 con gli espianti di vescicola ottica nella combinazione xenoplastica *Triton taeniatus* su ectoderma ⁽²⁾ di embrione di *Rana esculenta*, operando in modo da comprendervi il vitello in una serie di casi, e in modo da escluderlo in un'altra serie, convalidarono i risultati raggiunti con i trapianti: dimostrandoci direttamente l'influenza distruttrice del vitello di *Rana esculenta* sugli abbozzi di *Triton taeniatus*. Come dicemmo nel titolo della Nota, quelle erano solo prime ricerche. Parlando di vitello intendiamo riferirci a quello della riserva vitellina.

Nel 1935 abbiamo da una parte ripetuto gli espianti nella combinazione xenoplastica *Triton taeniatus* su ectoderma di embrioni di *Rana esculenta* operando in modo da comprendervi il vitello o da escluderlo a seconda dei casi, e d'altra parte abbiamo anche contemporaneamente eseguito, per le necessarie comparazioni anche nelle stesse condizioni di temperatura, espianti di *Triton taeniatus* su *Hyla arborea* con vitello.

Nell'anno in corso, infine, abbiamo eseguito altri espianti di *Triton taeniatus* su *Rana esculenta*, avendo di mira di cogliere le varie fasi del processo distruttivo, come nel nostro Istituto erasi già fatto con la tecnica dei trapianti, i cui risultati sono stati riconfermati.

Abbiamo pure eseguito espianti nella combinazione *Rana esculenta* su ectoderma e vitello di *Triton taeniatus*.

Avendo già eseguito nel 1934 espianti omoplastici di *Triton taeniatus* e avendo i reperti di espianto (eseguiti da Perri nel 1932-1934) di *Rana esculenta*, abbiamo così sperimentato tutte le combinazioni di qualche importanza.

Mentre è già pronto il lavoro in esteso ⁽³⁾ vogliamo qui riassumere brevemente i risultati raggiunti nel 1935 e nel 1936 ⁽⁴⁾.

Gli espianti delle vescicola ottica primaria e primaria-secondaria di *Triton taeniatus* su ectoderma e vitello di embrioni di *Hyla arborea* (eseguiti nel 1935), hanno riconfermato i risultati già conseguiti con i trapianti: la vescicola ottica di *Triton* immersa nel vitello di *Hyla* prosegue benissimo nello svi-

(1) Rimandiamo al lavoro in esteso la discussione sull'argomento anche per quel che riguarda i recenti lavori della Hewitt e di Holtfreter.

(2) Con l'ectoderma va sempre compreso il sottostante mesenchima.

(3) Il lavoro in esteso sarà edito nell'Archivio Zoologico.

(4) Per la tecnica usata rimandiamo alla nostra Nota del 1934 e al lavoro in esteso.

luppo differenziandosi, quindi il vitello di *Hyla* non mostra processi di incompatibilità verso la vescicola ottica di Tritone.

Negli espianti di vescicola ottica primaria e primaria secondaria di *Triton taeniatus* su ectoderma e vitello di embrione di *Rana esculenta* eseguiti nel 1935, abbiamo avuto distruzione dell'abbozzo di *Triton* sempre che questo è venuto a trovarsi immerso nel vitello di *Rana esculenta* riconfermando così i risultati del 1934. Gli espianti di quest'anno ci hanno permesso di mettere in evidenza le varie fasi distruttive che essenzialmente consistono in una graduale disgregazione delle cellule. Siamo inoltre riusciti ad ottenere dei casi dimostranti che il processo distruttivo è molto avanzato dove l'occhio è in mezzo al vitello, mentre l'organo è ancora in buone condizioni nelle parti più distanti. In tal modo abbiamo una verifica diretta di quanto era stato prima esposto sulla facilità della rapida diffusione delle sostanze citolizzanti che si avvera quando il vitello è a contatto con gli abbozzi, onde rapidità nei processi distruttivi.

Gli espianti di vescicola ottica primaria, e in qualche caso primaria-secondaria, di *Triton taeniatus* su ectoderma di *Rana esculenta* (operando in modo da non comprendervi il vitello), eseguiti nel 1935, ci hanno mostrato sviluppo e differenziamento dell'occhio, con risultati ancora più dimostrativi di quelli avuti nel 1934.

Gli espianti di vescicola ottica primaria, di *Rana esculenta* su ectoderma e vitello di *Triton taeniatus*, eseguiti quest'anno, mostrano che l'abbozzo prosegue nel suo sviluppo e differenziamento, in completo accordo con le osservazioni sui trapianti.

È qui utile ricordare che sia negli espianti di vescicola ottica di *Triton taeniatus* su ectoderma e vitello di *Triton taeniatus* (eseguiti nel 1934), sia di *Rana esculenta* su ectoderma e vitello di *Rana esculenta* (o anche nell'operazione si è escluso il vitello) eseguite da Perri nel 1932, abbiamo visto regolare sviluppo e differenziamento dell'occhio.

Questi due gruppi di espianti omoplastici sono utili per la comparazione con gli espianti xenoplastici, soprattutto nei riguardi della tecnica.

Conclusioni. — Le esperienze di espianti da noi eseguite (1934-1936) hanno portato ai seguenti risultati:

1°) La vescicola ottica primaria, e primaria-secondaria, di *Triton taeniatus* espiantata su ectoderma e vitello di embrioni di *Rana esculenta*, va rapidamente distrutta.

2°) La vescicola ottica primaria di *Triton taeniatus* espiantata su ectoderma (in modo da non comprendervi vitello) di embrione di *Rana esculenta* prosegue nello sviluppo differenziandosi.

3°) La vescicola ottica primaria di *Triton taeniatus* espiantata su ectoderma e vitello di embrioni di *Hyla arborea*, prosegue benissimo nello sviluppo e nel differenziamento.

4°) La vescicola ottica primaria di *Rana esculenta* espiantata su ectoderma e vitello di embrione di *Triton taeniatus* prosegue nello sviluppo e differenziamento.

5°) Sviluppo e differenziamento della vescicola ottica si ha pure nell'espianto omoplastico *Triton taeniatus* su ectoderma e vitello di embrioni di *Triton taeniatus*; e (Perri 1932) di *Rana esculenta* su ectoderma e vitello di embrioni di *Rana esculenta*.

Questi risultati confermano ampiamente quanto si è visto in questo stesso Istituto nei trapianti nei riguardi della *incompatibilità embrionale*, aggiungendo una valutazione ancora più diretta dell'importanza del vitello. Infatti il risultato differente che si ottiene nell'espianto di abbozzo di *Triton* su embrione di *Rana esculenta*, a seconda che nell'operazione si fa in modo da comprendervi o da escludervi il vitello di *Rana esculenta*, ribadisce che l'azione citolizzante in detta combinazione, quale si manifesta anche nei trapianti, è certamente in relazione col vitello di *Rana esculenta*. Inoltre il risultato differente, che danno le esperienze comparative a seconda che l'abbozzo di *Triton* si espanti su ectoderma e vitello di *Rana esculenta* o su ectoderma e vitello di *Hyla arborea*, dimostra che la differenza tra questi due Anuri, circa il loro diverso comportamento nei riguardi dell'abbozzo di Urodeli su essi trapiantato, sta nella differenza tra i due rispettivi vitelli e modificazioni metaboliche.

Biologia. — *Ricerche sulla permeabilità delle cellule dei tessuti coltivate «in vitro»*⁽¹⁾. Nota di H. GROSSFELD, presentata⁽²⁾ dal Socio G. LEVI.

I.

NH_3 ; NaOH ; KOH ; NaHCO_3 ,

Le presenti ricerche furono eseguite sovra cellule coltivate *in vitro* in mezzi liquidi; questa tecnica ha il vantaggio di permettersi di far agire le sostanze in esame sovra cellule libere.

Le colture dopo 18-24 ore di incubazione furono trattate con una soluzione di Rosso neutro in liquido di Ringer $1 : 10^3 - \frac{1}{2} : 10^3$.

Pochi minuti dopo che si era prodotta la colorazione vitale nelle cellule della zona di migrazione della coltura, il mezzo liquido fu aspirato e la coltura fu posta in presenza di una soluzione di ammoniaca in liquido di Ringer di Ph 9 — 9,5. Si produceva subito o dopo pochi minuti una

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto Anatomico di Torino.

(2) Nella seduta del 5 giugno 1936.

decolorazione delle cellule; nei macrofagi si aveva spesso il viraggio del colore in giallo al punto neutro. Se colle identiche modalità la coltura viene trattata anzichè con ammoniaca con una soluzione di KOH o di NaOH dello stesso Ph, la cellula si altera ma non si ha decolorazione di sorta. In presenza di una soluzione di NaHCO_3 , si vede una decolorazione incompleta ma progressiva.

Se ne deduce che NH_3 penetra rapidamente nelle cellule, NaHCO_3 molto più lentamente, NaOH e KOH non penetrano affatto.

Ricerche sulla permeabilità col Rosso Neutro quale indicatore furono compiute da Bethe⁽¹⁾ sulle Meduse, da Warburg⁽²⁾ sulle uova di Echinidi, da E. N. Harvey⁽³⁾ sui Parameci.

I miei risultati sovra cellule dei tessuti coltivati *in vitro* concordano pienamente nei riguardi della permeabilità di NH_3 , NaOH e KOH coi risultati degli Autori sovra citati.

II.



Se in colture in mezzo liquido si aspira del tutto il liquido al secondo giorno di coltura e se dopo aver posto la coltura in presenza di un mezzo privo di sali si aggiunge dopo pochi minuti una soluzione di cloruro d'ammonio $n/10$ si osserva un'immagine insolita: 1° le cellule divengono steriche e nel loro interno si vede un vivace movimento browniano; 2° le cellule sono cresciute molto di volume, sono rigonfie ed il protoplasma contiene voluminosi vacuoli. Delle condizioni che determinano la forma sferica della cellula ed il movimento browniano mi occupo estesamente in altra pubblicazione; tali fenomeni dipendono dall'assenza degli ioni ClNa alla superficie esterna delle cellule.

Ne risulta una scarica delle particelle del protoplasma la quale ne determina l'aggregazione. Questi fenomeni (movimento Browniano, diminuzione della viscosità e coagulazione) sono caratteristiche della scarica elettrica e si manifestano costantemente se il ClNa è allontanato dalle cellule. Se dopo che questi fenomeni si sono manifestati si aggiunge al mezzo una soluzione $n/10$ di cloruro d'ammonio oppure se il mezzo privo di ClNa già in precedenza conteneva NH_4Cl appaiono voluminosi vacuoli dipendenti dall'azione del NH_4Cl penetrato nella cellula.

Se invece le cellule coltivate in mezzo liquido sono poste in presenza di una soluzione $n/10$ NH_4Cl in Ringer, non si manifestano alterazioni di

(1) BETHE, « Pflügers Archiv », 127, 219.

(2) O. WARBURG, HOPPE-SEYLER, « Zeitschr. f. physiol. Cli. », 66, 305.

(3) E. NEWTON HARVEY, « J. of exp. Zool. », 10, 507.

sorta nelle cellule e se trattate con Rosso neutro si colorano normalmente. In pochi casi si nota un accenno ad una lieve imbibizione.

Se ne deduce che NH_4Cl in presenza della miscela equilibrata di elettroliti penetra molto lentamente nelle cellule; ma se, tale miscela manca, penetra con grande rapidità e determina un'enorme imbibizione. In modo identico al cloruro di ammonio agisce il fosfato di ammonio.

III.



Cellule dei tessuti coltivati in mezzo liquido in presenza di un mezzo costituito da soluzioni $n/10$ e $n/5$ di urea in acqua distillata manifestano gli stessi fenomeni che abbiamo visto prodursi con intensità quasi eguale, in presenza di NH_3 senza urea.

Se invece si adopera una soluzione di destrosio $n/36-n/18-n/10$ in acqua distillata la velocità con cui quei fenomeni si manifestano decresce ed in misura tanto maggiore quanto più concentrata è la soluzione di destrosio.

La pressione osmotica del mezzo derivante dalle molecole del non elettrolita rallenta la comparsa dei suddetti fenomeni. Però le molecole di destrosio, le quali penetrano lentamente, innalzano la pressione osmotica del liquido ambiente in grado più considerevole delle molecole di urea, le quali penetrano più rapidamente. In assenza di elettroliti le molecole di urea penetrano più rapidamente nelle cellule delle molecole di destrosio.

Biologia generale. — *Studi di Biologia embrionale.* — I. *Il fenomeno dell'anaerobiosi studiato comparativamente nei Petromizonti e negli Anfibi anuri* ⁽¹⁾. Nota di ALDO SPIRITO, presentata ⁽²⁾ dal Socio F. SILVESTRI.

Lo studio del fenomeno dell'anaerobiosi ha appassionato vivamente, specie negli ultimi tempi, i biologi per i risultati di notevole importanza che ne sono scaturiti. Basti ricordare il grande interesse che suscitavano alcuni anni or sono le ricerche di Warburg e della sua scuola sulla glicolisi anaerobia e i rapporti che tali studi, eseguiti anche su uova di echinodermi e di uccelli, hanno con la biologia dei tumori.

Non è il caso, in questa Nota, di riferire la estesa letteratura riguardante questi problemi: mi limito per ora ad esporre brevemente i risultati da me ottenuti nelle indagini eseguite a proposito del fenomeno dell'anaerobiosi durante i primi periodi dello sviluppo embrionale in alcuni Anfibi anuri e nei Petromizonti. Anche per quel che riguarda tale lato particolare del problema generale vi sono vari lavori in letteratura (confrontare per esempio quelli di Samassa, Schultz, Godlewski, Bataillon, Parnas e Krasinska, Loeb, Amberson, Fauret-Fremiet, Lernnerstrand, Brachet, ecc.) sì che noi oggi abbiamo in proposito parecchi dati che saranno da me riferiti nel lavoro in esteso in preparazione. Mi sia permesso tuttavia far notare che tali dati, pur ottenuti da studiosi di embriologia, hanno per lo più apportato a conclusioni ben lontane da quelle che si sarebbero potute attendere se le indagini fossero state condotte da un punto di vista comparativo. Infatti è chiaro che la comparazione di diversi comportamenti, osservabili in diverse specie animali di fronte ad uno stesso trattamento, potrà aprire nuove vie di studio, in quanto che servirà a farci sceverare, tra le varie proprietà intrinseche degli esemplari sperimentati, quelle che possano essere la causa dei diversi comportamenti osservati.

Nei riguardi del problema dell'anaerobiosi embrionale, a sua volta strettamente correlato a quelli più vasti delle ossidazioni intraorganiche, alcuni dati della letteratura ci fanno intravedere queste differenze che si verificano tra specie diverse. Purtroppo esse sfuggono però alla possibilità di una vera comparazione, che, per effettuarsi, deve poter usufruire di risultati ottenuti attraverso le indagini più rigorose, nelle quali ogni volta e per ogni specie

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia e Embriologia comparate della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 5 giugno 1936.

adoperata siano riprodotte tutte quelle condizioni sperimentali, al di là delle quali possa scaturire il dato intrinseco differenziale.

Ed è stato appunto per quest'insieme di considerazioni che ho voluto impostare un piano di ricerche sul fenomeno dell'anaerobiosi embrionale, studiato comparativamente in parecchie specie animali. Ma queste nuove esperienze, a loro volta, si debbono pure intendere correlate ad altre da me fatte precedentemente e riguardanti il comportamento di un fermento respiratorio (perossidasi) durante la vita embrionale e studiato anch'esso da un punto di vista morfologico e comparativo in alcuni Ciclostomi, Pesci, Anfibi, Uccelli ⁽¹⁾. Già allora prospettavo la necessità di ampliare le ricerche nelle stesse specie con lo studio di altre proprietà intrinseche rilevabili durante lo sviluppo, sì che per prima cosa ho voluto iniziare queste nuove esperienze sul fenomeno dell'anaerobiosi. Ma contemporaneamente a queste ricerche sulla privazione di ossigeno ne sono state eseguite altre con le quali si è voluto studiare l'azione del KCN nello sviluppo embrionale. È chiaro che i due metodi si integrano a vicenda per la comprensione dei risultati che possono scaturirne: nel primo caso abbiamo infatti l'assenza di ossigeno, mentre nel secondo, pur nella presenza di quest'ultimo, si ha l'azione del KCN che impedisce, o per lo meno rende irrilevante, la sua utilizzazione.

Come materiale di studio ho per ora adoperato vari stadi embrionali di *Petromyzon fluviatilis* fra i Ciclostomi, e di *Rana esculenta*, *Rana agilis*, *Hyla arborea*, *Bufo viridis*, *Bufo vulgaris*, *Discoglossus pictus* tra gli Anfibi anuri.

Come metodo di indagine mi sono valso di quelli già da tempo in uso in questo genere di ricerche, secondo modalità che saranno precisate nel lavoro in esteso. Con queste esperienze si è voluto pertanto indagare nelle forme suddette il comportamento di alcuni stadi embrionali sottoposti alla privazione di ossigeno. Riferisco brevemente i risultati ottenuti.

Per quel che riguarda gli Anfibi anuri da me adoperati dirò subito che sottoponendo alla privazione di ossigeno stadi in cui si ha il primo accenno della formazione della piastra neurale (si era visto da altri AA., Samassa, Godlewski, Bataillon, Parnas Krasinska, Brachet, che in alcuni Anfibi anuri la segmentazione dell'uovo era possibile in ambiente privo di ossigeno) si ha immediatamente un arresto nello sviluppo (rilevabile all'esame eseguito al microscopio binoculare) in *Hyla arborea*, *Rana agilis*, *Rana esculenta* e la giovane neurula va in necrosi tra le 30 e le 50 ore di esperimento, quando cioè i controlli normali hanno raggiunto lo stadio di bottone codale e lo hanno anche oltrepassato.

In *Bufo viridis* invece, prima dell'inizio dei processi di necrosi, si ha un certo avanzamento, talchè, partendo dallo stesso stadio predetto, si può

(1) « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », 9, 1934; « Arch. Scienze Biol. », 20, 1934; « Mon. Zool. Ital. », 45, Suppl., 1934; « Arch. Zool. Ital. », 22, 1935; « Riv. Biol. », 19, 1935.

giungere quasi ad avere la chiusura delle pieghe neurali, ed ancor di più si è ottenuto in *Bufo vulgaris* dove, prima della necrosi che può venire anche dopo 60 ore di privazione di ossigeno, si ha la chiusura e la saldatura delle pieghe neurali, con un discreto allungamento dell'embrione, mentre i controlli normali presentano l'accento del bottone codale. Con il *Discoglossus* poi si ha il massimo dei risultati, poichè, prima della necrosi che avviene dopo circa 60 ore di esperimento, si raggiungono stadi in cui gli embrioni si contraggono spontaneamente e presentano un primo accenno di formazione della pinna codale, in confronto ai controlli normali natanti con circolazione sanguigna già bene sviluppata.

Di fronte a questi risultati, che ci fanno distinguere gli Anfibi anuri predetti in due diversi gruppi, si pongono quelli ottenuti in *Petromyzon fluviatilis*. Le prime esperienze su tale materiale furono iniziate usando stadi paragonabili a quelli adoperati per gli Anfibi e cioè stadi in cui si ha il primo accenno di piastra neurale. Si notò in tale caso un arresto immediato nello sviluppo e un inizio nei processi di necrosi dopo circa 24 ore. Per tale risultato si paragonarono dapprima questi stadi di *Petromyzon fluviatilis* a quelli di *Rana esculenta*, *Rana agilis*, *Hyla arborea*, ma contemporaneamente si fecero altre ricerche con stadi più precoci (uova in segmentazione) per i quali in *Rana esculenta* si era vista la possibilità di un certo sviluppo nelle condizioni sperimentali di privazione di ossigeno. Per *Petromyzon fluviatilis* invece i miei risultati hanno dimostrato, anche per questi stadi precoci, un rapido arresto di sviluppo e inizio di processi necrotici in circa 24 ore, sì che tale specie si differenzia rispetto alla privazione di ossigeno anche da *Rana esculenta*, *Rana agilis* e *Hyla arborea*.

Contemporaneamente a queste ricerche sul fenomeno dell'anaerobiosi e come necessaria estensione per ottenere altri risultati da potersi correlare con quelli riferiti più sopra, sono state eseguite altre esperienze sottoponendo alcuni stadi embrionali delle specie predette all'azione di soluzioni 1/1000 m. di KCN, che, come si sa, inibisce i processi di ossidazione.

Tali indagini sperimentali sono state eseguite anche da altri AA. (Bataillon, Bellamy, Blumenthal, Runnström, Brachet, Zawadkowski ecc.), sugli Anfibi e su altro materiale, ma di ciò tratterò nel lavoro in esteso, dove pure cercherò di spiegare le ragioni delle divergenze che si possono rilevare tra alcuni loro risultati ed i miei. Dirò intanto che proprio come si era potuto stabilire nei riguardi del fenomeno dell'anaerobiosi, così anche rispetto al trattamento con KCN, inibitore delle ossidazioni, si possono dividere le specie sperimentate in tre gruppi per i diversi risultati che sono stati ottenuti.

Ma su tale divisione occorre fermare l'attenzione perchè apparentemente, a prescindere da piccole variazioni di massima e minima resistenza, si ha per le varie specie di Anfibi anuri usate un comportamento pressochè uguale nei riguardi dello stadio a cui possono giungere gli embrioni sottoposti al-

l'azione del KCN. Riferirò per esempio che giovani neurule di *Hyla arborea*, *Rana esculenta*, *Rana agilis*, *Bufo viridis*, *Bufo vulgaris*, *Discoglossus pictus* possono tutte raggiungere in parecchi giorni (7-9), pur attraverso uno sviluppo molto rallentato rispetto ai controlli normali, stadi un po' più avanzati di quelli caratterizzati dalla presenza del bottone codale, per arrestarsi e poi disfarsi se lasciati nelle soluzioni. Ma se si studia il comportamento degli esemplari delle varie specie a brevi intervalli si può notare che fin dall'inizio del trattamento con KCN le giovani neurule di *Rana esculenta*, *Rana agilis* e *Hyla arborea* (gli stessi stadi si arrestano subito in ambiente privo di ossigeno) subiscono un notevolissimo ritardo nello sviluppo rispetto ai controlli normali; mentre invece per quel che riguarda *Bufo viridis*, *Bufo vulgaris*, *Discoglossus pictus* (gli stessi stadi riescono a svilupparsi un po' in anaerobiosi) per molte ore (24-48) dopo l'inizio dell'esperimento lo sviluppo degli esemplari trattati con KCN è sincrono o pressochè sincrono rispetto agli esemplari normali di controllo. Soltanto più tardi, in questi casi, esso rallenta rispetto a quello di questi ultimi, per poi arrestarsi come ho detto più sopra.

Se ora consideriamo gli stessi stadi di *Petromyzon fluviatilis* nei riguardi del loro comportamento rispetto all'azione del KCN vediamo che si ottengono risultati diversi da quelli descritti per gli altri due gruppi precedenti. Infatti giovani neurule di *Petromyzon fluviatilis* (in ambiente privo di ossigeno si arrestano immediatamente anche se si inizia l'esperienza con stadi di segmentazione) poste in soluzione 1/1000 m. si arrestano immediatamente nel loro sviluppo e dopo un certo numero di giorni vanno in necrosi. Se si parte da stadi più precoci (uova in segmentazione) si riesce ad avere un certo avanzamento fino allo stato di blastula, stadio che però non viene oltrepassato.

In questa Nota preliminare ho voluto esporre semplicemente i primi risultati accertati in questo campo di ricerche: i particolari di essi e delle esperienze con le quali sono stati ottenuti si troveranno nel lavoro in esteso in preparazione, insieme alle prime considerazioni che su di essi ho creduto di poter fare.

A conclusione di questa Nota desidero mettere in risalto che l'indagine comparativa sperimentale ha così messo in luce delle profonde differenze nei riguardi del comportamento di alcuni stadi embrionali di Anfibî anuri e di Petromizonti. Ciò prospetta tutto un campo di indagini per le ulteriori ricerche causali di tali fenomeni.

NOTA AGGIUNTA.

Dopo la presentazione di questa Nota ho avuto la possibilità di sperimentare anche con uova di Urodeli (*Axolotl*). Le esperienze di anaerobiosi hanno chiaramente dimostrato, anche per questi esemplari, un arresto nello

sviluppo quando si sottopongono a privazione di ossigeno le giovani neurule. Trattando queste ultime con soluzioni 1/1000 m. di KCN si ha immediatamente un forte rallentamento nello sviluppo rispetto a quello dei controlli normali.

Queste ricerche su esemplari di *Axolotl*, eseguite nelle identiche condizioni sperimentali osservate in quelle fatte precedentemente sugli Anuri e sui Petromizonti, ci portano a mettere quest'Urodelo insieme a *Rana esculenta*, *Rana agilis*, *Hyla arborea* per quel che riguarda il loro comportamento di fronte alla privazione di ossigeno e all'azione del KCN.

Biologia. — *Scarica del protoplasma per sottrazione degli elettroliti dal mezzo ambiente in cellule di tessuti coltivate « in vitro »*. Nota di H. GROSSFELD, presentata dal Socio G. LEVI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Ricerche sulla permeabilità della membrana vitellina del tuorlo dell'uovo di gallina di fronte ad alcuni ferrocianuri*. Nota di A. ORRÙ, presentata dal Corresp. S. VISCO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Sulla velocità di accrescimento dell'uovo di gallina*. Nota di A. ORRÙ, presentata dal Corresp. S. VISCO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Relazioni tra temperatura ed attività del fermento glicogenolitico del fegato degli animali pecilotermi*. Nota di E. TRIA, presentata dal Corresp. S. VISCO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio BIANCHI presenta in omaggio un gruppo di pubblicazioni del R. Osservatorio di Brera e ne parla.

Il Socio ARMELLINI presenta il terzo volume del suo « Trattato di Astronomia siderale » e ne espone il contenuto.

Il Socio VALLAURI presenta in omaggio un gruppo di pubblicazioni dell'Istituto Elettrotecnico Nazionale « G. Ferraris », inaugurato lo scorso anno, e del R. Istituto Elettrotecnico e delle Comunicazioni della Marina, e ne parla ampiamente.

Coglie anche l'occasione per invitare i Colleghi, che abbiano occasione di passare per Torino, a visitare l'Istituto elettrotecnico da lui diretto.

Il Presidente MILLOSEVICH, anche a nome dei Colleghi, ringrazia il Socio VALLAURI del dono delle pubblicazioni e del cortese invito.

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta le opere giunte in dono segnalando i « Nuovi contributi alla conoscenza della Fauna delle isole italiane dell'Egeo » di G. Iannone; le « Leçons d'Algèbre ed de Géométrie » di R. Garnier, il « Recueil de quelques travaux d'Anatomie végétale exécutés a Liège de 1929 à 1935 »; il « Trattato di Bromatologia » di E. Sernaggiotto; le « Katalytische Wirkungen der Metallkomplexverbindungen » di Keita Shibata e Yuji Shibata.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci ARMELLINI, BARGELLINI, BLANC, BOMPIANI, BORDONI, FANO, GIORGI, LEVI GIUSEPPE, LEVI-CIVITA, LONGO, MAJORANA, MILLOSEVICH, SCORZA, SEVERI, SOLER, STELLA.

Il Corrisp. SCORZA in relazione a una sua recente Nota fa delle osservazioni critiche intorno a lavori del prof. Andreoli richiamando su alcune errate affermazioni ivi contenute l'attenzione degli studiosi.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Socio MAJORANA, al fine di rendere più proficua la discussione delle relazioni su temi dati, nelle sedute del prossimo anno accademico, propone che il relatore mandi una copia della sua relazione almeno un mese prima della discussione, in modo che essa possa essere distribuita ai Colleghi.

La proposta viene approvata.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 5 giugno 1936

- ARMELLINI GIUSEPPE. — Trattato di astronomia siderale. Vol. III. Le nebulose. Bologna, Editore Nicola Zanichelli, 1936. 8°, pp. I-VIII, 1-351.
- BOK BART J. — Galactic dynamics and the cosmic time-scale. (From the « Observatory ». Vol. LIX, n. 742, pp. 76-85). s. l. 1936. 8°.
- CECCHINI G. — Studio del macromicrometro Mioni della R. Specola di Merate. (Estr. dalle « Memorie della Società Astronomica Italiana ». Vol. VIII). Pavia, 1934. 8°. pp. 1-21.
- CECCHINI G. e GRATTON L. — Studio preliminare dello spettro della *nova Her- culis* 1934. (Estr. dalle « Memorie della Società Astronomica Italiana ». Vol. IX). Pavia, 1935. 8°, pp. 1-37.
- DE CARA E. — Il problema della correzione di un orbita mediante una compensazione di osservazioni distribuite sopra un breve arco eliocentrico applicazione all'orbita del pianeta 1933 QM = (1928) Santa. (Estr. dalle « Memorie della Società Astronomica Italiana ». Vol. VIII). Pavia, 1935. 8°, pp. 1-19.
- FENNER CLARENCE N. — Bore-hole investigations in Yellowstone Park. (Reprinted from the « Journal of Geology ». Vol. XLIV, pp. 225-315). Washington, 1936. 8°.
- GARNIER RENÉ. — Leçons d'algèbre et de géométrie. Tome II. Coniques et quadratiques. Paris, Editeur Gauthier-Villars, 1936. 8°, pp. 1-241.
- GORDON ISABELLA. — On new or imperfectly known species of crustacea Macrura. (Reprinted from the « Linnean Society's Journal-Zoology ». Volume XXXIX, pp. 339-351). Bermuda, 1935. 8°.
- GRATTON LIVIO. — La fisica delle stelle. (Estr. dalla Rivista « Coelum ». Volume II-V). Bologna, 1935. 8°, pp. 1-100.
- GRATTON LIVIO. — Vedi CECCHINI G.
- JANNONE GIUSEPPE. — Nuovi contributi alla conoscenza della fauna delle Isole italiane dell'Egeo. V. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ». Vol. XXIX, pp. 47-248). Portici, 1936. 8°.
- LANDAU EDMUND. — Ueber mehrfach monotone Folgen (Osobne oddicie z « Prac Matematyczno-Fizycznych ». T. XLIV, pp. 337-351). Warszawa, 1936. 8°.
- MORIYA TOMIJIRO. — Calculation charts of induced velocity and calculation method of aerodynamic characteristics of propellers. (Extr. from the « Journal of the Society of Aeronautical Science of Nippon ». Vol. III, n. 9, pp. 11-34). Tokyo, 1936. 8°.
- RUSSO ACHILLE. — Relazione del Presidente nell'inaugurazione solenne dell'anno Accademico 1935-36 (28 ottobre 1935-XIV) dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali. (Estr. dal « Bollettino delle sedute della Accad. Gioenia di Scienze Naturali ». Serie III, fasc. 1). Catania, 1936. 8°, pp. 1-5.
- SERNAGIOTTO DI CASAVECCHIA EMILIO. — La bromatologia. Biochimica, fisiologia, chimica ed industria dell'alimentazione. Torino, Casa Editrice Rosenberg et Sellier, 1936. 8°, pp. 1-XXIX, 1-957.
- SHIBATA KEITA u. SHIBATA YUJI. — Katalytische Wirkungen der Metallkomplexverbindungen. Tokyo, 1936. 8°, pp. I-VIII, 1-219.
- SHIBATA YUJI. — Vedi SHIBATA KEITA.
- VOLTA A. — Commemorazione di G. Schiaparelli, tenuta al Rotary Club di Cuneo (ottobre 1935). Cuneo, 1935. 8°, pp. 1-29.
- WATSON FLETCHER. — The detonating Fireball of may 26, 1935. (Reprinted from « Popular Astronomy ». Vol. XLIV). s. l. 1936. 8°, pp. 1-3.

N. P.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 21 giugno 1936 (anno XIV)

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Algebra. — *Nuovi contributi alla teoria generale delle algebre.* Nota ⁽¹⁾ del Corresp. G. SCORZA.

Uno dei teoremi più importanti per le algebre prive di elementi eccezionali è, senza alcun dubbio, quello che lo Wedderburn dimostrò nel 1908, estendendo ad algebre definite in un corpo qualsiasi una proposizione rilevata già dal Cartan per le algebre definite nel corpo reale. E cioè il teorema per il quale si afferma che un'algebra semplice con modulo può sempre considerarsi come il prodotto diretto di un'algebra primitiva per un'algebra regolare aventi lo stesso suo modulo ⁽²⁾.

Allorchè nel 1917, mostrando come un famoso teorema del Frobenius sulle algebre primitive nel corpo reale permettesse di caratterizzare nettamente i corpi di funzioni abeliane non singolari a moltiplicazione complessa ⁽³⁾, ebbi occasione di riconoscere gli intimi legami intercedenti fra la teoria delle matrici riemanniane e quella delle algebre, non mancai di sfruttare largamente le proprietà di quest'ultime per approfondire lo studio di quelle matrici. Ma, com'è naturale, di codesto riconoscimento poteva esser fatto un doppio uso: e così, mentre in un primo tempo mi avvalsi delle algebre per proseguire le ricerche sulle matrici riemanniane, in un secondo

(1) Presentata nella seduta del 5 giugno 1936.

(2) J. H. MACLAGAN WEDDERBURN, *On hypercomplex numbers*. «Proceedings of the London Mathematical Society», ser. 2, to. 6, 1908, p. 95 e sg.

(3) G. SCORZA, *Le algebre di ordine qualunque e le matrici di Riemann*. «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», to. XLV, 1921.

tempo furono le proprietà di queste a suggerirmi notevoli approfondimenti della teoria delle algebre.

In particolare, l'aver rilevato che l'algebra razionale legata ad una matrice riemanniana impura priva di assi isolati era semplice e che le due algebre, primitiva l'una, regolare l'altra, nel cui prodotto diretto essa, in conformità del teorema dello Wedderburn, si decomponeva, pur potendosi scegliere in infiniti modi diversi, erano individuate di fronte alla relazione di equivalenza mi fece presumere che tale proprietà dovesse esser vera per ogni algebra semplice.

Ebbene che le cose stessero realmente così potei appunto mostrare in un volume pubblicato nel 1921, e la dimostrazione che ivi ne detti, ispirata da considerazioni di geometria iperspaziale, non solo mi condusse a stabilire che le due algebre, primitiva l'una e regolare l'altra, nel cui prodotto diretto si spezza un'algebra semplice, sono individuate di fronte alla relazione di equivalenza, ma anche a stabilire la nozione di segnatura per un automodulo od una qualsiasi algebra non pseudonulla ed a rilevare che condizione necessaria e sufficiente perchè due automoduli di un'algebra semi-semplice siano equivalenti è che essi abbiano la medesima segnatura⁽¹⁾.

Le quali ultime proprietà non furono altro che il riflesso nella teoria delle algebre dei teoremi che in precedenza avevo dimostrato a proposito dei gruppi fondamentali di assi puri di una matrice riemanniana impura.

Nel 1927 lo Artin non solo riuscì a render più espressivo il complemento da me apportato al teorema dello Wedderburn, ma ne rilevò pure la validità per una classe di algebre anche più ampie di quelle semplici; e cioè per la classe delle algebre che, sul suo esempio, gli autori tedeschi dicono primarie⁽²⁾.

Precisamente, egli dimostrò che un'algebra primaria è decomponibile nel prodotto diretto di un'algebra completamente primaria ed un'algebra regolare aventi lo stesso suo modulo e che, allorchando di codeste decomposizioni ne sia nota una, tutte le altre non sono che le trasformate di quella mediante gli automorfismi interni delle algebre.

La dimostrazione dello Artin, assai semplice ed elegante, è ispirata a principi del tutto diversi da quelli ai quali io mi attenni nel 1921; cosicchè recentemente, avendo avuto occasione di riguardarla, ho voluto riprendere le mie considerazioni per vedere quant'altro avrei potuto cavarne ponendole a raffronto col teorema dello Artin.

Sono stato condotto così ad una ricerca i cui dettagli saranno pubblicati altrove e della quale non credo inutile riassumere qui i risultati essenziali.

(1) G. SCORZA, *Corpi numerici e algebre*. Messina, Principato, 1921, p. 342 e sgg.

(2) E. ARTIN, *Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen*. « Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität », Bd. V, 1927.

1. Sia A un'algebra non pseudonulla e si indichi con E lo zero o la sua sotto-algebra eccezionale, secondo che A è priva, o dotata, di elementi eccezionali.

Allora l'algebra $A - E$ ($= A$, se $E = 0$) è notoriamente semi-semplICE e dotata di modulo, e quindi o è addirittura semplice o è somma diretta di algebre semplici.

Poniamo

$$(1) \quad A - E = (A - E)^{(1)} + \dots + (A - E)^{(m)},$$

con l'intesa che le $(A - E)^{(i)}$ siano algebre semplici e che, se $A - E$ è semplice, $(A - E)^{(1)}$ stia per $A - E$.

Ciò posto, sia v un qualsiasi automodulo di A e sia

$$(2) \quad v = v_1 + v_2 + \dots + v_i$$

con v_1, \dots, v_i automoduli primitivi, a due a due mutuamente nullifici (se $i > 1$). Di codeste eguaglianze, com'è noto, ne esiste certo una, ma ne possono esistere più di una e il loro insieme può essere finito od infinito.

Indicata con $[x]$ la classe di A mod E individuata da un elemento che sia stato denotato con x , sarà

$$(3) \quad [v] = [v_1] + \dots + [v_i],$$

$[v], [v_1], \dots, [v_i]$ saranno altrettanti automoduli di $A - E$ e $[v_1], \dots, [v_i]$ saranno primitivi.

Poichè ogni automodulo primitivo di $A - E$ non può essere che un automodulo primitivo di una (ed una sola) delle algebre semplici nella cui somma diretta si spezza $A - E$, detto $q_i (\geq 0)$ il numero di quelli fra gli automoduli $[v_1], \dots, [v_i]$ che capitano nell'algebra $(A - E)^{(i)}$, l' m -complesso di interi

$$(q_1, q_2, \dots, q_m)$$

— dove evidentemente si ha $q_1 + q_2 + \dots + q_m = i$ — è un *carattere* di v in A , nel senso che esso dipende esclusivamente da v ed A , e non dalla particolare eguaglianza (2) da cui siamo partiti.

Codesto m -complesso è ciò che io ho chiamato *segnatura* di v in A , o, senz'altro, *segnatura* di v .

Evidentemente la *segnatura* di v in A è, nel tempo stesso, quella di $[v]$ in $A - E$; quindi, in particolare, le *signature* degli automoduli principali di A — coincidenti tutti col modulo, se A ne è dotata, — eguagliando tutte quella del modulo di $A - E$, sono eguali fra di loro.

Ebbene la *segnatura* di A (o di $A - E$) è quella di un suo qualsiasi automodulo principale.

Posto che la segnatura di A sia

$$(4) \quad (p_1, p_2, \dots, p_m),$$

gli interi p_1, \dots, p_m sono tutti > 0 e qualunque sia l'automodulo v per la sua segnatura (q_1, q_2, \dots, q_m) si ha

$$q_1 \leq p_1, q_2 \leq p_2, \dots, q_m \leq p_m,$$

qui valendo sempre i segni inferiori, quando, e solo quando, l'automodulo v sia principale.

Inoltre, se A è dotata di modulo, in corrispondenza a ciascuna decomposizione di questo in una somma di

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m$$

automoduli primitivi a due a due mutuamente nullifici si ha per A un'egualianza del tipo

$$(5) \quad A = B_1 \times C_1 + B_2 \times C_2 + \dots + B_m \times C_m + N,$$

dove le B_1, \dots, B_m sono algebre a modulo primitivo, le C_1, \dots, C_m sono algebre regolari degli ordini rispettivi $p_1^2, p_2^2, \dots, p_m^2$, N è un sistema che o è zero o è contenuto in E, le algebre B_i, C_i (per $i = 1, \dots, m$) hanno lo stesso modulo, e quello di A è la somma dei moduli delle coppie (B_i, C_i) .

2. Ricordato tutto ciò, la ricerca cui più sopra è stato alluso si riassume nei seguenti teoremi:

I. Se la segnatura del modulo v di A è

$$(q_1, q_2, \dots, q_m)$$

e fra gli interi q_i quelli diversi da zero sono $q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_h}$, la segnatura dell'algebra vAv è

$$(q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_h}).$$

II. Dire che l'algebra A è primaria è quanto dire che essa è dotata di modulo e che nella sua segnatura (4) è $m = 1$.

III. Dire che l'algebra A è completamente primaria è quanto dire che è dotata di modulo e che nella sua segnatura è $m = 1$ e $p = 1$.

IV. Se A è dotata di modulo, due suoi automoduli sono equivalenti, cioè deducibili l'uno dall'altro mediante un automorfismo interno dell'algebra, quando, e solo quando, hanno la stessa segnatura.

V. Se A è dotata di modulo, le sue decomposizioni in una somma del tipo (5) possono esser tutte dedotte da una di esse, applicando a questa le operazioni del gruppo automorfo interno dell'algebra.

Con questi due ultimi enunciati viene conseguita l'estensione più ampia possibile dei teoremi precedentemente dimostrati da me e dallo Artin ⁽¹⁾.

(1) Colgo l'occasione per far rilevare che con quanto scrive a pie' delle pp. 281-282 di questo volume dei « Rendiconti » il sig. Andreoli cerca di liberarsi troppo a buon mercato degli appunti che io avevo rivolto precedentemente ad un suo lavoro.

Il mio primo appunto consisteva nell'osservare che il sig. Andreoli, cinque righe dopo aver fatta un'affermazione equivalente all'altra — se X_1 appartiene alla varietà di Volterra $V(X)$ individuata da X , tutta la $V(X_1)$ sta in $V(X)$; — asseriva che « se X_1 è contenuta in $V(X)$, allora $V(X_1)$ avrà certamente una parte comune con $V(X)$ ».

Il sig. Andreoli replica che egli dovrebbe « essere al più accusato di pleonasmo »; la seconda affermazione non è in contrasto con la prima; essa è « semplicemente superflua ». Ma nel replicare a questo modo egli... dimentica che perchè quanto dice a p. 4 della sua « Memoria » non sia destituito di ogni valore bisogna supporre che, quando X_1 appartiene a $V(X)$, $V(X_1)$ possa non appartenere a $V(X)$.

In secondo luogo io osservavo che ben lungi dall'essere ovvio, era falso che « dato un elemento X ovviamente da esso resta definito uno spazio fondamentale $\Phi(X)$ ». Il sig. Andreoli risponde con degnazione « rispetto al secondo appunto si completi pure con un « generico » e tutto ritorna a posto ». Per esser precisi non torna a posto proprio tutto: l'« ovviamente » resta campato in aria; che un elemento « generico » individui uno spazio fondamentale è vero, ma si tratta di un teorema, non di cosa « ovvia ».

« Rispetto al terzo » appunto il sig. Andreoli dice: « sono d'accordo che matrici rispondenti a punti di spazi fondamentali diversi non debbano di necessità essere permutabili fra loro, e con ciò? ». Provi il sig. Andreoli ad indicare quale sia, secondo la sua definizione, la varietà di Volterra definita dalla matrice

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{vmatrix}$$

e vedrà subito quale sia la portata della mia obbiezione.

« Infine, per l'ultimo appunto — prosegue il sig. Andreoli — si tratta di chiarire e di voler intendere il senso delle due parole « in quanto » ».

Qui, poichè sembra che col « voler intendere » si voglia fare un'insinuazione è bene riprodurre il passo da me criticato, la mia critica e la risposta del sig. Andreoli. E il lettore riconoscerà che ogni commento guasterebbe.

Scriveva il sig. Andreoli:

« Con esempio ancora più perspicuo, che conduce direttamente a varietà di Volterra, si possono considerare le matrici

$$X = \begin{vmatrix} x_{11} & 0 & \dots & 0 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

Orbene, tali matrici, costituiscono appunto una varietà di Volterra, in quanto due di esse, permutabili ad una terza, sono permutabili fra loro: purchè gli elementi diagonali non siano nulli ».

Io facevo osservare:

« Poichè fra quelle matrici vi è là matrice identica, se fosse esatta l'affermazione dell'autore bisognerebbe che » fra di esse « le matrici — sia pure con gli elementi diago-

nali tutti diversi da zero — fossero permutabili a due a due. E ciò è falso». Inoltre facevo rilevare che l'affermazione era quasi esatta per $n = 2$, ma che anche in tal caso perchè potesse essere accettata senza obiezioni avrebbe dovuto essere enunciata con clausola diversa da quella più sopra indicata, come nel testo originale, in corsivo.

Or ecco come replica il sig. Andreoli:

« Infine per l'ultimo appunto si tratta di chiarire e di voler intendere il senso delle due parole "in quanto". Ho detto: "... in quanto due di esse permutabili ad una terza sono permutabili fra loro ...". Invece di "sono" dovrebbe dirsi "siano".

« Che tutto ciò vada interpretato come dico, basta a farlo vedere il procedimento che ho seguito, e tutte le precedenti Note ».

E qui il sig. Andreoli, facendo il caso $n = 3$, dice che nello spazio a sei dimensioni delle matrici

$$\begin{vmatrix} a & o & o \\ d & b & o \\ f & e & c \end{vmatrix}$$

vi sono da considerare quelli a tre dimensioni delle matrici

$$\begin{vmatrix} x_1 & o & o \\ o & x_2 & o \\ o & o & x_3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_1 & o & o \\ x_4 & x_1 & o \\ o & o & x_3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_1 & o & o \\ o & x_2 & o \\ o & x_5 & x_2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_1 & o & o \\ o & x_2 & o \\ x_6 & o & x_1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_1 & o & o \\ x_4 & x_1 & o \\ x_6 & x_4 & x_1 \end{vmatrix}$$

e fa osservare che questi a due a due hanno degli elementi comuni.

Cosicchè basta leggere «siano» invece di «sòno» nel passo sopra riportato perchè esso, per $n = 3$, significhi quello che ora ci dice il sig. Andreoli.

Matematica (Geometria algebrica). — *La teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche*. Nota II ⁽¹⁾ del Socio F. SEVERI.

7. Parliamo ora delle corrispondenze a valenza $\gamma \neq 0$ su M_r . Se γ è un intero, positivo o negativo, si dice che T è a valenza γ quando la corrispondenza (effettiva o virtuale) $T + \gamma\Omega$ è a valenza zero. Si prova agevolmente che:

I. La inversa T^{-1} di T ha la stessa valenza γ .

II. Sopra ogni varietà esistono corrispondenze a valenza intera arbitraria (positiva, negativa o nulla).

III. La somma di due corrispondenze a valenze γ_1, γ_2 ha la valenza $\gamma_1 + \gamma_2$ ed il prodotto ha la valenza $-\gamma_1 \gamma_2$.

IV. La valenza di una T a valenza γ è individuata, salvo il caso in cui i punti di M_r formino una serie di pseudoequivalenza.

8. Siano S_1, S_2, \dots, S_{r-1} le corrispondenze degeneri delle specie $r+1, r+2, \dots, 2r-2$ associate alla corrispondenza a valenza zero $T + \gamma\Omega$. Allora per la (1) viene (con evidente significato delle notazioni)

$$(4) \quad T + \gamma\Omega \equiv X \times M' + X' \times M + S_1 + S_2 + \dots + S_{r-1},$$

donde:

$$(5) \quad (T, \Omega) \equiv X + X' + (S_1, \Omega) + \dots + (S_{r-1}, \Omega) - \gamma(\Omega, \Omega).$$

I numeri $[S_1, \Omega] - \gamma, \dots, [S_{r-1}, \Omega] - \gamma$ diconsi i ranghi di specie $1, 2, \dots, r-1$ della corrispondenza, a valenza γ , T .

9. Per dedurre dalla (5) il principio funzionale-numerativo di corrispondenza, occorre conoscere funzionalmente il gruppo (Ω, Ω) . All'uopo bisogna in primo luogo estendere alle varietà la nozione di serie di Severi. Si ha in proposito il teorema, che definisce questa serie in modo ricorrente ⁽²⁾:

Sia, sopra una M_r , un fascio lineare $|A|$ di varietà ad $r-1$ dimensioni e sia $S(A)$ la serie di Severi relativa ad una varietà A ed $S(A, A)$ la

(1) Presentata nella seduta del 5 giugno 1936.

(2) Per $r=3$ ved. B. SEGRE, «Memorie della R. Accademia d'Italia», to. 5, 1934, p. 507. Per r qualunque occorre seguir passo passo il procedimento originale di C. SEGRE («Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. XXXI, 1896), tenendo conto non del solo aspetto numerativo, ma anche del valore funzionale delle deduzioni.

stessa serie relativa alla varietà base (A, A) del fascio. Allora la serie d'equivalenza:

$$|J - S(A, A) - 2S(A)|,$$

ove J è il gruppo-jacobiano del fascio, è indipendente da questo.

La serie d'equivalenza $S(M)$, così definita, estende appunto ad M_r la nozione di serie di Severi.

Siccome poi vale l'equivalenza ⁽¹⁾:

$$(\Omega, \Omega) \equiv (-1)^r S(M),$$

si conclude col seguente principio funzionale-numerativo di corrispondenza per le corrispondenze a valenza γ :

Il gruppo virtuale (T, Ω) delle coincidenze d'una corrispondenza ∞^r , T , a valenza γ , fra i punti d'una M_r , è equivalente alla somma dei gruppi corrispondenti ad un punto x di M_r nella T e nella T^{-1} , aumentata dei gruppi associati alla corrispondenza $T + \gamma\Omega$, del punto x contato 2γ volte e del multiplo secondo γ d'un gruppo della serie di Severi, preso col $-$ o col $+$, secondo che r è pari o dispari.

Numerativamente si ha:

$$[T, \Omega] = \alpha + \beta + \delta_1 + \dots + \delta_{r-1} - \gamma [(-1)^r I_r + r - 1],$$

ove I_r è l'invariante di Segre relativo a M_r e $\alpha, \beta, \delta_1, \dots, \delta_{r-1}$ sono gl'indici e i ranghi di T .

10. Introdotte infine le corrispondenze a pseudovalenza γ (una corrispondenza T è a pseudovalenza γ , quando un suo multiplo conveniente kT è a valenza $k\gamma$), e tenuto conto della base per le varietà tracciate su $W = M \times M'$, si perviene ai teoremi seguenti:

I. Ogni corrispondenza (pura) T, ∞^r , d'indici α, β , fra due varietà M_r, M'_r è data da un'equivalenza algebrica del tipo:

$$(6) \quad T \equiv \alpha\Phi + \beta\Phi' + \sum_{i=1}^r \lambda_i (T_i - \alpha_i\Phi - \beta_i\Phi') + \epsilon_1 Z_1 + \dots + \epsilon_\sigma Z_\sigma,$$

ove T_1, \dots, T_r , degli indici rispettivi $\alpha_1, \beta_1; \dots; \alpha_r, \beta_r$, son convenienti corrispondenze fissate una volta per sempre; le λ, ϵ son interi determinati da T ; e Z_1, \dots, Z_σ sono corrispondenze algebriche virtuali ∞^r , divisori della corrispondenza virtuale zero, e indipendenti da T .

(1) Che si dimostra estendendo il n. 7 della mia II Nota lineea del 1° giugno 1934 (p. 832 del vol. XIX₆, 1° sem. 1934). La relazione numerativa $[\Omega, \Omega] = (-1)^r [S(M)]$ fu stabilita per via topologica dal COMESSATTI («Rend. Lincei», XVI₆, 2° sem., 1932, n. 6, p. 559).

II. La T può anche esprimersi con un'equivalenza (razionale):

$$(7) \quad T \equiv X \times M' + X' \times M + \sum_{i=1}^s \lambda_i (T_i - X_i \times M' - X_i' \times M) + \\ + S_1 + \dots + S_{r-1},$$

ove $X, X'; X_1, X_1'; \dots; X_s, X_s'$ sono i gruppi corrispondenti a due punti x, x' di M, M' nelle T, T_1, \dots, T_s ; le T_1, \dots, T_s son indipendenti da T ; gl'interi λ e le corrispondenze degeneri di specie $r+1, \dots, 2r-2, S_1, S_2, \dots, S_{r-1}$, sono invece determinati da T .

11. Se $M_r = M'_r$, da (6), secondo i due membri con Ω , si ricava una prima forma del principio generale di corrispondenza, che non dà luogo ad alcuna utile interpretazione funzionale, perchè su M due gruppi di un egual numero di punti son sempre algebricamente equivalenti.

Secondo invece con Ω i due membri della (7) si ha una seconda forma funzionale-numerativa del principio generale di corrispondenza.

Quanto all'equivalenza funzionale-numerativa, nel gruppo virtuale (T, Ω) , di una curva o superficie, ... o varietà ad $r-1$ dimensioni, luogo di coincidenze imperfette di T , si prova in primo luogo (con ovvia estensione del lemma II del n. 29 della mia Nota lineare del 5 marzo 1933), che essa è indipendente dalla natura della corrispondenza, sicchè può esser determinata nel caso di una corrispondenza di Zeuthen generalizzata a valenza zero, estendendo il n. 35 della mia Nota lineare del 2 giugno 1933. Mi fermerò su quest'estensione nella Memoria ove saranno sviluppate le presenti Note. Nel caso di uno spazio lineare la equivalenza numerativa (coincidente in tal caso colla funzionale) di una varietà di coincidenze imperfette, è stata determinata dal Pieri (nel lavoro citato).

12. Darò ora un rapido cenno sulle corrispondenze (pure) $\infty^{r+\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, \dots, r-1$) fra M_r, M'_r , riserbando all'accennata Memoria più ampi sviluppi, analoghi a quelli che trovansi in A pel caso $r=2$.

Una corrispondenza $T, \infty^{r+\lambda}$, fa generalmente corrispondere ad ogni punto x di M una varietà X'_λ , di dimensione λ , di M'_r . Si dice che T è a valenza zero, se X'_λ varia in un sistema d'equivalenza di specie λ . (Un sistema lineare per $\lambda = r-1$). Se T è a valenza zero, anche T^{-1} lo è. Si hanno 3 categorie di corrispondenze degeneri $\infty^{r+\lambda}$, analoghe alle 1), 2), 3) del n. 2. Le 1) non sono generalmente a valenza zero; le 2), 3) sono invece tutte a valenza zero. Ciascuna delle categorie 1), 2) è costituita da $r-\lambda-1$ specie di corrispondenze degeneri.

Il teorema fondamentale è analogo a quello del n. 2; cioè ogni corrispondenza pura $T, \infty^{r+\lambda}$, effettiva o virtuale, a valenza zero, fra M_r, M'_r ap-

partiene totalmente ad un sistema d'equivalenza somma di corrispondenze degeneri delle categorie 2), 3); e viceversa.

Nel caso $M_r = M'_r$, secondo con Ω , si caratterizza funzionalmente il luogo delle incidenze, cioè dei punti di M , che appartengono alle varietà X_λ omologhe (coincidente col luogo dei punti di M' , che appartengono alle X_λ omologhe). Se ne deduce altresì, anche nel caso $M_r \neq M'_r$, mediante le basi delle varietà tracciate su M_r, M'_r , il modo di comporre ogni corrispondenza $\infty^{r+\lambda}$ fra M_r, M'_r ; e, quando $M_r = M'_r$, da ciò segue, alla sua volta, il principio generale, funzionale-numerativo, di incidenza.

L'estensione alle corrispondenze fra varietà di dimensioni diverse si riconduce allo studio precedente, perchè ogni corrispondenza fra una M_r ed una M'_s ($s > r$) dà luogo ad una corrispondenza fra M_r ed una conveniente sezione spaziale di M'_s .

13. Termino mostrando che sopra una superficie F , i cui punti non costituiscano una serie di pseudoequivalenza, il principio di corrispondenza di Zeuthen-Severi non può essere applicabile a tutte le corrispondenze aventi valenza d'irregolarità γ . (Chiamo così la valenza nel senso di Albanese). È evidente che basta provare l'affermazione nel caso $\gamma = 0$. Affinchè per una T , di indici α, β , la quale faccia corrispondere ad un punto x mobile su F un gruppo mobile in una serie regolare, valga il principio di Zeuthen-Severi, occorre che T possieda un rango δ , nel senso della definizione invariantiva di Severi (e non secondo la definizione proiettiva di Zeuthen, che non è neppur sempre valida nel campo proiettivo e alla quale, comunque, non si può correttamente dare alcun significato invariantivo). Dovrà dunque essere associata a T una corrispondenza degenerare di 2^a specie S , sostituibile a T in tutte le questioni numerative inerenti al rango. Il rango di T non è che il numero virtuale delle coincidenze di S .

Facciamo il prodotto TC^{-1} di T per l'inversa d'una corrispondenza algebrica $C(\alpha', \beta')$ comunque scelta su F . Questo prodotto è a valenza d'irregolarità nulla qualunque sia C ⁽¹⁾. Pertanto TC^{-1} ammette rango e per calcolarlo si può sostituire S a T . Cioè il rango di TC^{-1} è uguale al rango di SC^{-1} , ossia al numero virtuale $[S, C]$ ⁽²⁾. Il numero virtuale di punti uniti di TC^{-1} è $[T, C]$. Onde viene $[T, C] = \alpha'\beta' + \alpha'\beta + [S, C]$.

Se ora consideriamo una corrispondenza T' a valenza zero (nel senso

(1) Ciò consegue dal fatto che, se T fa corrispondere ad un ciclo lineare qualunque di F un ciclo nullo o un divisore dello zero, lo stesso accade pel prodotto TC^{-1} .

(2) Invero (Memoria A, n. 19) la corrispondenza SC^{-1} è, come S , una corrispondenza degenerare (non di 3^a specie) cogli indici ambedue nulli, cioè una corrispondenza degenerare di 2^a specie. Epperò il suo rango uguaglia il numero dei suoi punti uniti (Memoria A, n. 17), ossia $[S, C]$.

di Severi) data da $T' \equiv \alpha\Phi + \beta\Phi' + S$, anche $T' C^{-1}$ risulta a valenza zero ⁽¹⁾ e viene $[T', C] = \alpha\beta' + \alpha'\beta + [S, C]$, cioè $[T, C] = [T', C]$.

Pertanto le superficie T, T' di $W = F \times F'$ sono aritmeticamente equivalenti, epperò T è a valenza o a pseudovalenza zero (nel senso di Severi) come T' ⁽²⁾. Ciò è assurdo, perchè su F esistono corrispondenze a valenza d'irregolarità nulla, che non sono a valenza o a pseudovalenza zero.

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sul problema dell'impulso nei corpi elastici isotropi.* Nota di G. ARRIGHI, presentata ⁽³⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ 1. Nel problema dell'impulso in un corpo elastico isotropo indefinito, la determinazione della discontinuità di velocità in esso determinatasi dipende dalla equazione ⁽⁴⁾

$$\mathbf{F} + \Omega^2 \text{grad div } \mathbf{v} - \omega^2 \text{rot}^2 \mathbf{v} - \mathbf{v} = 0$$

dove \mathbf{F} è il vettore della forza impulsiva di massa, \mathbf{v} è la variazione di velocità ed Ω^2, ω^2 sono le corrispondenti costanti di isotropia.

Posto

$$(1) \quad \mathbf{v} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \mathbf{u}$$

$$(2) \quad \mathbf{F} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \mathbf{U},$$

la determinazione di φ ed \mathbf{u} si potrà far dipendere dalle equazioni

$$(3) \quad \Omega^2 \Delta \varphi - \varphi + \Phi = 0$$

$$(4) \quad \omega^2 \text{rot}^2 \mathbf{u} + \mathbf{u} - \mathbf{U} = 0.$$

Ora noi supporremo che lo scalare Φ e il vettore \mathbf{U} dai quali dipende la forza siano così dati:

Φ sia una funzione armonica del punto P , per cui $\Delta \Phi = 0$;

(1) Memoria A, n. 19.

(2) Memoria A, n. 13, n. 16, Oss.

(3) Nella seduta del 21 giugno 1936.

(4) F. CONFORTO, *Sugli impulsi nei corpi elastici isotropi*, in «Atti della R. Accademia dei Lincei», vol. XV, fasc. 8, 1° sem., 1932. Per le notazioni e le formule del calcolo vettoriale omografico, ved.: C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Trasformazioni lineari*. Zanichelli, Bologna, 1929.

$U = \text{rot}(\Psi \mathbf{a}) = \text{grad} \Psi \wedge \mathbf{a}$, con \mathbf{a} vettore costante e Ψ funzione armonica di P , per cui $\Delta \Psi = 0$;
la (3) si potrà quindi scrivere semplicemente

$$\Omega^2 \Delta (\varphi - \Phi) - (\varphi - \Phi) = 0.$$

Circa la (4), quando si ponga

$$\mathbf{u} = \text{rot}(\psi \mathbf{a}) = \text{grad} \psi \wedge \mathbf{a},$$

per essere

$$\text{rot}(\psi \mathbf{a}) = -\text{rot}(\Delta \psi \cdot \mathbf{a}) = -(\text{grad} \Delta \psi) \wedge \mathbf{a},$$

si avrà

$$\text{grad}(\omega^2 \Delta \psi - \psi + \Psi) \wedge \mathbf{a} = 0,$$

onde, la trattazione del nostro problema potrà farsi dipendere dalle due equazioni

$$(3') \quad \Omega^2 \Delta (\varphi - \Phi) - (\varphi - \Phi) = 0,$$

$$(4') \quad \omega^2 \Delta (\psi - \Psi) - (\psi - \Psi) = 0,$$

per le quali

$$\varphi - \Phi \quad \text{e} \quad \psi - \Psi$$

saranno così funzioni metarmoniche di prima specie.

Le (3'), (4) hanno le soluzioni fondamentali ⁽¹⁾

$$\varphi - \Phi = \frac{\cosh\left(\frac{r}{\Omega}\right)}{r}, \quad \psi - \Psi = \frac{\cosh\left(\frac{r_1}{\omega}\right)}{r_1},$$

dove

$$r = |P - O| \quad r_1 = |P - O_1|,$$

le quali diventano infinite rispettivamente per $P \rightarrow O$, $P \rightarrow O_1$. Potremo scrivere allora

$$(5) \quad \varphi = \Phi + k \frac{\cosh\left(\frac{r}{\Omega}\right)}{r},$$

$$(6) \quad \psi = \Psi + k_1 \frac{\cosh\left(\frac{r_1}{\omega}\right)}{r_1}$$

con k, k_1 costanti.

(1) Ved. G. ASCOLI, P. BURGATTI e G. GIRAUD, *Equazioni alle derivate parziali dei tipi ellittico e parabolico*. Sansoni, Firenze, 1936, p. 30 e sg.

§ 2 - Cerchiamo adesso l'espressione di \mathbf{v} ; dalla (5) si ha

$$\text{grad } \varphi = \text{grad } \Phi + k \left[\frac{1}{\Omega r} \sinh \left(\frac{r}{\Omega} \right) - \frac{1}{r^2} \cosh \left(\frac{r}{\Omega} \right) \right] \text{grad } r,$$

e dalla (6) segue

$$(7) \quad \mathbf{u} = \text{rot} (\psi \mathbf{a}) = \text{grad } \psi \wedge \mathbf{a} = \mathbf{U} + \\ + k_1 \left[\frac{1}{\omega r_1} \sinh \left(\frac{r_1}{\omega} \right) - \frac{1}{r_1^2} \cosh \left(\frac{r_1}{\omega} \right) \right] \text{grad } r_1 \wedge \mathbf{a}.$$

Applicando rot ad ambo i membri di quest'ultima, e, per essere

$$\text{rot} (\text{grad } r_1 \wedge \mathbf{a}) = \left(\frac{d}{dP} \text{grad } r_1 - \Delta r_1 \right) \mathbf{a} = \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1} H (\text{grad } r_1, \text{grad } r_1) - \right. \\ \left. - \frac{2}{r_1} \right] \mathbf{a} = - \frac{1}{r_1} [1 + H (\text{grad } r_1, \text{grad } r_1)] \mathbf{a},$$

discenderà

$$(8) \quad \text{rot } \mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{U} - \frac{k_1}{r_1} \left[\frac{1}{\omega r_1} \sinh \left(\frac{r_1}{\omega} \right) - \frac{1}{r_1^2} \cosh \left(\frac{r_1}{\omega} \right) \right] [1 + \\ + H (\text{grad } r_1, \text{grad } r_1)] \mathbf{a} + k_1 \left[\frac{1}{\omega^2 r_1} \cosh \left(\frac{r_1}{\omega} \right) - \frac{2}{\omega r_1^2} \sinh \left(\frac{r_1}{\omega} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2}{r_1^3} \cosh \left(\frac{r_1}{\omega} \right) \right] (\text{grad } r_1 \wedge)^2 \mathbf{a} = \text{rot } \mathbf{U} + k_1 \left[\frac{1}{\omega r_1^2} \sinh \left(\frac{r_1}{\omega} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{r_1^3} \cosh \left(\frac{r_1}{\omega} \right) - \frac{1}{\omega^2 r_1} \cosh \left(\frac{r_1}{\omega} \right) \right] \mathbf{a} + k_1 \left[\frac{1}{\omega^2 r_1} \cosh \left(\frac{r_1}{\omega} \right) - \frac{3}{\omega r_1^2} \sinh \left(\frac{r_1}{\omega} \right) + \right. \\ \left. + \frac{3}{r_1^3} \cosh \left(\frac{r_1}{\omega} \right) \right] \text{grad } r_1 \times \mathbf{a} \cdot \text{grad } r_1.$$

Dalle (7), (8) segue in definitiva

$$\mathbf{v} = \mathbf{F} + k \left[\frac{1}{\Omega r} \sinh \left(\frac{r}{\Omega} \right) - \frac{1}{r^2} \cosh \left(\frac{r}{\Omega} \right) \right] \text{grad } r + \\ + k_1 \left[\frac{1}{\omega r_1^2} \sinh \left(\frac{r_1}{\omega} \right) - \frac{1}{r_1^3} \cosh \left(\frac{r_1}{\omega} \right) - \frac{1}{\omega^2 r_1} \cosh \left(\frac{r_1}{\omega} \right) \right] \mathbf{a} + \\ + k_1 \left[\frac{1}{\omega^2 r_1} \cosh \left(\frac{r_1}{\omega} \right) - \frac{3}{\omega r_1^2} \sinh \left(\frac{r_1}{\omega} \right) + \frac{3}{r_1^3} \cosh \left(\frac{r_1}{\omega} \right) \right] \text{grad } r_1 \times \mathbf{a} \cdot \text{grad } r_1.$$

Per l'interpretazione meccanica di quest'ultima dovremo fare astrazione di convenienti intornoi contenenti i suoi poli. È evidente la forma che essa assume per $O \equiv O_1$; ad ogni modo in essa sono distinti gli effetti corri-

spondenti ai sovrapposti campi, lamellare e solenoidale, delle forze di massa impulsive.

È da osservare che ancora alla ricerca delle metaarmoniche si riduce con facilità il caso in cui le Φ, Ψ predette siano funzioni metarmoniche di prima specie soddisfacenti le equazioni

$$\frac{\Omega^2}{2} \Delta \Phi - \Phi = 0$$

$$\frac{\omega^2}{2} \Delta \Psi - \Psi = 0,$$

giacchè allora, ad esempio la

$$\Omega^2 \Delta \varphi - \varphi + \Phi = 0,$$

per essere

$$\Phi = \Omega^2 \Delta \Phi - \Phi,$$

si potrà scrivere

$$\Omega^2 \Delta (\varphi - \Phi) - (\varphi + \Phi) = 0,$$

onde, detta

$$U_{\Omega}$$

una funzione metarmonica soddisfacente quest'ultima, si avrà

$$(9) \quad \varphi = -\Phi + k U_{\Omega}$$

con k costante, e, analogamente potremo ricavare, negli stessi simboli,

$$(10) \quad \psi = -\bar{\Psi} + k_1 U_{\omega}.$$

Dalle (9), (10) tenendo presente le (1), (2) discende

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi + \text{rot}^2 (\psi \mathbf{a}) = -\mathbf{F} + k \text{grad } U_{\Omega} + k_1 \text{rot}^2 (U_{\omega} \mathbf{a}),$$

per la quale può darsi uno sviluppo come quello del caso precedentemente trattato.

Meccanica. — *Sulla variazione di spinta di un liquido pesante in equilibrio.* Nota di G. ARRIGHI, presentata ⁽¹⁾ dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ 1. In un liquido pesante in equilibrio, il cui peso specifico $\tilde{\omega}$ è funzione della profondità x (dalla superficie libera), sia immerso un corpo occupante un campo τ di contorno σ . La intensità della spinta è data da

$$(a) \quad S = \int_{\tau} \tilde{\omega} d\tau;$$

supponendo che il corpo subisca uno spostamento definito dalla velocità \mathbf{v} dei suoi punti, in questa Nota mi propongo di calcolare la variazione di S rispetto al tempo t .

Dalla nota formula

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \tilde{\omega} d\tau = \int_{\tau} \left[\operatorname{div} (\tilde{\omega} \mathbf{v}) + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} \right] d\tau,$$

facendo $\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} = 0$ e per essere $\operatorname{div} (\tilde{\omega} \mathbf{v}) = \tilde{\omega} \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{grad} \tilde{\omega} \times \mathbf{v}$, risulterà:

$$\frac{dS}{dt} = \int_{\tau} (\tilde{\omega} \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{grad} \tilde{\omega} \times \mathbf{v}) d\tau.$$

Ma dall'essere $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(x)$, segue

$$\operatorname{grad} \tilde{\omega} = \frac{d\tilde{\omega}}{dx} \mathbf{k},$$

ove \mathbf{k} è un vettore unitario normale alla superficie libera e volto verso il basso; perciò

$$\operatorname{grad} \tilde{\omega} \times \mathbf{v} = \frac{d\tilde{\omega}}{dx} \mathbf{k} \times \mathbf{v} = \frac{d\tilde{\omega}}{dx} v_k,$$

dove v_k è la componente verticale di \mathbf{v} (positiva verso il basso), e la formula precedente diviene

$$(1) \quad \frac{dS}{dt} = \int_{\tau} \left(\tilde{\omega} \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{d\tilde{\omega}}{dx} v_k \right) d\tau.$$

(1) Nella seduta del 21 giugno 1936.

Nel caso in cui τ si mantenga rigido, risulterà $\text{div } \mathbf{v} = 0$, e si avrà semplicemente

$$(1') \quad \frac{dS}{dt} = \int_{\tau} \frac{d\tilde{\omega}}{dx} v_k d\tau.$$

Circa la variazione del centro di spinta C è da notarsi quanto segue. Nei simboli delle formazioni geometriche di prima specie secondo Peano ⁽¹⁾, può porsi

$$S \cdot C = \int_{\tau} \tilde{\omega} Q d\tau,$$

dove Q è il centro dell'elemento $d\tau$.

Poichè

$$\frac{d}{dt} (S \cdot C) = - \int_{\sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} \cdot \tilde{\omega} Q \cdot d\sigma + \int_{\tau} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} Q d\tau,$$

dove \mathbf{n} è un vettore unitario normale a $d\sigma$ e volto all'interno di τ , e per essere $\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} = 0$, risulterà

$$\frac{dS}{dt} C + S \cdot \frac{dC}{dt} = - \int_{\sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} \cdot \tilde{\omega} Q d\sigma.$$

Ponendo ancora

$$- \int_{\sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} \cdot \tilde{\omega} Q d\sigma = - \int_{\sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} \cdot \tilde{\omega} d \cdot C_1,$$

ovvero, per il teorema della divergenza

$$- \int_{\sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} \cdot \tilde{\omega} Q d\sigma = \int \text{div} (\tilde{\omega} \mathbf{v}) d\tau \cdot C_1 = \frac{dS}{dt} C_1,$$

avremo allora

$$\frac{dS}{dt} C + S \frac{dC}{dt} = \frac{dS}{dt} C_1,$$

da cui discende

$$\frac{dC}{dt} = \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} (C_1 - C).$$

(1) G. PEANO, *Calcolo geometrico*. (Fratelli Bocca, Torino, 1888), ovvero: G. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Elementi di calcolo vettoriale*, II ed. (Zanichelli, Bologna), p. 48. Circa la definizione, in appresso, del punto C , è da notarsi che la formazione corrispondente ha massa non nulla, e quindi un centro, per una variazione non nulla di spinta.

Nel caso in cui τ si mantenga rigido, pel quale $\frac{dS}{dt}$ ci è fornito dalla (1'), il punto C_x resta pertanto definito dalla relazione

$$\int_{\tau} \frac{d\tilde{\omega}}{dx} v_k d\tau \cdot C_x = - \int_{\sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} \tilde{\omega} Q d\sigma$$

e, per la variazione di C si avrà

$$\frac{dC}{dt} = \frac{1}{S} \int_{\tau} \frac{d\tilde{\omega}}{dx} v_k d\tau \cdot (C_x - C).$$

§ 2. Ancora nelle ipotesi di τ rigido si supponga

$$\tilde{\omega} = \frac{a}{2} x^2 + bx + c$$

con a, b, c costanti; dalla α) si ha

$$S = \int_{\tau} \tilde{\omega} d\tau = \frac{a}{2} \int_{\tau} x^2 d\tau + b \int_{\tau} x d\tau + c\tau$$

da cui

$$\frac{dS}{dt} = \frac{a}{2} \frac{d}{dt} \int_{\tau} x^2 d\tau + b \frac{d}{dt} \int_{\tau} x d\tau = \frac{a}{2} \frac{d}{dt} I + b \frac{d}{dt} M$$

dove: I è il momento geometrico d'inerzia di τ rispetto alla superficie libera e M è il momento geometrico statico di τ rispetto alla superficie libera.

Ma può scriversi pure ⁽¹⁾

$$I = I_G + d_G \cdot M$$

dove I_G è il momento geometrico d'inerzia rispetto al piano orizzontale per il centro geometrico G di τ e d_G è la profondità di G , onde

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{a}{2} I_G + \left(\frac{a}{2} d_G + b \right) M \right].$$

Limitiamoci ora alla considerazione delle rotazioni attorno ad assi orizzontali per G (fisso); relativamente ad esse, d_G e M saranno costanti,

(1) È ben noto che $I = I_G + d_G^2 \tau$; d'altra parte

$$M = \int_{\tau} x d\tau = d_G \int_{\tau} d\tau = d_G \cdot \tau,$$

dove segue la formola scritta.

per cui sarà semplicemente

$$(2) \quad \frac{dS}{dt} = \frac{a}{2} \frac{d}{dt} I_G,$$

dove ⁽¹⁾

$$(\beta) \quad I_G = k \times \left(\frac{1}{2} I_1 \sigma - \sigma \right) k,$$

essendo σ la dilatazione centrale geometrica d'inerzia del campo τ .

Rigidamente connesso con τ , si costruisca l'ellissoide indicatore della dilatazione

$$\frac{1}{2} I_1 \sigma - \sigma,$$

rappresentato analiticamente dalla equazione

$$(3) \quad (P - G) \times \left(\frac{1}{2} I_1 \sigma - \sigma \right) (P - G) = 1$$

è subito visto che il raggio vettore $P - G$ ha una lunghezza eguale all'inverso della radice quadrata del momento geometrico d'inerzia rispetto al piano centrale normale a $P - G$.

Ancora rigidamente connessa col corpo si costruisca la sfera di raggio $\frac{1}{\sqrt{I_G}}$ e centro G che, può dirsi subito per la (β) , avrà in comune con l'ellissoide gli estremi del suo diametro verticale, tenendo presente la (2) segue allora:

Nelle ipotesi superiori, il corpo immerso non subirà variazioni di spinta per rotazioni in cui si conservino verticali i raggi vettori relativi alla intersezione dell'ellissoide (3) con la sfera predetta.

Le direzioni principali di $\frac{1}{2} I_1 \sigma - \sigma$ coincidono con quelle di σ , onde, gli assi dell'ellissoide (3) sono paralleli alle direzioni principali centrali geometriche d'inerzia di τ , pertanto:

Nelle ipotesi che la quadrica indicatrice (3) non sia di rotazione, se k è direzione principale centrale d'inerzia corrispondente al massimo o al minimo momento, qualunque rotazione finita comporta una variazione di spinta.

Giacchè allora l'ellissoide e la sfera hanno in comune soltanto i due punti diametralmente opposti sulla verticale per G .

È presto veduto ciò che accade se la (3) è di rotazione od è, in particolare, una sfera.

(1) Ved. R. MARCOLONGO, *Meccanica razionale*. Vol. II, cap. V, 260. (Hoepli, Milano, 1918).

Fisica (Ottica). — *Sull'aberrazione sferica del 5° ordine dei sistemi centrati*. Nota di C. MORAIS, presentata ⁽¹⁾ dal Corrisp. U. BORDONI.

1. L'aberrazione sferica ΔS di un sistema può porsi sotto la forma:

$$(1) \quad \Delta S = \sum_{h=1}^{h=\infty} a_h \omega_i'^{2h}$$

dove ω_i' è l'angolo che il raggio rifratto dalla i^{ma} superficie forma coll'asse del sistema ed a_h è il coefficiente generico dello sviluppo in serie dell'aberrazione sferica relativa al sistema ottico in istudio.

È evidente che i termini ad esponente via via più elevato acquistano tanta maggior importanza quanto maggiore è l'angolo ω_i' [supporremo sempre $|\omega_i'| < 1$] ma dovendo la (1) rappresentare per ipotesi una quantità finita, la serie indicata è convergente e diventa divergente solo nel caso in cui il punto oggetto si trovi nel fuoco oggetto, eccezione che può eliminarsi invertendo il sistema ottico.

Dovrà essere quindi:

$$(2) \quad \lim_{h=\infty} a_h \omega_i'^{2h} = 0$$

ed essendo $|\omega_i'| < 1$ dovrà essere ancora:

$$(3) \quad \lim_{h=\infty} \omega_i'^{2h} = 0.$$

In generale sarà quindi $a_h \neq 0$; e siccome la (2) dovrà essere soddisfatta per qualunque ω_i' (nei limiti indicati), si avrà anche

$$a_h \neq \infty.$$

Potremo quindi sempre porre

$$(4) \quad |a_h| < N$$

dove N è un numero positivo sufficientemente grande.

Risulta allora che, essendo convergente la serie

$$\omega_i'^2 + \omega_i'^4 + \dots + \omega_i'^{2h} + \dots$$

(1) Nella seduta del 5 giugno 1936.

è convergente, per la (4), anche la serie

$$(5) \quad |a_1| \omega_i'^2 + |a_2| \omega_i'^4 + \dots + |a_h| \omega_i'^{2h} + \dots$$

La (1) è quindi una serie assolutamente convergente.

Se il valore della serie (5) è nullo, dovrà essere $a_1 = 0, a_2 = 0, \dots, \dots, a_h = 0, \dots$

Se invece, per qualunque ω_i' , è nullo il valore della serie (1), dovrà risultare: $a_1 = 0, a_2 = 0, \dots, a_h = 0, \dots$; cioè, dovrà essere nullo il valore della serie (5).

Abbiamo quindi come condizione *necessaria e sufficiente* di aplanatismo

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} a_h |\omega_i'^{2h}| = 0.$$

L'aberrazione sferica è invece *corretta* per un punto quando

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} a_h \omega_i'^{2h} = 0$$

ed in generale risulta allora

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} |a_h| \omega_i'^{2h} = 0.$$

2. È interessante ricavare dalla verifica trigonometrica di un sistema ottico non solo i valori numerici delle aberrazioni sferiche dei vari ordini, ma anche la conoscenza delle aperture a cui entrano in campo dette aberrazioni.

Supponiamo, a tal fine, che siano presenti in un sistema ottico aberrazioni sferiche di ordine non superiore al settimo. La generalizzazione si fa senza nessuna difficoltà.

Abbiamo quindi:

$$(6) \quad \Delta S = a_1 \omega_i'^2 + a_2 \omega_i'^4 + a_3 \omega_i'^6.$$

Facciamo la verifica trigonometrica [oltre al tracciato dei raggi parassiali] per sette zone dello strumento h_1, h_2, \dots, h_7 , corrispondenti agli angoli $\omega_i', 2\omega_i', \dots, 7\omega_i'$, ed indichiamo con ΔS_{h_k} il valore della (6) relativa alla k^{ma} zona. Le ascisse delle immagini rispetto all'ultima superficie del sistema ottico risultano quindi in corrispondenza, chiamando con x_i' l'ascissa dell'immagine parassiale, $x_i'; x_i' + \Delta S_{h_1}; x_i' + \Delta S_{h_2}$; dove, evidentemente:

$$(7) \quad x_i + \Delta S_{h_k} = a_1 k^2 \omega_i'^2 + a_2 k^4 \omega_i'^4 + a_3 k^6 \omega_i'^6 + x_i'.$$

Ora, è noto che la differenza n^{ma} di un polinomio di grado n è una costante.

Siano allora

$$\begin{array}{ccccccc}
 A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 \\
 B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & \\
 C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & & \\
 D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & & & \\
 E_1 & E_2 & E_3 & & & & \\
 F_1 & F_2 & & & & &
 \end{array}$$

valori numerici delle differenze $1^a, 2^a, \dots, 6^a$ del polinomio (7). Le differenze seste, nell'ipotesi che manchino le aberrazioni di ordine superiore al settimo, sono costanti e si ha, come è noto

$$a_3 = \frac{F_1}{16 \omega_i'^6}$$

la quale espressione ci dà senz'altro il coefficiente dell'aberrazione del settimo ordine.

Per i coefficienti a_2 ed a_1 del 5^o e del 3^o ordine rispettivamente ricaviamo:

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{D_1 - 1560 \frac{F_1}{16}}{4 \omega_i'^4} \\
 a_1 &= \frac{B_1 - 14 \frac{D_1 - 1560 \frac{F_1}{16}}{4} - 62 \frac{F_1}{16}}{2 \omega_i'^2}
 \end{aligned}$$

Se poi dal calcolo delle differenze risulta $c_1 = 0$ [prima differenza terza eguale a zero] ciò significa che in corrispondenza alle aperture $\omega_i', 2 \omega_i', 3 \omega_i'$ agisce solo l'aberrazione del terzo ordine; se risulta anche $E_1 = 0$ in corrispondenza alle aperture $3 \omega_i', 4 \omega_i', 5 \omega_i'$ agiscono solo le aberrazioni del 3^o e 5^o ordine.

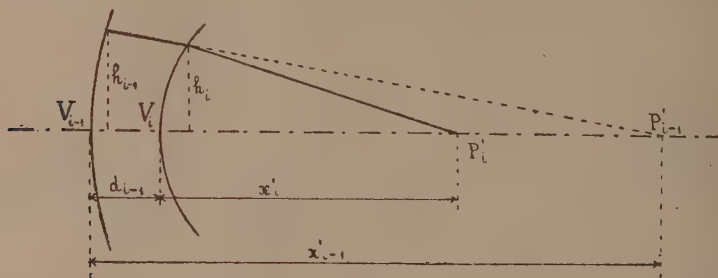
Se le differenze seste, poi, non risultassero eguali, dovremmo tener conto delle aberrazioni di ordine superiore al settimo.

3. Supponiamo di poter trascurare in un sistema ottico le aberrazioni di ordine superiore al quinto, e poniamo quindi

$$\Delta S = a_i' \omega_i'^2 + b_i' \omega_i'^4$$

dove abbiamo indicato con a'_i e b'_i rispettivamente il coefficiente dell'aberrazione del 3° e 5° ordine relativo ad un sistema di i superfici.

La ricerca dell'espressione analitica del coefficiente b'_i in funzione degli elementi fondamentali di un sistema ottico richiede un notevole sviluppo di calcolo di cui ci limitiamo a dare qui i risultati.



Per un sistema di i superfici, comunque distanti, in presenza di un punto oggetto affetto da aberrazione sferica $\Delta S_i = a_i \omega_i^2 + b_i \omega_i^4$:

$$(8) \quad b'_i = \frac{x_i'^6}{24 n_{i+1}} \sum_{k=1}^{i-1} \left(\frac{h_k}{h_i} \right)^6 \left\{ \beta_k Q_k^4 + \gamma_k Q_k^3 + \delta_k Q_k^2 + 20 Q_k \left[\frac{a'_k}{n_{k+1} x_k'^4} - \frac{a'_{k-1}}{n_k x_k'^4} \right] - \right. \\ \left. - 32 Q_k \left[\frac{a'_k}{x_k'^5} - \frac{a'_{k-1}}{x_k'^5} \right] \right\} + \frac{3 a_i'^2}{x_i'^2} - 3 \frac{x_i'^6}{n_{i+1}} \sum_{k=1}^{i-1} \frac{n_{k+1} a_k'^2}{x_{k+1}^6} \left[\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x'_k} \right] \left(\frac{h_{k+1}}{h_i} \right)^6 - \\ - 3 \frac{n_i}{n_{i+1}} \frac{a_i'^2}{x_i} \left(\frac{x'_1 x'_2 \dots x'_i}{x_i x_2 \dots x_i} \right)^6 + \frac{n_i}{n_{i+1}} \left(\frac{x'_1 \cdot x'_2 \dots x'_i}{x_1 \cdot x_2 \dots x_i} \right)^6 b_i$$

dove abbiamo indicato con n_k l'indice di rifrazione dello spazio oggetto rispetto alla k^{ma} superficie e con a_k il coefficiente dell'aberrazione sferica del terzo ordine relativo al complesso delle prime k superfici, essendo a_k dato dalla espressione:

$$(9) \quad a_k = - \frac{x_i'^4}{24 n_{k+1}} \left(\frac{h_1}{h_k} \right) \sum_{\tau=1}^{k-1} \alpha_\tau Q_\tau^2 \left(\frac{h_\tau}{h_k} \right)^4 + \frac{n_i}{n_{k+1}} x_k'^4 \left(\frac{h_1}{h_k} \right)^4 a_1$$

mentre le espressioni di $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k$ sono:

$$\alpha_k = \frac{1}{n_{k+1} x_k'} - \frac{1}{n_k x_k}$$

$$\beta_k = \frac{1}{n_{k+1}^3 x_k'} - \frac{1}{n_k^3 x_k}$$

$$\gamma_k = -7 \left\{ \frac{1}{n_{k+1}^2 x_k'^2} - \frac{1}{n_k^2 x_k^2} \right\}$$

$$\delta_k = \frac{1}{n_{k+1} x_k'^3} - \frac{1}{n_k x_k^3}$$

Se il punto oggetto è privo di aberrazione dovremo porre: $a_i = b_i = 0$; se il sistema è corretto di aberrazione sferica del 3° ordine, dovremo porre $a'_i = 0$, e se infine le superfici rifrangenti sono infinitamente vicine e lavorano rispetto ad un punto oggetto corretto di aberrazione la (8) si semplifica nella

$$(10) \quad b'_i = \frac{x_i'^6}{24 n_{i+1}} \sum_{k=1}^{k=i} \left\{ \beta_k Q_k^4 + \gamma_k Q_k^3 + \delta_k Q_k^2 + 20 Q_k^2 \left[\frac{a'_k}{n_{k+1} x_k'^4} - \frac{a'_{k-1}}{n_k x_k'^4} \right] - \right. \\ \left. - 32 Q_k \left[\frac{a'_k}{x_k'^5} - \frac{a'_{k-1}}{x_k'^5} \right] \right\} + 3 \frac{a_i'^2}{x_i'}$$

Se infine le superfici sono a due a due vicine separate da intervalli notevoli d'aria, in modo che il complesso sia formato da l lenti sottili di cui la k^{ma} abbia un potere φ_k ed un indice n_k , avremo come espressione generale del coefficiente dell'aberrazione del 5° ordine

$$b'_l = \frac{x_l'^6}{24} \left(\frac{b_1}{h_1} \right)^6 \sum_{k=1}^{k=l} \left(\frac{b_k}{h_1} \right)^6 \left\{ \begin{aligned} & \beta_k Q_k^4 + \gamma_k Q_k^3 + \delta_k Q_k^2 + \beta'_k Q_k'^4 + \gamma'_k Q_k'^3 + \delta'_k Q_k'^2 + \\ & + 10 \varphi_k \frac{n_k}{n_{k-1}} [Q_k + Q'_k] \left[\frac{n_k^3 - 1}{n_k^2} \left(\frac{b_1}{h_k} \right)^4 \sum_{\tau=1}^{\tau=k-1} \left(\frac{b_\tau}{h_1} \right)^4 (A_\tau Q_\tau'^2 + B_\tau Q_\tau' + \right. \right. \\ & \left. \left. + C_\tau) - \frac{a_k Q_k^2}{n_k^2} \right] - \right. \\ & - 10 [A_k Q_k'^4 + B_k Q_k'^3 + C_k Q_k'^2] + 16 \frac{\alpha_k Q_k^3 + \alpha'_k Q_k'^3}{x_k'} - \\ & - 16 \varphi_k \frac{n_k}{n_{k-1}} \alpha_k \alpha'_k Q_k^2 + \\ & + 16 \left(\frac{b_1}{h_k} \right)^4 [\alpha_k Q_k + \alpha'_k Q'_k] \sum_{\tau=1}^{\tau=k-1} \left(\frac{b_\tau}{h_1} \right)^4 [A_\tau Q_\tau'^2 + B_\tau Q_\tau' + C_\tau] + \\ & \left. + \frac{3 a_i'^2}{x_i'} - 3 \frac{x_i'^6}{2} \left(\frac{b_1}{h_1} \right)^6 \sum_{k=1}^{k=l-1} \left(\frac{b_{k+1}}{h_1} \right)^6 \frac{a_{k+1}'^2}{x_{k+1}'} \left[\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k'} \right] \right\} \end{aligned} \right.$$

Nella (11) le quantità accentate si riferiscono agli elementi della seconda superficie della k^{ma} lente ed i coefficienti A_τ, B_τ, C_τ hanno per espressione:

$$A_\tau = \frac{n_\tau + 2}{n_\tau} \varphi_\tau$$

$$B_\tau = 3 \frac{\varphi_\tau^2}{n_\tau - 1} - 2 \varphi_\tau \frac{1}{x_{1\tau}}$$

$$C_\tau = \varphi_\tau^3 \frac{n_\tau}{(n_\tau - 1)^2} - \varphi_\tau^2 \frac{1}{x_{1\tau}} \frac{n_\tau}{n_\tau - 1}$$

essendo φ_τ e $x_{1\tau}$ il potere e la distanza dell'oggetto rispetto alla τ^{ma} lente.

4. *Esempio numerico.* — Applichiamo i risultati ottenuti al seguente obiettivo:

$$R_1 = 0,33330$$

$$d_1 = 0,048$$

$$R_2 = -0,16490$$

$$d_2 = 0,018$$

$$R_3 = -1,00510$$

$$n_1 = 1 \quad ; \quad n_2 = 1,57039 \quad ; \quad n_3 = 1,6228 \quad ; \quad n_4 = 1$$

$$f = 0,50311$$

$$\text{Diametro utile} = 0,1667$$

$$\text{Apertura relativa} = \frac{1}{3,02}$$

Oggetto all'infinito.

Abbiamo calcolato l'aberrazione sferica per sette aperture per via trigonometrica e per via analitica, ricorrendo per quest'ultima verifica alla relazione:

$$\Delta S = a'_3 \omega_3'^2 + b'_3 \omega_3'^4$$

i cui coefficienti abbiamo calcolato ricorrendo alle (8) e (9).

Ecco i risultati del calcolo:

h_i	$\Delta S_i = a'_3 \omega_3'^2 + b'_3 \omega_3'^4$	ΔS Trigonometrica	Differenze
0,0119	0	0	0
0,0238	-0,00001	0	+0,00001
0,0357	+0,00005	+0,00006	+0,00001
0,0476	+0,00025	+0,00030	+0,00005
0,0595	+0,00071	+0,00090	+0,00019
0,0714	+0,00158	+0,00219	+0,00061
0,0833	+0,00302	+0,00486	+0,00184

Sino ad una apertura $h = 0,0595$ i risultati ottenuti col metodo analitico coincidono praticamente con quelli dati dal metodo trigonometrico.

Il calcolo delle differenze seste delle ascisse ci ha dato poi il seguente quadro:

0,46891	0,46891	0,46891	0,46867	0,46921	0,46981	0,47110	0,47377
0	0	0,00006	0,00024	0,0006	0,00129	0,00267	
	0	0,00006	0,00018	0,00036	0,00069	0,00138	
0,00006		0,00012	0,00018	0,00033	0,00069		
		0,00006	0,00006	0,00015	0,00036		
		0	0,00009	0,00021			
			0,00006	0,00011			

Le differenze quarte ci dicono che fino ad una apertura corrispondente ad una ascissa di 0,46981 [$h_5 = 0,0595$] agiscono solo le aberrazioni del 3° e del 5° ordine. Le differenze seste praticamente costanti ci dicono che possiamo trascurare le aberrazioni di ordine superiore al 7°. Dal calcolo trigonometrico e da quello analitico abbiamo ricavato, come espressione dell'aberrazione sferica

$$\Delta S = -0,01395 \omega_i'^2 + 4,61349 \omega_i'^4 + 92,3 \omega_i'^6.$$

Chimica. — *Ossidabilità e struttura di alcuni nerofumi industriali*⁽¹⁾. Nota di A. BARONI, presentata⁽²⁾ dal Socio G. BRUNI.

In precedenti lavori⁽³⁾ eseguiti in collaborazione col prof. G. R. Levi, mi sono occupato dello studio della struttura cristallina del carbonio ottenuto per disidratazione di idrati di carbonio a catena ciclica (inosite e quebracite) e a catena aperta di atomi di carbonio (glucosio, saccarosio). L'esame coi raggi elettronici ha permesso di rilevare una netta differenza di struttura cristallina che appare evidente di tipo grafitico nei carboni derivati dall'inosite e quebracite, mentre il carbonio ottenuto da glucosio e saccarosio non ha mostrato nette interferenze cristalline confermando le esperienze di G. Asahara⁽⁴⁾ del 1922. Questa differenza è stata successivamente confermata applicando ai suddetti carboni il metodo di ossidazione cromofosforica di Balfour e Riley⁽⁵⁾.

Mi è sembrato interessante esaminare ora con gli stessi metodi diversi carboni finamente suddivisi (nerofumi) per i quali gli altri metodi di indagine (esame röntgenografico, conduttività elettrica ecc.) non hanno dato fino ad ora alcun risultato. I campioni da me studiati mi furono gentilmente forniti dal prof. Tullio Guido Levi della Società Italiana Pirelli che ringrazio vivamente.

L'esame di questi prodotti coi raggi elettronici non ha rivelato differenze sensibili. Alcuni campioni non permettono di rivelare interferenze per la difficoltà di ottenimento di preparati sufficientemente sottili e sono quelli, per es. il nero termoatomico ottenuto per decomposizione di gas naturali americani a 1200°, che per il loro modo di formazione dovrebbero forse avere una struttura cristallina; gli altri hanno fornito solo aloni bene accentuati ma non interferenze. Non riproduco i relativi fotogrammi perchè queste sfumature sono visibili solo sugli originali.

L'esame coi raggi X mi ha permesso di differenziare i neri di fiamma, che risultano perfettamente amorfi, dai neri tipo termoatomico che danno degli aloni abbastanza netti.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale e Chimica fisica della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 5 giugno 1936.

(3) «Zeit. f. Kryst.», 93, 156 (1936) e «Rend. Acc. Lincei», vol. XXIII, p. 441 (1936).

(4) «Jap. Jour. Chem.», 1, 35 (1922).

(5) «Journ. Chem. Soc.», 1723 (1935).

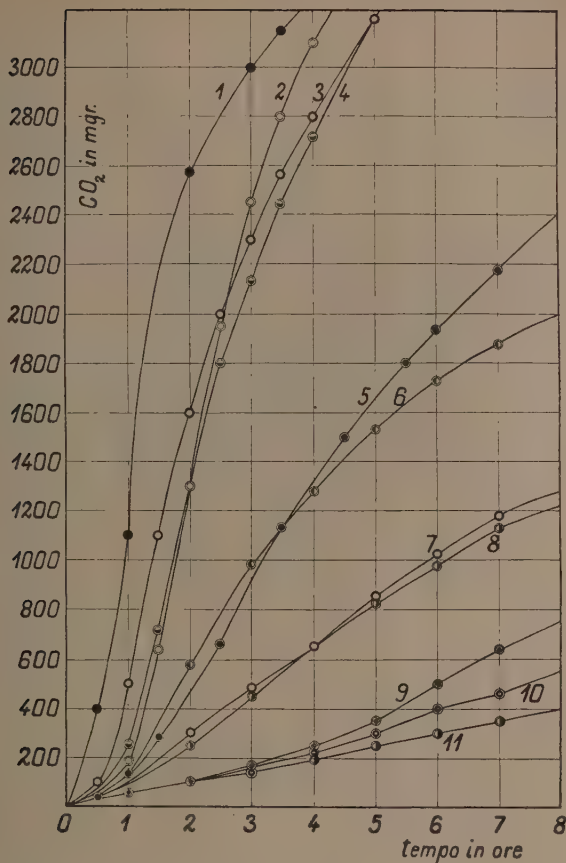


Fig. 1.

- 1 - Nero Super Spectra di fiamma da gas naturali americani (tipo per vernici).
- 2 - Nero Superba di fiamma da gas naturali americani (tipo per vernici).
- 3 - Nero di fiamma da gas naturali americani tipo rinforzante per gomma (gas black di impingement).
- 4 - Nero Paris di fiamma da gas naturali americani (tipo per vernici).
- 5 - Nero Heuschild per decomposizione di acetilene.
- 6 - Nero da ossido di carbonio.
- 7 - Nero P₃₃ per decomposizione di gas naturali americani in presenza di azoto.
- 8 - Nerofumo italiano di lampada (lamp. black).
- 9 - Grafite nera Erba.
- 10 - Nero per decomposizione di gas naturali americani.
- 11 - Nero termoatomico per decomposizione di gas naturali americani a 1200°.

Più interessante è risultato il metodo di ossidazione cromofosforica Balfour e Riley che mi ha permesso di dividere nettamente i vari campion in tre tipi. I prodotti esaminati sono stati dapprima riscaldati nel vuoto (0,1 mm.) a 350° per tre ore e l'ossidazione è stata eseguita su gr. 0,2 di nerofumo con una miscela di cc. 100 di acido fosforico sciropposo ($d = 1,70$) e gr. 20 di bicromato di potassio. A 100°, temperatura usata da Balfour e Riley ed anche da me per lo studio dei carboni ottenuti da idrati di carbonio, l'ossidazione dei nerofumi è troppo violenta; essa risulta sufficientemente regolare, e perciò facilmente seguibile, a 60°. Nella fig. 1 sono riportate le curve relative ai vari prodotti esaminati: in ordinate è indicata la quantità di anidride carbonica riferita ad 1 gr. di nerofumo ed in ascisse la durata dell'esperienza in ore.

Si può notare una grande ossidabilità per i neri di fiamma ed una piccola ossidabilità per i neri termoatomici. Balfour e Riley hanno osservato che col metodo cromofosforico i carboni grafitici si ossidano più facilmente di quelli pseudoamorfì perchè nel processo prevale il fenomeno di rigonfiamento grafitico sull'azione di superficie. Questa affermazione è indubbiamente vera per i carboni ordinari, perfino i carboni di zucchero, ma quando le dimensioni dei granuli di carbone sono estremamente piccole, sembra che l'azione di superficie sia il fenomeno prevalente.

Già l'osservazione diretta permette di vedere una netta differenza fra i vari campioni: i neri di fiamma sono nerissimi ed estremamente suddivisi; il nero da ossido di carbonio ha un colore grigio scuro ed è molto più compatto ed i neri termoatomici hanno un colore grigio chiaro e presentano dei granuli di dimensioni notevoli rispetto ai precedenti.

Confrontiamo la ossidabilità di questi neri con le loro proprietà rinforzanti nelle mescole di gomma. I neri che dal diagramma risultano i più ossidabili, sono quelli comunemente usati nella tecnica della gomma che conferiscono un forte effetto rinforzante alle mescole e cioè ne migliorano al massimo grado il carico di rottura, la resistenza alla lacerabilità, la resistenza alla abrasione. I neri a medio effetto rinforzante, come il nero da ossido di carbonio ed il nerofumo italiano sono anche mediocrement ossidabili mentre i neri termoatomici, che sono ad effetto rinforzante assai blando, sono i meno ossidabili.

Una eccezione è costituita dai neri per vernici che, pur essendo come preparazione assai affini ai neri rinforzanti per gomma, e presentando come questi una elevata ossidabilità, hanno invece mediocre effetto rinforzante nelle mescole di gomma.

Questi confronti fornitimi dal prof. T. G. Levi permettono di concludere che se anche non disponiamo oggi di metodi analitici per classificare i diversi tipi di neri in relazione al loro impiego (tanto che la tecnica si serve del risultato pratico per dedurne la qualità) tuttavia troviamo nel criterio della ossidabilità un indice migliore di tutti gli altri fin qui usati.

Biologia. — *Fenomeni di accrescimento embrionale e larvale studiati nei trapianti tra Anuri e Urodeli*⁽¹⁾. Nota di GIULIO COTRONEI e ALDO SPIRITO, presentata⁽²⁾ dal Socio F. SILVESTRI.

Come abbiamo già accennato in una Nota precedente (Cotronei e Perri, 1936)⁽³⁾, da molti anni l'Istituto di Anatomia comparata di Roma ha affrontato lo studio, negli Anfibi, della compatibilità e incompatibilità embrionale e larvale che si verificano nei trapianti xenoplastici di abbozzi di organi.

L'argomento, certamente interessante, ha richiesto, non soltanto molti anni di studio, ma anche la collaborazione di molti ricercatori. Soltanto in tale modo Cotronei e i suoi allievi hanno potuto fissare, accertandoli accuratamente, dei dati i quali sono serviti di base per l'ulteriore studio dell'argomento.

Se si considerano i dati esistenti in letteratura, prima del nostro lavoro, si rimane colpiti dalla frammentarietà dei risultati e dalla mancanza di una reale coordinazione di essi. Un recente lavoro della scuola di Harrison (Hewitt, 1934)⁽⁴⁾ implicitamente riconosce tale stato di fatto quando dice: « The difference between the reaction of urodele tissue in an anuran environment and that of anuran tissue in a urodele environment was noted by Harrison ('25) and is particularly evident in the work of Cotronei and his school... ». Avvertiamo che le brevi osservazioni dell'Harrison furono da noi citate nella loro reale portata.

Le nostre indagini, metodicamente condotte con molti abbozzi di organi e con molte specie di Anfibi (ed altre ricerche sono in corso), hanno per la prima volta chiaramente e nettamente dimostrato che in queste operazioni di trapianti xenoplastici bisogna ben distinguere tra incompatibilità larvale, che si stabilisce dopo che l'ospite (Urodelo) ha iniziato la sua vita larvale e dopo il differenziamento degli abbozzi trapiantati (di Anuri); e incompatibilità embrionale, che come regola impedisce il differenziamento dell'abbozzo trapiantato portandolo a rapidissima distruzione durante la vita embrionale dell'ospite (abbozzi di Urodeli su alcuni Anuri).

Il fatto, però, più singolare che incontrammo nelle nostre ricerche fu quello di aver trovato qualche Anuro, che non soltanto permetteva il diffe-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia e Embriologia comparate della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 21 giugno 1936.

(3) Questi « Rendiconti », seduta del 5 giugno 1936.

(4) « Jour. Exp. Zool. », 69, 235-260, 1934.

renziamento degli abbozzi di Urodeli trapiantati, ma che dava modo (*Hyla arborea*) agli abbozzi di *Triton* di mostrare una maggiore resistenza alla distruzione, che non nei trapianti inversi. E in una Nota del 4 agosto 1931 (Nota VII) mettevamo in rilievo che: « la vescicola ottica di *Triton taeniatus* e *cristatus* (sia primaria che secondaria o introflessa) trapiantata su embrioni di *Hyla arborea* presenta uno sviluppo di massa e una resistenza maggiore che non l'occhio degli Anuri sugli Urodeli ».

Ci proponevamo di approfondire l'argomento dell'accrescimento degli abbozzi di Anuri posti sugli Urodeli e degli abbozzi degli Urodeli posti sugli Anuri, dove è possibile la compatibilità. Tale studio è fondamentale per il valore interpretativo che abbiamo dato alle nostre esperienze. E risulta tanto più necessario dopo che recenti Autori, che pur fundamentalmente hanno confermato i reperti che corrispondevano colle nostre ricerche, mostrano tuttavia di dissentire da alcune interpretazioni.

Abbiamo dunque voluto riprendere lo studio dell'accrescimento di abbozzi embrionali (vescicola ottica) di Urodeli (*Triton taeniatus*) trapiantati su embrioni di Anuri (*Hyla arborea*) inquantochè troviamo riferito dalla Hewitt che: « The abortive development of xenoplastic urodele grafts may easily be due to factors other than specific toxins, e. g., to the inability of their cells to utilize nourishment furnish ed them by the host ». Purtroppo la Hewitt, obbiettiva nel riferire tanto i nostri risultati, quanto i suoi che utilizzeremo per le nostre considerazioni, non ha ripetuto le nostre esperienze di trapianto di abbozzo di Urodelo su embrioni di *Hyla* perchè: « The size discrepancy between *Hyla* and *Amblystoma* embryos made reciprocal transplantations in this series impossible ».

Ed è invece proprio la differenza di comportamento tra la *Rana esculenta* e l'*Hyla arborea* che ci ha dato i due termini estremi dei processi riguardanti la compatibilità e la incompatibilità embrionale.

La verifica diretta, con altri metodi di indagini, di tale risultato è stata perseguita da Cotronei e Perri (1934-36).

Sappiamo ora che la *Rana esculenta*, altri Ranidi e Bufonidi portano a rapidissima distruzione gli abbozzi di Urodeli trapiantati; vera distruzione necrotica o citolitica e non semplice atrofia. L'*Hyla arborea* invece ha rappresentato finora il massimo grado di compatibilità; massimo, diciamo, perchè superiore a quello da noi rilevato nei trapianti di abbozzi di Anuri su embrioni di Urodeli.

Le esperienze compiute quest'anno ci hanno permesso di seguire l'accrescimento dell'occhio di *Triton* trapiantato su *Hyla* dissociandone nettamente i due periodi: embrionale, in cui si è assorbito anche il vitello dell'ospite, e larvale dopo che l'*Hyla* ha cominciato ad assumere alimento dall'esterno.

Nelle nostre esperienze abbiamo trapiantato la vescicola ottica primaria di *Triton taeniatu*s nella testa o nella regione ventrale di embrioni di *Hyla arborea* allo stadio di bottone codale. Sono stati fissati alcuni esemplari ospiti nel momento in cui l'*Hyla* ha terminato il riassorbimento del vitello di riserva ventrale, conservandone altri per l'ulteriore accrescimento larvale, nutrendoli con tuorlo d'uovo.

Questi esemplari sono stati fissati successivamente a periodi vari. Per alcuni casi sono stati fissati contemporaneamente per controllo embrioni di tritone.

Le nostre osservazioni che brevemente riassumiamo ci hanno mostrato che l'occhio di *Triton* posto su *Hyla* si accresce tanto durante il periodo embrionale, quanto durante il periodo larvale dell'ospite.

Diamo qui alcune misure della retina e del cristallino degli abbozzi oculari di *Triton* trapiantati su *Hyla*, e di *Triton* rimasti *in situ*, al termine del riassorbimento vitellino. Diametro massimo dell'occhio di *Triton* trapiantato su *Hyla*: μ 400; diametro massimo del suo cristallino: μ 144.

Diametro massimo dell'occhio di *Triton* di controllo: μ 410; diametro massimo del suo cristallino: μ 150.

Questi reperti che noi riferiamo come indicatori, e che vanno aggiunti agli altri da noi ottenuti precedentemente, dimostrano che l'occhio di *Triton* trapiantato su *Hyla* ha utilizzato il vitello dell'ospite, dopo che ha esaurito il proprio vitello endocellulare.

Per quanto non intendiamo con i dati esposti delimitare rigorosamente l'accrescimento dell'occhio al termine del vitello, tuttavia è evidente che l'occhio di *Triton* si è accresciuto utilizzando il vitello di riserva dell'*Hyla*.

Ma le precedenti osservazioni sono state integrate dallo studio dell'accrescimento successivo dell'occhio trapiantato. Questo accrescimento è stato assai cospicuo durante il periodo larvale dell'*Hyla* ospite. Infatti dopo 33 giorni dall'operazione, e cioè dopo 20 giorni dall'inizio dell'assunzione dell'alimento dall'esterno (tuorlo d'uovo) da parte dell'*Hyla* ospite, abbiamo che l'occhio di *Triton* ha raggiunto le seguenti dimensioni: diametro massimo dell'occhio di *Triton*: μ 640; diametro massimo del suo cristallino: μ 240.

Altri esemplari di *Hyla* ospiti fissati 39 giorni dopo l'operazione, e cioè 26 giorni dopo l'assunzione dell'alimento dall'esterno, hanno mostrato l'occhio di *Triton* accresciuto e raggiungente le seguenti dimensioni in un caso che riferiamo come indicativo.

Diametro massimo dell'occhio: μ 688; diametro massimo del suo cristallino: μ 256.

I calcoli eseguiti per ora sui volumi raggiunti dal cristallino, che si presta per la sua forma pressochè sferica a misure sufficientemente esatte, ci hanno dimostrato un volume circa 5.6 volte maggiore rispetto a quello calcolabile al termine dell'assorbimento vitellino.

Pochi giorni dopo aver fissato questi esemplari, mostrandoti l'occhio trapiantato di *Triton* accresciuto così notevolmente, si notano in altri ospiti netti segni di distruzione a carico del trapianto.

Le presenti osservazioni ci hanno dunque dimostrato che l'occhio di *Triton* trapiantato su *Hyla* si accresce non soltanto utilizzando il vitello dell'ospite (*Hyla*); ma che è capace anche di utilizzare per un periodo notevole di tempo i materiali nutritivi assunti dall'*Hyla* dall'esterno ed elaborati da essa.

Queste esperienze così diverse da quelle di trapianti di abbozzi oculari di *Triton* su embrioni di *Rana esculenta* ci mostrano, come abbiamo già detto, due termini estremi. La vescicola ottica di *Triton* su embrioni di *Rana esculenta* va distrutta quando ancora nelle sue cellule sono contenuti corpuscoli vitellini. È questo un fatto ben accertato dalle nostre esperienze. Nè vale riferirsi a condizioni speciali operate dal freddo (Hewitt) perchè il fatto positivo non viene infirmato (si consultino le esperienze di Perri, 1932). Holtfreter⁽¹⁾ di recente ha confermato che gli abbozzi di Urodeli trapiantati su *Rana esculenta* vanno distrutti con frammentazione in 2-4 giorni. Le esperienze su l'*Hyla* hanno invece dimostrato che l'occhio di *Triton* utilizza ottimamente il nutrimento embrionale e larvale dell'ospite.

L'interpretazione che mostra di seguire la Hewitt che « l'abortivo sviluppo » di trapianti di abbozzi di Urodeli su Anuri, piuttosto che a fattori dovuti a specifiche tossine, sia determinato dall'incapacità di utilizzare il nutrimento dell'ospite, dall'incapacità di eliminare prodotti di escrezione elaborati da essi e dalle altre possibilità risultanti dalle discrepanze tra il grado di differenziazione dell'ospite e del trapiantato, è completamente sommersa dalle esperienze che abbiamo riassunte.

Cade la prima ipotesi della Hewitt perchè l'abbozzo oculare di *Triton* su *Rana esculenta* può essere distrutto senza che riesca neppure a utilizzare il proprio vitello endocellulare (Ved. ricerche di Perri e relative figure, 1932).

Il non poter eliminare prodotti di escrezione non potrebbe spiegare la rapidissima distruzione dell'abbozzo oculare di *Triton* su *Rana* a temperatura piuttosto elevata.

E poi perchè nelle esperienze di Spirito (1932) e negli espianti (Cotronei e Perri, 1934-1936), quando si riescono ad eliminare « le nostre sostanze tossiche citolizzanti », i trapianti e gli espianti procedono nello sviluppo? Quindi sono le sostanze citolizzanti che distruggono. La mancata utilizzazione del nutrimento è quindi effetto e non causa dei risultati sfavorevoli.

La controprova di queste considerazioni è data con ancor maggiore evidenza dai risultati ottenuti usando l'*Hyla* come ospite. In questo caso non vi è antagonismo di nutrizione. Non vi è stata difficoltà di eliminazione

(1) « Roux' Archiv », 133, 1935.

di prodotti di escrezione che ostacolassero lo sviluppo, perchè vi è stato un accrescimento molto notevole.

E dati i risultati positivi raggiunti con l'*Hyla* ospite si dimostra che anche le « discrepancies » non sono l'elemento che ha influito nei ben differenti risultati ottenuti con l'abbozzo oculare di *Triton* trapiantato su *Rana esculenta*.

Tuttavia soltanto più tardi l'occhio di *Triton*, differenziatosi e accresciutosi molto notevolmente sull'*Hyla* (più che quelli degli Anuri posti sugli Urodeli), va fatalmente distrutto.

L'interpretazione che noi crediamo di dare a quest'ultimo risultato è che, pur con la compatibilità di nutrimento e con la possibilità degli scambi respiratori ecc., assicurati dalla stabilita irrorazione sanguigna dell'occhio trapiantato, in quest'ultimo si accumulano lentamente prodotti tossici che fatalmente finiscono con ucciderlo.

Le osservazioni sopra esposte ci hanno dimostrato due modalità ben differenti di comportamento degli abbozzi di Urodeli trapiantati su Anuri. Teniamo a riferire che una terza modalità, anche essa differente dalle precedenti, è quella che si verifica nei trapianti di abbozzi di Anuri su Urodeli. Tutto lascia ritenere, e le osservazioni tuttora in corso sugli abbozzi oculari ci convalidano in questa opinione, che la compatibilità embrionale degli abbozzi di Anuri sugli Urodeli, da noi ammessa da molti anni, si espliciti unicamente, crediamo, con l'utilizzazione del vitello dell'ospite. Al termine del vitello di quest'ultimo le nuove condizioni biochimiche si palesano con processi di rapida distruzione per alcuni abbozzi; meno rapida per altri. Per l'occhio noi abbiamo ammesso una rapida distruzione.

A questo proposito ci richiamiamo a quanto dice la Hewitt, che, pur confermando in sostanza la distruzione larvale, tende ad ammettere che le sue esperienze mostrino che le parti trapiantate di Anuri su Urodeli conservano la loro integrità per un lungo tempo e si riferisce agli strati retinici di un caso tenuto in vita per 27 giorni dopo che l'ospite (*Amblystoma punctatum*) ha iniziato la sua vita larvale⁽¹⁾. Ma aggiunge: « The pigment epithelium does not usually maintain itself for as long a time as the other layers of the retina. It may lose its normal smooth appearance as early as 18 days after transplantation and in 60 per cent of the cases fixed 4 weeks or more after operation the pigment epithelium was lumpy and fragmented ».

Soltanto in due casi tenuti più lungamente in vita lo strato pigmentato era sufficientemente normale. Questi risultati che la Hewitt obbiettivamente riferisce, come noi abbiamo obbiettivamente riferito tutti i risultati della nostra scuola, sono la più chiara e sicura conferma di quanto noi sosteniamo da tempo.

(1) Sarebbe importante conoscere i dati riguardanti la temperatura durante questa esperienza.

Quando si tiene presente lo stadio di operazione della Hewitt e i giorni che debbono intercorrere tra operazione e inizio della assunzione dell'alimento dall'esterno, possiamo bene concludere che anche nelle esperienze della Hewitt si sono manifestate, nel momento biologico da noi indicato, le proprietà citolizzanti dell'Urodelo ospite verso l'abbozzo di Anuro trapiantato, che in pochi giorni hanno già palesato nelle parti più sensibili i segni della loro distruzione.

Vogliamo concludere, rispondendo alle considerazioni della Hewitt, che ci sembra che siano le parti di organo che prima si distruggono, e non quelle più resistenti, a mostrarci l'iniziarsi delle condizioni citolizzanti. Le variazioni individuali non possono stupire in quest'ordine di fenomeni.

Biologia. — *Scarica del protoplasma per sottrazione degli elettroliti dal mezzo ambiente in cellule di tessuti coltivate «in vitro»* ⁽¹⁾. Nota di H. GROSSFELD, presentata ⁽²⁾ dal Socio G. LEVI.

Le particelle del protoplasma per essere disperse debbono avere una carica determinata, la quale è connessa allo stato di idratazione variabile delle medesime; tale carica agisce in contrasto colle forze di attrazione delle particelle, alle quali appartiene anche la tensione superficiale.

Partii dal presupposto che la carica e con ciò lo stato di dispersione delle particelle del protoplasma dipenda dagli ioni dei sali disciolti nel mezzo di dispersione del protoplasma; essi formerebbero un doppio strato elettrocinetico sulle grosse particelle non diffusibili del protoplasma, le quali con ciò sono respinte le une dalle altre.

Vi è una relazione tra gli ioni del protoplasma, cioè tra lo stato di carica e di dispersione delle particelle del protoplasma e la quantità di ioni del liquido ambiente, il quale costituisce il mezzo in cui la cellula vive? E di quale natura è tale relazione? Se tale rapporto sussiste, gli ioni dei sali disciolti nel mezzo di dispersione del dispersoide protoplasmatico dovrebbero trovarsi in un certo equilibrio cogli ioni del liquido esterno; se così fosse diverrebbe possibile di agire sperimentalmente dal mezzo sullo stato di carica delle particelle protoplasmatiche non diffusibili. Si consideri inoltre che, se si tratta di adsorzione di ioni di sali, poichè le particelle protoplasmatiche non diffondono, dovrebbe sussistere un equilibrio Donnan. In tal caso se la quantità di ioni salini che si trovano nel liquido ambiente è troppo piccola, essi dovrebbero diffondere dal protoplasma nel liquido ambiente.

(1) Ricerche eseguite nell'Istituto Anatomico di Torino.

(2) Nella seduta del 5 giugno 1936.

Partendo da questi presupposti ho studiato sperimentalmente il problema. Se allontaniamo quasi del tutto gli ioni di sali dal liquido ambiente, deve sorgere un nuovo equilibrio nel quale gli ioni del protoplasma dovrebbero passare nel mezzo. Ne dovrebbe derivare una distruzione del doppio strato, scarica elettrica ed infine aggregazione e precipitazione delle particelle protoplasmatiche.

Infatti se, in una coltura di cellule cresciute in un mezzo liquido salino, questo viene sostituito con un mezzo del tutto privo di elettroliti, si produce una scarica delle particelle protoplasmatiche, esse manifestano vivace movimento browniano nel protoplasma, quale espressione di un minimo di viscosità, si vede un'aggregazione progressiva delle particelle.

Furono constatati i fatti seguenti:

1° Se in una coltura di cellule il mezzo salino viene sostituito con un mezzo del tutto privo di elettroliti, il che si ottiene mediante lavaggi ripetuti della coltura con acqua distillata, entro pochi secondi interviene il seguente complesso di fenomeni: *a)* le cellule diventano sferiche; *b)* si manifestano nel citoplasma vivaci movimenti browniani dei granuli, quale espressione di una massima diminuzione di viscosità, per effetto di una scarica elettrica ed anche dell'aumentata imbibizione; *c)* un lento processo di coagulazione nel citoplasma segnato dalla comparsa di particelle, che diventano sempre più grossolane, dotate di vivace movimento browniano. L'aumento progressivo nel numero delle particelle risulta con particolare evidenza in campo oscuro, ma il movimento Browniano si distingue anche a luce trasmessa.

2° Singole cellule divenute sferiche, scoppiano ed il contenuto liquido della cellula colle particelle in esso sospese in movimento Browniano fluisce nel mezzo (fenomeno analogo alla fuoruscita dell'emoglobina degli eritrociti in mezzo ipotonico). Talora, dopochè la pressione interna è diminuita, il punto di rottura si richiude.

3° La presenza di anelettroliti nel mezzo (soluzioni $n/38$ — $n/12$ di destrosio, $n/5$ — $n/1$ di urea) non impedisce la comparsa del fenomeno descritto, ma diminuisce, com'è naturale, la vivacità del movimento browniano nel citoplasma.

4° Se la stessa esperienza viene eseguita con acqua distillata alla quale fu aggiunta una piccola quantità di liquido di Ringer (nella proporzione di 10:1) i suddetti fenomeni non si manifestano; però le cellule si alterano fortemente. Se la quantità di liquido di Ringer è ancora minore (20:1) il Rosso neutro non penetra nel protoplasma. Coll'aggiunta di acqua distillata a colture in plasma i fenomeni descritti non si manifestano neppure in grado minimo; però le cellule non assumono il Rosso neutro. L'acqua distillata aggiunta a colture in plasma sottrae adunque dal plasma in un primo tempo una quantità di elettroliti corrispondente a quella di una soluzione di Ringer diluita nella proporzione del 10%—20%.

5° Le sostanze le quali agiscono sulla tensione superficiale accumulate al limite cellulare si addensano dopo la perdita degli elettroliti nell'involucro della cellula. Quest'involucro contenente lipoidi ed acidi grassi viene disciolto (saponificato) immediatamente da mezzi alcalini per cui gli involucri scopiano ed il contenuto fuoriesce.

Inoltre spesso anche al punto neutro si ha, come ho detto, in mezzi privi di elettroliti e fortemente ipotonici una rottura dell'involucro cellulare; l'elasticità di quest'ultimo non può compensare l'aumento troppo rapido di pressione del contenuto. Quest'ultimo fenomeno è analogo alla fuoriuscita dell'emoglobina degli eritrociti nell'emolisi da ipotonia.

6° Il fenomeno testè descritto è reversibile. Se la coltura nella quale le cellule si sono così profondamente modificate viene riportata in un mezzo contenente elettroliti, le cellule riprendono con grande rapidità la forma che avevano, il movimento Browniano cessa immediatamente; se al mezzo salino si aggiunge Rosso neutro, si ottiene tosto colorazione vitale dei vacuoli; ed in presenza di Nero Janus si manifesta colorazione dei mitocondri.

7° La reversione si può avere rapidamente anzichè con liquido Ringer con soluzioni di $\text{Cl Na } n/10$ e parimenti con $\text{Br Na } n/10$. Invece la reversione non si ottiene con NaI , KCl , KBr , KI , LiCl , NH_4Cl , CaCl_2 , MgCl_2 , Na_3PO_4 , Na_2SO_4 .

La reversibilità dei fenomeni, la grande velocità con cui si manifestano, come pure la circostanza che la reversione coll'aggiunta di elettroliti si manifesta molto più rapidamente della fuoriuscita degli elettroliti, dimostrano che si tratta di fenomeni associati a processi di adsorzione.

8° Se cellule coltivate in mezzo liquido sono portate in un mezzo privo di elettroliti con alto contenuto in idrossilioni i fenomeni descritti in *a* e *b* si manifestano con grande intensità e velocità (con Ph ancor più alto si ha la descritta saponificazione e rottura della membrana lipoidea). L'azione dell' OH è analoga a quella del mezzo privo di elettroliti e rinforza quest'ultima. Mi sembra probabile che in tal caso gli idrossilioni molto mobili distruggono uno strato elettrocinetico in particelle, nelle quali un catione partecipa come ione attivo e le scaricano.

9° Il fenomeno descritto si verifica soltanto in cellule viventi; se non si produce, quest'è un segno sicuro della morte.

I risultati delle esperienze dimostrano adunque l'attendibilità della mia ipotesi. Viene inoltre dimostrato che l'emolisi da ipotonia del mezzo è un caso particolare di un fenomeno generale nelle cellule dei tessuti. È lecito dedurre da queste esperienze che nei tessuti come nelle cellule coltivate in vitro gli ioni salini del liquido dei tessuti hanno un'importanza essenziale nel mantenere la carica delle particelle del protoplasma.

Botanica (Citologia generale). — *Leucosterinoplasto*⁽¹⁾. Nota di R. SAVELLI, presentata⁽²⁾ dal Socio B. LONGO.

I fatti qui consegnati costituiscono l'attesa conferma di una previsione da me formulata nel 1933. A quel tempo si doveva considerare caduta la concezione di quei citologi che avendo studiato certe formazioni lipidiche le avevano battezzate « oleoplasti », cioè organiti formatori di secrezione oleosa. Se pur tale termine si conserva nell'uso, per corpi come quelli che io stesso ho lungamente osservato, per es., nell'*Haemanthus coccineus* L., si deve intendere che tale termine ha assunto un senso convenzionale tutto diverso dal primitivo; perchè non si tratta affatto di plastidi. Ma gli eleosomi (così io li chiamerei), illustrati in modo particolarmente vasto dal Politis, sono — almeno — produzioni localizzate nel citoplasma: nel preteso « sterinoplasto » di Mirande, invece, si tratta addirittura di concrezioni vacuolari. Eppure, ciononostante, questo screditato concetto, così passato di errore in errore, veniva da me raccolto nel 1933, a séguito della mia scoperta dell'*eleocloroplasto*: io, guidato da concetti teorici, e da una certa idea intorno alle capacità funzionali del plastidio, esprimevo allora la fiducia « che plastidi non clorofillici elaboratori di lipidi fossero molto probabilmente esistenti, e che bisognasse cercarli » (« Note Bot. e Biol. », 1933, p. 140). Ciò equivaleva ad esprimere la convinzione che il voluminoso secreto lipidico del mio *eleocloroplasto* non fosse necessariamente un risultato delle trasformazioni della clorofilla, un prodotto diretto e collaterale del suo lavoro. Giusta questa concezione, avrebbe dovuto essere possibile trovare anche tra i leucoplasti il caso parallelo dell'*eleocloroplasto*: cioè un leucoplasto specializzato nella elaborazione di lipidi; e — se veramente « specializzato » — conservante naturalmente tale funzione, in modo esclusivo o prevalente, anche NELLA FASE ADULTA: uno sterinoplasto aclorofillico, nel caso del più stretto parallelismo.

Ma io — devoto soprattutto alle verità di fatto — non mancavo neppure di segnalare (op. cit., p. 139) che pel momento le osservazioni non avvaloravano il mio modo di vedere, perchè in *Cephalocereus euphorbioides*, seguendo il plastidio dagli strati più nettamente assimilatori ed illuminati, verso quelli più interni, si vedeva che col graduale scomparire della clorofilla tendeva a scomparire anche il secreto sterinico, per far luogo, probabilmente⁽³⁾, ad un plastidio esclusivamente amilifero.

A due anni di distanza, un materiale più favorevole e meglio disponibile ha risolto la questione. Ho usato: *Echinocereus leptacanthus*, penta-

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico della Università di Catania.

(2) Nella seduta del 21 giugno 1936.

(3) Io ero costretto ad evitare ferite troppo profonde, e perciò non avevo osservazioni complete.

lophus, *acifer*, *leonensis*, e *phoeniceus*: nei primi quattro le mie osservazioni furono sommarie, il quinto costituì il materiale d'elezione, in cui i fatti, oltre ad essere indubbi sono anche di agevole osservazione perchè in esso ciò che costituisce il punto sostanziale da vedere, cioè l'esistenza dello *stroma elaboratore*, vivente, d'origine mitocondriale, è facilmente dimostrabile, meglio che nelle altre quattro specie. Però non v'è dubbio che i fatti sieno sostanzialmente identici in tutte e cinque le specie esaminate. La dimostrazione speciale di un tale stroma elaboratore e della sua origine dal condrioma è un fuor d'opera per il cloroplasto, dove la clorofilla basta ad attestare di che si tratta; ma non potrebbe trascurarsi assolutamente nel caso di un corpo incolore che voglia omologarsi ad un plastidio, e la storia tracciata nelle prime righe di questa Nota ammonisce. Le regioni da studiare sono: la parte più centrale dell'asse, costituente un parenchima bianco; l'epidermide, e fors'anche quegli strati sottoepidermici che Schleiden considera come « ipoderma »; sul quale peraltro io non ho sostato, per cui mi occuperò solo delle prime due localizzazioni.

Il parenchima centrale contiene leucoplasti che allo stato adulto presentano forma corrispondente a quella dell'eleocloroplasto; con una grossa sferula lipidica, e una ridottissima coppa stromatica, con due, tre o più granelli d'amido, grossetti, ma sempre molto piccoli rispetto al volume della sferula lipidica: è un leucoplasto che elabora pochissimo amido e molto lipide. Tra i *nicols* incrociati, solo pochi granelli d'amido danno croce nera, e l'amido che non dà tale fenomeno appartiene alla varietà speciale che io ho già illustrato in molte Cactacee. Neanche la sferula lipidica *non dà*, nelle stesse condizioni, i fenomeni ottici che ho illustrato per la sferula dell'eleocloroplasto di *Ceph. euphorbioides*: tali proprietà ottiche, contrariamente a quanto generalmente si ritiene, non hanno valore per trarne deduzioni microchimiche. Nell'osservazione in campo oscuro, sferule lipidiche e granelli di amido risultano disegnati da contorni luminosi, la loro massa rimanendo otticamente vuota.

Fu per me una sorpresa trovare in ogni cellula epidermica 20-30 leucoplasti, buon numero dei quali — come spesso sogliono i plastidi — fanno corona al nucleo; e a prima impressione sono ridotti soltanto ad una vescicola di lipide perfettamente sferica, cui, da molte misure, assegnerei circa 800-900 micron cubici di liquido. Le proprietà ottiche del lipide sono identiche a quelle dette sopra. Qui, più che per i leucoplasti del parenchima interno, la tecnica mitocondriale è necessaria: da preferire il Regaud. Per questi leucoplasti epidermici l'amido ha una esistenza affatto transitoria. Si può dire che questi epidermici, anche meglio di quelli della parte midollare, sieno veramente i lipidoplasti più altamente specializzati. In essi la parte stromatica, d'origine mitocondriale, la parte veramente viva ed elaborante, s'assottiglia tanto da essere quasi inapprezzabile all'osservazione ordinaria; io ritengo anzi che in qualche caso realmente scompaia, ed il vantaggio

della specie *phoeniceus* sulle altre quattro, cui ho sopra accennato, consiste appunto nel fatto che in questa specie il tenue rivestimento stromatico persiste più a lungo: ciò determinò la mia preferenza. Quanto alla estrema attenuazione della parte elaborante, si ricordi che avviene perfettamente la stessa cosa per i leucoplasti elaboratori di grossi granelli d'amido, p. es., della Patata, e difatti osservatori anche eminenti negarono lungamente che l'amido di talune piante superiori derivasse dall'attività di particolari organiti, i plastidi. Ed in questa epidermide abbiamo bene un caso corrispondente, per il lipide, che è in massa così trasmodante rispetto al plastidio elaboratore.

La dimostrazione che l'elaborato sia almeno in massima parte sterinico fu relativamente facile per il leucoplasto della parte parenchimatica. Per la reazione di Liebermann, com'io la pratico, è utile aggiungere un'altra avvertenza: lasciare libero accesso all'aria mentre viene praticata, cioè non coprire col coprioggetti se non quando la reazione è già pronunciata. Tuttavia, il viraggio di colore dal violetto tende piuttosto al bleu, e lascia supporre che si sia realizzata, più propriamente, la variante di Schulze. Dove la cosa diventa veramente ardua, è per i leucoplasti epidermici: se la reazione riesce una volta su dieci, ci si può ritenere fortunati; io l'ho vista nettissima fino al violetto-bleu *prima che le sferule confluissero*. Quando la reazione riesce, si osserva una specie di smistamento interno per cui la gocciola primitiva appare ora come una grossolana emulsione di goccioline violette inglobate da un altro liquido incolore: ciò è tuttavia troppo poco per concludere che effettivamente nella gocciola lipidica il componente sterinico si trovi mescolato ad altra sostanza. Questo, tuttavia, è molto probabile, e servirebbe a spiegare anche altri fatti.

Un inconveniente grave che intralcia l'osservazione per l'epidermide, e che invece non si verifica per il parenchima centrale, consiste nel fatto che le cellule epidermiche contengono sostanze - estranee all'elaborato del plastidio - che reagiscono in verde coll'acido solforico; tali sostanze io le ho incontrate spesso in varie Cactacee, e bisogna stare in guardia circa la possibilità di equivoci, ai fini della reazione di Liebermann.

Intendo ben chiarire un punto: parlando di *leucoplasti* io non intendo escludere l'esistenza transitoria, in fase giovanile, di un po' di clorofilla; anzi questa è la norma anche per molti leucoplasti amiliferi accuratamente studiati; ma la esigua quantità di clorofilla esistente per un fugace momento, è assolutamente al disotto di qualsiasi proporzione fisiologica con l'enorme massa dell'elaborato lipidico; e questo a me basta, per il lato che m'interessa.

Per il parallelismo con l'eleocloroplasto avrei dovuto chiamare questi organiti eleoleucoplasti; ma evidentemente tale termine è da ripudiarsi per ragione fonetica; e finchè non sieno dimostrati altri casi con lipidi di tutt'altra natura, io preferirò il nome messo in testa a questa Nota.

Fisiologia. — *Sulla velocità di accrescimento dell'uovo di gallina* ⁽¹⁾. Nota di ANTONIETTA ORRÙ, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. S. VISCO.

Sitowski ⁽³⁾ fu il primo che, nel 1905, nel corso di una serie di indagini da lui intraprese per risolvere alcuni problemi di digestione in alcuni lepidotteri, scoperse un deposito di Sudan III, nelle uova delle forme studiate.

Riddle ⁽⁴⁻⁵⁾, nel 1907, descrisse e dimostrò il depositarsi del Sudan III nell'uovo della gallina domestica. Egli si servì del Sudan per numerose ricerche, alcune delle quali lo portarono a poter stabilire il grado di accrescimento quotidiano delle uova delle galline e delle tartarughe. Secondo i risultati delle sue ricerche, somministrando ad una gallina Sudan III, ad intervalli regolari di 36-48-72 ore, l'uovo da essa deposto dovrebbe mostrare, in sezione, una serie di cerchi concentrici, uniformemente spazati, di color rosso arancio, alternati con altri di color giallo pallido. Lo spessore di ogni cerchio colorato con Sudan, sempre secondo il Riddle, potrebbe essere regolato a piacere: molto colore darebbe spessi anelli di rosso; poco colore anelli di spessore minore e di colore meno intenso. Se le galline vengono uccise qualche ora dopo la somministrazione di Sudan III, tutte le uova più grandi si trovano colorate in rosso intenso nella parte più esterna; se però esse vengono uccise uno o due giorni dopo la somministrazione della sostanza colorante, le uova saranno esternamente perfettamente normali e soltanto un esame dell'interno farà rilevare la presenza del colore. Ciò è una evidente conseguenza della sovrapposizione di nuovi strati di tuorlo a quelli formati nei giorni in cui fu somministrato il Sudan.

Con questo metodo, il Riddle misurò la velocità di accrescimento del tuorlo dell'uovo di gallina, e trovò che essa può variare da zero a 2 millimetri al giorno.

La somministrazione di sostanze coloranti capaci di essere depositate nel tuorlo, mi è sembrata costituire un metodo suscettibile di una più precisa applicazione per la determinazione del tempo minimo occorrente alla gallina per la formazione dell'intero uovo, del tuorlo, e dell'albume e del guscio.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia generale della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 5 giugno 1936.

(3) L. SITOWSKI, «Bull. intern. de l'Académie des Sciences de Cracovie», 1905.

(4) O. RIDDLE, *The rate of growth of the egg yolk of the chick and the significance of white and yellow yolk in the ova of vertebrates*. «Abstract. Science», N. S., vol. 27, p. 945, 1908.

(5) O. RIDDLE, «Journal of Exp. Zoology», vol. 8, p. 163, 1910.

Per questa indagine ho adoperato Sudan III, Rosso scarlatto e Bleu Nilo. Tutte e tre queste sostanze si ritrovano con le stesse modalità nel tuorlo; però il maggior numero delle esperienze sulle quali qui riferisco, sono state eseguite mediante la somministrazione di Sudan III.

A diverse galline ho somministrato una sola volta dai 20 ai 30 cg. di Sudan III impastato con farina, con burro, o con grasso animale di deposito. Le uova deposte dopo la somministrazione del Sudan si sono fatte bollire per 10 minuti, e i tuorli, liberati dal bianco, sono stati divisi in due parti con un sottilissimo filo, curando che il piano di sezione cadesse lungo la macula germinativa. Le osservazioni fatte sono le seguenti:

a) Soltanto i tuorli delle uova deposte dopo almeno 48 ore dalla somministrazione del Sudan III, Rosso scarlatto e Bleu Nilo, risultavano colorati; quelli delle uova deposte prima di questo periodo di tempo non hanno mostrato mai nessuna colorazione imputabile alle sostanze colorate somministrate.

b) Nelle uova deposte subito dopo trascorse le prime 48 ore dalla somministrazione delle sostanze colorate, il tuorlo risulta colorato soltanto nella parte più esterna; in quelle deposte nei giorni successivi l'anello colorato si trova sempre più spostato verso l'interno, a misura che ci si allontana dalla data di somministrazione delle sostanze coloranti. L'anello più interno è contiguo alla latebra, la quale spesso appare anch'essa colorata, sebbene molto debolmente.

c) Lo spessore degli anelli colorati è pressochè identico indipendentemente dal loro diametro, ed è di circa mm. 1-1,5.

Nella tabella I riassumo i dati delle esperienze eseguite.

La figura 1 riproduce fotograficamente uova con anelli colorati formati in 4 stadi successivi di sviluppo.

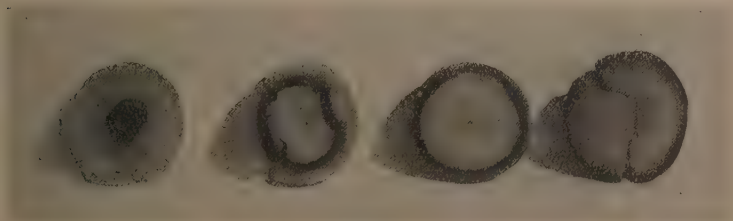


Fig. 1.

TABELLA I.

Numero delle esperienze	Colore somministrato	Data di somministrazione	Data di					
			1° uovo	2° uovo	3° uovo	4° uovo	5° uovo	6° uovo
I	cgr. 25 di Sudan III	9 giugno	11 giugno tuorlo colorato	12 giugno tuorlo colorato	14 giugno tuorlo colorato	15 giugno tuorlo colorato	16 giugno tuorlo colorato	17 giugno tuorlo colorato
II	cgr. 25 di Sudan III	26 giugno	27 giugno tuorlo non colorato	28 giugno tuorlo colorato	30 giugno tuorlo colorato	1 luglio tuorlo colorato	2 luglio tuorlo colorato	4 luglio tuorlo colorato
III	cgr. 25 di Sudan III	14 agosto	14 agosto dopo 8 ore tuorlo non colorato	15 agosto tuorlo non colorato	16 agosto tuorlo colorato	18 agosto tuorlo colorato	20 agosto tuorlo colorato	24 agosto tuorlo colorato
IV	cgr. 25 di Sudan III	8 giugno	9 giugno tuorlo non colorato	11 giugno tuorlo colorato	13 giugno tuorlo colorato	16 giugno tuorlo colorato	18 giugno tuorlo colorato	21 giugno tuorlo colorato
V	cgr. 25 di Sudan III	29 maggio	8 giugno tuorlo colorato	10 giugno tuorlo colorato alla latebra	12 giugno tuorlo non colorato	—	—	—
VI	cgr. 20 di Sudan III	6 aprile	7 aprile tuorlo non colorato	8 aprile tuorlo non colorato	10 aprile tuorlo colorato	11 aprile tuorlo colorato	13 aprile tuorlo colorato	19 aprile tuorlo colorato alla latebra
VII	cgr. 20 di Sudan III	6 aprile	7 aprile tuorlo non colorato	8 aprile tuorlo colorato	10 aprile tuorlo colorato	12 aprile tuorlo colorato	14 aprile tuorlo colorato	16 aprile tuorlo colorato
VIII	cgr. 20 di Sudan III	7 aprile	7 aprile dopo 5 ore tuorlo non colorato	9 aprile tuorlo colorato	11 aprile tuorlo colorato	13 aprile tuorlo colorato	15 aprile tuorlo colorato	18 aprile tuorlo colorato
IX	cgr. 20 di Sudan III	7 aprile	7 aprile dopo 6 ore tuorlo non colorato	13 aprile tuorlo colorato	15 aprile tuorlo colorato	16 aprile tuorlo colorato	18 aprile tuorlo colorato	20 aprile tuorlo non colorato
X	cgr. 15 di Bleu Nilo	14 agosto	14 agosto dopo 8 ore tuorlo non colorato	16 agosto tuorlo colorato	20 agosto tuorlo colorato	22 agosto tuorlo colorato	24 agosto tuorlo colorato	26 agosto tuorlo colorato
XI	cgr. 20 di Scharlacht R.	2 settembre	4 settembre tuorlo non colorato	5 settembre tuorlo colorato	6 settembre tuorlo colorato	8 settembre tuorlo colorato	9 settembre tuorlo colorato	12 settembre tuorlo colorato

TABELLA I.

Esempio del:						Tempo decorso tra la somministrazione del colore e la deposizione del	
1° uovo	8° uovo	9° uovo	10° uovo	11° uovo	12° uovo	primo uovo con tuorlo colorato	ultimo uovo con tuorlo colorato
giugno tuorlo colorato	20 giugno tuorlo colorato	21 giugno tuorlo colorato	27 giugno tuorlo colorato alla latebra	23 giugno tuorlo non colorato	24 giugno tuorlo non colorato	2 giorni	13 giorni
luglio tuorlo colorato	6 luglio tuorlo colorato	7 luglio tuorlo colorato	8 luglio tuorlo colorato	9 luglio tuorlo colorato alla latebra	—	2 giorni	13 giorni
agosto tuorlo colorato	26 agosto tuorlo colorato	29 agosto tuorlo colorato alla latebra	31 agosto tuorlo non colorato	1 settembre tuorlo non colorato	2 settembre tuorlo non colorato	2 giorni	15 giorni
giugno tuorlo colorato	—	—	—	—	—	3 giorni	15 giorni
—	—	—	—	—	—	10 giorni	12 giorni
aprile tuorlo colorato	—	—	—	—	—	4 giorni	13 giorni
aprile tuorlo colorato	19 aprile tuorlo colorato alla latebra	21 aprile tuorlo debolmente colorato	22 aprile tuorlo non colorato	—	—	2 giorni	15 giorni
aprile tuorlo colorato	21 aprile tuorlo non colorato	—	—	—	—	2 giorni	13 giorni
—	—	—	—	—	—	6 giorni	11 giorni
agosto tuorlo colorato	29 agosto tuorlo non colorato	30 agosto tuorlo non colorato	1 settembre tuorlo non colorato	2 settembre tuorlo non colorato	—	2 giorni	13 giorni
settembre tuorlo colorato	16 settembre tuorlo non colorato	18 settembre tuorlo non colorato	—	—	—	3 giorni	12 giorni

L'ultimo tuorlo colorato di ogni serie, ed in cui lo strato colorato circo-
scrive la latebra, entrò nella fase di accrescimento il giorno stesso in cui
alla gallina venne somministrata la sostanza colorante. Il tempo intercorso
da quel giorno alla deposizione di questo uovo rappresenta il tempo che è
occorso alla gallina per la formazione del tuorlo, dell'albume e del guscio.
Deducendo da questo tempo quello occorrente per l'elaborazione dell'albume
e del guscio, abbiamo il tempo minimo necessario per la formazione del
tuorlo.

Abbiamo visto come il primo tuorlo colorato venga deposto almeno
48 ore dopo la somministrazione del colore; ciò vuol dire che 48 ore prima
della deposizione questo tuorlo si trovava ancora nell'ovaio, e che conse-
guentemente nello spazio intercorso tra questo momento e la deposizione
dell'uovo si sono verificati i seguenti fatti: completamento dell'accresci-
mento del tuorlo, rottura del follicolo, attraversamento dell'ovidutto, for-
mazione dell'albume e del guscio.

Prendendo quei casi nei quali lo spessore dello strato più esterno co-
lorato è minimo (frazione di millimetro), e che sono quelli nei quali la
deposizione dell'uovo è avvenuta dopo 48 ore dalla somministrazione del
colore, considerando quindi che il tuorlo avendo allora raggiunto quasi il
suo completo sviluppo poco dopo ha abbandonato il follicolo passando nel-
l'ovidutto, tenendo ancora presente che prima della deposizione, l'uovo, già
completo del suo guscio, resta per qualche ora nella porzione vaginale del-
l'ovidutto, possiamo ritenere che il tempo necessario per la formazione del-
l'albume e del guscio non solo non superi ordinariamente le 48 ore, ma
che anzi ne sia alquanto minore.

Sottraendo al tempo minimo necessario perchè sia deposto l'uovo il
cui tuorlo abbia l'anello colorato in contiguità della latebra, queste 48 ore,
abbiamo il tempo minimo occorrente alla gallina in condizioni ordinarie
per la elaborazione del tuorlo. Questo tempo non è stato mai trovato es-
sere inferiore ai 9 giorni.

Non appare quindi confermata dalle mie ricerche l'affermazione del
Mathews che una gallina possa impiegare anche soltanto quattro giorni per
produrre la maggior parte del tuorlo⁽¹⁾.

Dalle esperienze eseguite posso trarre le seguenti conclusioni:

a) Il tempo minimo occorrente ad una gallina per l'elaborazione e
la deposizione di un uovo, è di giorni 11.

b) L'elaborazione del tuorlo si compie al minimo in 9 giorni.

c) La formazione dell'albume e del tuorlo avviene ordinariamente
in uno spazio di tempo inferiore a due giorni.

(1) MATHEWS, « *Physiological Chemistry* », London, 1925, p. 328.

Chimica (Chimica fisica). — *Comportamento della conduttività elettrica dell'albumine di uovo di gallina a temperature crescenti e decrescenti* ⁽¹⁾. Nota di ANTONIETTA ORRÙ, presentata ⁽²⁾ dal Corrisp. S. VISCO.

In una Nota comparsa in questi « Rendiconti » ⁽³⁾ pubblicai i risultati di uno studio da me eseguito sul comportamento della conduttività elettrica del tuorlo dell'uovo di gallina quando se ne fa variare la temperatura. Da quelle indagini risultò fra l'altro come, mediante tale metodo, si possa mettere in vista nel sistema colloidale costituente il tuorlo, l'esistenza di alcune anomale variazioni di conduttività in corrispondenza di determinate temperature che per il sistema definii critiche e che corrispondono alle temperature di coagulazione dei diversi protidi presenti nel tuorlo. Questi risultati mi fecero pensare alla opportunità di estendere le ricerche con lo stesso metodo all'albumine dell'uovo di gallina nell'intento di ottenere qualche dato che permettesse di fare un po' di luce nella complessa e controversa questione della natura e del numero delle proteine in esso presenti.

PARTE SPERIMENTALE.

Tecnica. — Per l'esecuzione di tutte le ricerche di cui è oggetto la presente Nota ho adoperato, salvo casi speciali, uova deposte di recente: al massimo da 24 ore. Aperto l'uovo si fa cadere l'albumine in un recipiente di vetro asciutto e lo si tagliuzzava ripetutamente con un paio di forbici al fine di renderlo il più omogeneo possibile. Ciò fatto se ne preleva la quantità necessaria per la determinazione, e vi si immergono gli elettrodi platinati di recente usando la massima cautela onde evitare che delle bolle di aria restino tra la sostanza e la superficie degli elettrodi. Per la determinazione si è adoperato il dispositivo di Kohlrausch sostituendo un risuonatore a triodi al rocchetto di Rumkhorff. Tutte le ricerche sono state eseguite adoperando sempre la stessa frequenza musicale.

Ricerche. — I) Con questo gruppo di ricerche ho determinato il comportamento della conduttività elettrica dell'albumine dell'uovo di gallina, per ogni

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia generale della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 5 giugno 1936.

(3) A. ORRÙ, *Sul comportamento della conduttività elettrica del tuorlo di uovo di gallina a temperature crescenti e decrescenti*. « Rendiconti R. Acc. Lincei », vol. XXII, ser. 6^a, fasc. 9-10, 1935.

variazione di due in due gradi di temperatura da quella ambiente a quelle di 40-50-60° C, indi, sullo stesso campione di sostanza, da queste temperature a quella di partenza, curando che le diminuzioni di temperatura si verificassero in tempi pressochè uguali a quelli che erano occorsi per gli aumenti. Non ho oltrepassato la temperatura di 60°, ed anzi, soltanto in alcuni casi, ho raggiunto questo valore termico per evitare che coagulassero i protidi presenti nell'album. Esaminando i grafici che esprimono l'andamento delle esperienze si rileva quanto segue:

a) La curva temperatura-conduttività che indica l'andamento del fenomeno nella fase della temperatura crescente coincide, nei limiti degli errori sperimentali, con quella che si ottiene nella fase di temperatura decrescente.

b) La conduttività per ogni grado di aumento della temperatura cresce di un valore costante.

Il grafico n. 1 esprime l'andamento di una di queste esperienze.

II) Con un nuovo gruppo di ricerche ho voluto esaminare le progressive variazioni della conduttività dell'album quando la temperatura si fa salire a valori più alti, cioè al di sopra di quelli necessari per la coagulazione delle proteine in esso presenti. Dai risultati di queste ricerche si rileva che a partire dai 60° C di temperatura per ogni successivo aumento di 2 gradi gli aumenti di conduttività sono meno cospicui di quelli osservati a temperatura inferiore. Questi nuovi valori degli aumenti di conduttività si mantengono press'a poco identici tra 60-62° e 70-72°. Da questo punto essi subiscono un'ulteriore diminuzione. Se raggiunta la temperatura di 80-84° C si raffredda il sistema lentamente, così come era stato riscaldato, e durante la fase del raffreddamento, di due in due gradi si fa di nuovo la determinazione della conduttività, si osserva che i nuovi valori non coincidono con quelli riscontrati nella fase della temperatura crescente essendo essi notevolmente inferiori ai primi.

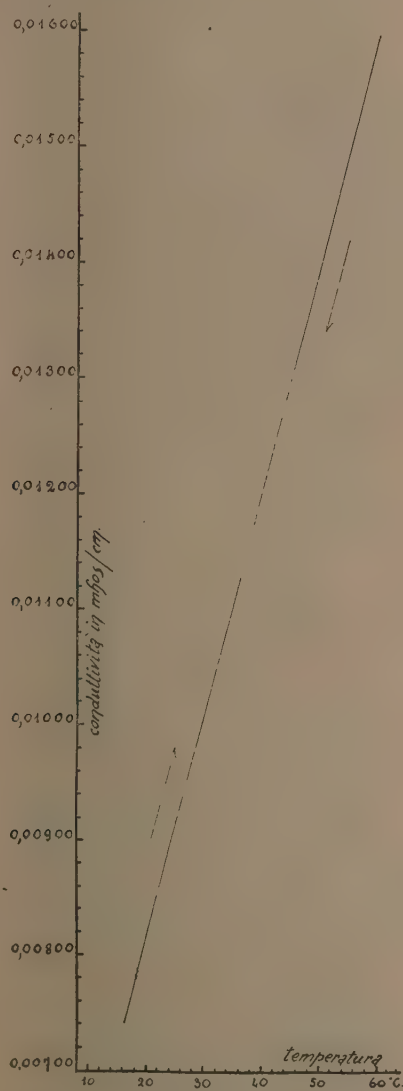
Il grafico n. 2 rappresenta una di queste esperienze.

Questi risultati fanno pensare che al disopra dei 60° C siano intervenute delle modificazioni nello stato chimico fisico del sistema e che l'anomalo comportamento degli aumenti di conduttività registrati ne sia la conseguenza.

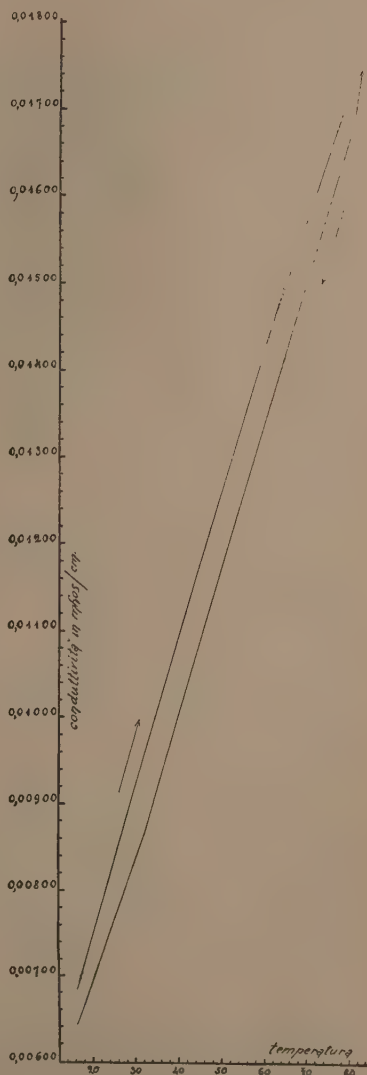
Il fatto mi sembrò di un notevole interesse nei riguardi del problema che volevo studiare e perciò ritenni opportuno definirne meglio il valore e le modalità di estrinsecazione.

III) Il fenomeno osservato poteva dipendere: o da una diminuita mobilità degli ioni presenti nel sistema per la maggiore viscosità del mezzo determinata dalla coagulazione dei protidi, o da una diminuzione del numero degli ioni stessi a causa sempre della coagulazione o da ambedue le cause agenti contemporaneamente; concentrando quindi il bianco dell'uovo le variazioni osservate degli aumenti di conduttività, dovevano certamente assumere valori maggiori, e quindi essere più facilmente analizzabili.

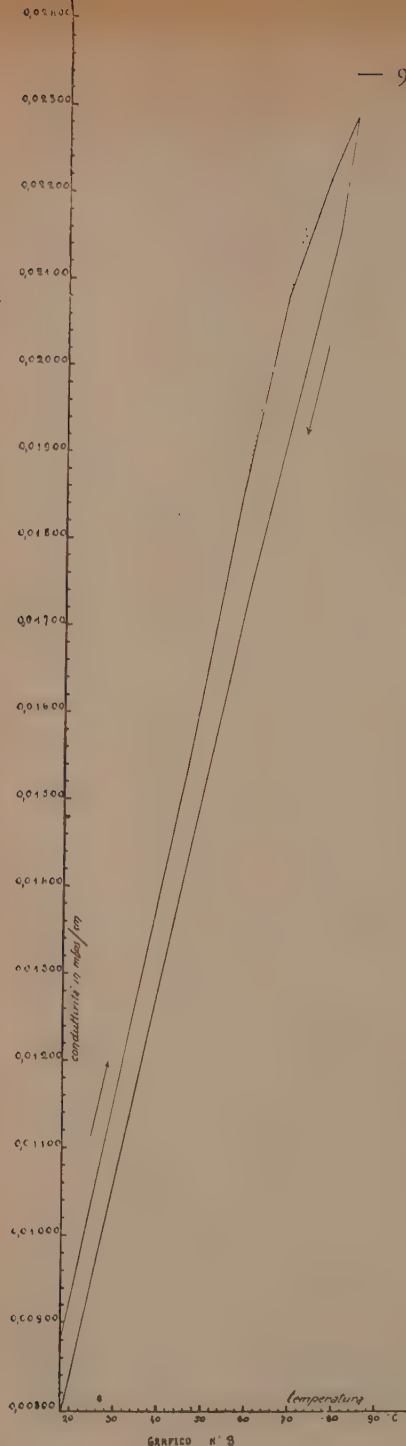
Istituii quindi un 3° gruppo di ricerche su albumi di uovo diversamente concentrati mediante evaporazione nel vuoto. Tutte le esperienze hanno presentato uno stesso andamento delle variazioni di conduttività pur differendo il valore di queste variazioni da esperienza a esperienza in rapporto alla concentrazione fatta subire all'albumi.



GRAPHICO N° 1



GRAPHICO N° 2



Un esame dei dati sperimentamente ottenuti permette di rilevare:

a) a partire da $60-62^{\circ}\text{C}$ l'aumento di conduttività per ogni grado di temperatura risulta inferiore a quello registrato a temperature più basse e precisamente di circa il 15 %.

Vi è dunque per il sistema in esame una prima temperatura critica nei riguardi delle variazioni di conduttività, corrispondente a $60-62^{\circ}\text{C}$.

b) Continuando a riscaldare il sistema tra $68-72^{\circ}\text{C}$ il valore degli aumenti di conduttività per ogni grado centigrado di variazione di temperatura è inferiore di circa il 40 % a quello degli aumenti verificatisi tra $60-62^{\circ}\text{C}$ e $68-72^{\circ}\text{C}$. Vi è quindi una seconda temperatura critica nei riguardi delle variazioni della conduttività; ed essa cade tra i $68-72^{\circ}\text{C}$.

Il grafico n. 3 rappresenta l'andamento di una di queste esperienze.

Le variazioni osservate degli aumenti di conduttività appaiono piuttosto bruscamente. Questo fa pensare che il fenomeno a cui esse sono legate si svolga con notevole rapidità; perciò la conduttività del sistema raggiunge in breve tempo un valore definitivo anche per le temperature definite critiche.

Ho dimostrato nella Nota precedente come ciò non si verifichi affatto per il tuorlo dell'uovo; comunque, per poter eliminare qualsiasi dubbio al riguardo, quando ho osservato nel sistema in esperimento la comparsa di una netta

opalescenza, indizio certo di un processo di coagulazione in atto, ho mantenuta fissa la temperatura per periodi che qualche volta hanno raggiunto anche i 40 minuti; ed ho determinato di tempo in tempo la conduttività del sistema.

Tutte le determinazioni hanno dato sempre lo stesso valore; conseguentemente risulta confermato che la conduttività del sistema raggiunge rapidamente, anche alle temperature critiche, il suo valore definitivo per quelle temperature.

Conclusioni ed osservazioni. — Le esperienze del 1° gruppo dimostrano che il riscaldamento del sistema colloidale rappresentato dall'albumi dell'uovo fino a temperature inferiori a quella di coagulazione delle sue proteine, non ne altera il comportamento della conduttività e quindi la curva che esprime l'andamento della conduttività nella fase della temperatura crescente coincide perfettamente con quella che esprime il fenomeno nella fase della temperatura decrescente.

I risultati del 2° gruppo di esperienze fanno rilevare che se si innalza la temperatura fino ad 80°C circa, provocando così la coagulazione del sistema, la curva che esprime le variazioni di conduttività in funzione della temperatura nella fase della temperatura crescente, non coincide con la curva che si ottiene nella fase della temperatura decrescente.

Sperimentando su albumi d'uovo previamente concentrati queste differenze appaiono ancora maggiori.

Le differenze che si riscontrano per i grafici 2 e 3 sono riportate nella tabella I.

Queste differenze sono in relazione a due almeno aumenti di resistenza che si verificano nel sistema alle temperature di 60–62°C e 68–72°C, temperature che nei riguardi degli aumenti di conduttività del sistema posso chiamare « critiche ».

Questi comportamenti anomali degli aumenti di conduttività debbono essere messi in rapporto con le modificazioni che per effetto del calore subiscono le proteine presenti nel sistema.

Sul numero e sulla natura di tali proteine le nozioni di cui attualmente disponiamo sono scarse, confuse e contraddittorie (1-5). Quello che vi è di più sicuro al riguardo si riduce all'ammissione dell'esistenza di una o più globuline, e di una o più albumine. Parimenti incerti e contraddittori sono i valori delle temperature a cui queste proteine coagulerebbero. Se ci atteniamo a quanto vi è di meno incerto possiamo ammettere che i costituenti

(1) A. P. MATHEWS, « *Physiological Chemistry* ». London, 1925, p. 325.

(2) HAMMARSTEN, *Manuale di Chimica Fisiologica*. Napoli, 1893, p. 284.

(3) R. H. A. PLIMMER, « *Practical Organic and Biochemistry* ». London, 1915, p. 434.

(4) OSBORNE and CAMPBELL, *Protein constituents of egg yolk and egg white*. 23° Report Conn. Agri. Expt. Sta., 339–348, 1900.

(5) KOTO, « *Ztschr. f. Physiol. Chem.* », 47, p. 327, 1904.

TABELLA I.

Temperatura	Differenza di conduttività tra le fasi crescenti e decrescenti della temperatura	
	Bianco normale	Bianco concentrato
18	0.00046	0.00086
20	0.00053	0.00089
22	0.00060	0.00087
24	0.00068	0.00090
26	0.00070	0.00089
28	0.00078	0.00094
30	0.00082	0.00098
32	0.00090	0.00099
34	0.00092	0.00105
36	0.00092	0.00106
38	0.00090	0.00107
40	0.00094	0.00108
42	0.00096	0.00112
44	0.00100	0.00112
46	0.00102	0.00118
48	0.00100	0.00123
50	0.00092	0.00130
52	0.00100	0.00140
54	0.00090	0.00142
56	0.00102	0.00148
58	0.00082	0.00150
60	0.00084	0.00147
62	0.00084	0.00157
64	0.00080	0.00164
66	0.00074	0.00170
68	0.00071	0.00172
70	0.00069	0.00161
72	0.00066	0.00147
74	0.00062	0.00132
76	0.00058	0.00118
78	0.00048	0.00105
80	—	0.00088
82	—	0.00054
84	—	—

proteici principali del bianco dell'uovo siano rappresentati per il 6-7% da globuline e per circa l'80% da albumine. Le prime coagulerebbero tra 57.5 e 65 C e le seconde tra 60-63 e 71-74° C. Molti autori hanno ritenuto di poter suddividere le albumine in parecchie sottospecie ed altrettanto altri hanno creduto di poter fare per le globuline assegnando alle une e alle altre punti termici diversi di coagulazione. Le determinazioni di conduttività da me eseguite hanno messo in vista soltanto due temperature critiche le quali possono mettersi in rapporto: la prima con la coagulazione della frazione globulinica stabilendone la temperatura tra 60-62° C, la seconda con la frazione albuminica, la cui temperatura di coagulazione si troverebbe tra 68 e 72° C. Le oscillazioni delle temperature di coagulazioni osservate tra esperienza ed esperienza, probabilmente debbono essere messe in rapporto con la diversità della concentrazione di sali dovuta al differente grado di concentrazione fatto subire all'albumine.

INDICE DEL VOLUME XXIII, SERIE VI. — RENDICONTI

Primo Semestre 1936.

INDICE PER AUTORI

A

- ABETTI G. — « Altezza della cromosfera nel 1935 ed andamento del ciclo solare ». 463.
- AGAMENNONE G. — « Confronto delle profondità ipocentrali di due recenti terremoti consimili ». 859.
- AGOSTINELLI C. — « Moto generato da una sorgente liquida piana addossata a un profilo rigido rettilineo con formazione di vortici ». 317.
- ID. — « Sul vortice elicoidale ». 670.
- ANDREOLI G. — « Funzioni di composizione di 2^a specie, funzioni di matrici infinite ». 281.
- ID. — « Effetto di tremolio nelle ali ». 506, 566.
- ANDRUETTO G. — « Nuova espressione per la curvatura totale di una superficie ». 95.
- ID. — « Sulle linee ed ipersuperficie geometricamente parallele ». 99.
- ANTONIANI C. e SPIGA CLERICI A. — « Sul metabolismo glucidico della ghiandola mammaria *in vitro* ». 73.
- ARMELLINI G. — « L'eccentricità dei sistemi binari nel caso di masse variabili col tempo ». 165.
- ID. — « Un'erronea obiezione contro l'ipotesi cosmogonica di Laplace ». 277.
- ARRIGHI G. — « Sul problema dell'impulso nei corpi elastici isotropi ». 925.
- ID. — « Sulla variazione di spinta di un liquido pesante in equilibrio ». 929.

B

- BACCAREDDA M. — Vedi NATTA G.
- BAER P. — Vedi BERGAMI G.
- BARBA G. — « Sulla iterazione di una classe di funzioni ». 473.
- BARONI A. — « Solfuro, seleniuro e solfo-seleniuro di solfocianogeno ». 139.
- ID. — « Sui cloruri di solfocianogeno ». 871.
- ID. — « Ossidabilità e struttura di alcuni nerofumi industriali ». 899, 940.
- ID. — Vedi LEVI G. R.
- BASILE A. — « Contributo alla conoscenza della fine struttura della fibra muscolare striata in condizioni normali e patologiche. Nota III. I processi regressivi dei componenti la striatura trasversale ». 534.
- BEMPORAD G. — « Sullo sviluppo delle orbite dei sistemi binari ». 850.
- BENAZZI M. — « Influenza della regione cefalica sul movimento e sulla sensibilità delle Planarie tricladi ». 152.
- ID. — « Razze fisiologiche di "Euplana" gonocéphala" differenziate dalla diversa attitudine alla scissiparità ». 361.
- BERGAMI G. — « Liberazione di una sostanza acetilcolinico-simile dalla superficie di taglio del nervo durante l'eccitamento fisiologico ». 518.
- ID., BAER P. e BOERI E. — « Variazioni dell'escrezione dell'allantoina nel ratto, in rapporto a diete chetogene e antichetogene ». 198.

BERGAMI G., BAER P. e BOERI E. — « La colorimetria durante il periodo dello sviluppo del colore ». 511, 610.

BERLINGOZZI S. e FRANCINI-NALDI G. — « Ricerche sugli aminoacidi rotatori ». 874.

BERNARDINI G. e BOCCIARELLI O. — « Una registrazione a valvole per coincidenze fra contatori a moltiplicazione ». 265.

BETTI M. e LUCCHI E. — « Anomalie nella costante di dissociazione di alcuni acidi organici alogenati ». 465.

BIOCCA E. — « Sulla cristallizzazione della carbossiemoglobina del sangue essiccato di varie specie animali, e su una particolare regola di applicazione medico-legale ». 368.

BLANC A. C. — « Una spiaggia pleistocenica a "Strombus bubonius" presso Palidoro (Roma) ». 200.

ID. — « Giacimento sottomarino a "Ciprina islandica L." nel golfo di Terranova Pausania (Sardegna) ». 695.

BLANC G. A. — « Sulla presenza di "Equus hydruntinus" nelle ghiaie quaternarie dell'Aniene ». 827.

BLASCHKE W. — « Cinematica integrale ». 495, 546.

ID. — « Un contributo alla Cinematica Integrale ». 657, 721.

BOCCIARELLI O. — Vedi BERNARDINI G.

BOERI E. — Vedi BERGAMI G.

BOMPIANI E. — « Sulla normalizzazione delle equazioni differenziali lineari ». 807.

BORTOLOTTI E. — « Trasporti non lineari: geometria di un sistema di equazioni alle derivate parziali del 2° ordine. I. Preliminari ». 16.

ID. — « Trasporti non lineari: geometria di un sistema di equazioni alle derivate parziali del 2° ordine. II. Le proprietà intrinseche del sistema ». 35, 104.

ID. — « Trasporti non lineari: geometria di un sistema di equazioni alle derivate parziali del 2° ordine. III. Altri operatori differenziali intrinseci. Le proprietà descrittive del sistema ». 35, 175.

BOTTINI O. — « Sulla decomposizione termica delle NH_4 -argille ». 142.

BROGGI U. — « Funzioni determinanti e polinomi di Laguerre ». 111.

ID. — « Sulle funzioni determinanti ». 316, 386.

BRUSCAGLIONI R. — « La ricerca del potere risolutivo dei materiali sensibili fotografici con un nuovo tipo di interferometro ». 511, 686.

C

CACCIOPPOLI R. — « Sulla rappresentazione conforme delle superficie ». 287.

CAGLIOTI V. e GIGANTE D. — « Contributo alla conoscenza biochimica delle ossa durante lo sviluppo ». 878.

CALDONAZZO B. — « Vortice libero regolarizzatore nel problema della lamina ». 36.

ID. — « Sopra un problema idrodinamico relativo ad un arco di circonferenza ». 322.

CALOI P. — « Due nuovi tipi di onde sismiche alla luce di una teoria del Somigliana ». 507.

CAMPEDELLI L. — « Un'osservazione sui plurigeneri delle superficie ellittiche di genere $p_g = 0$ ». 495, 548.

CAPRARO V. — Vedi ZAGAMI V.

CARBONARO C. — « Sulle funzioni di una variabile biduale totalmente derivabili ». 839.

CARTENÌ A. e VACCA C. — « Composizione chimica e valore energetico di diete consumate in due Colonie marine ». 216.

CASTELLI I. — « Larghezze equivalenti e intensità centrali delle righe di assorbimento nello spettro del Sole al centro e ai lembi ». 769.

CENTOLA G. — « Idratazione e struttura dell'amido ». 617.

ID. — « Struttura dell'acetilcellulosa solubile in acetone o "cellite" ». 788.

ID. — « Relazioni fra struttura e proprietà meccaniche di pellicole e fili di acetilcellulosa ». 881.

- CESARIS-DEMEL A. — « Commemorazione del Socio Nazionale Ettore Marchiava ». 230.
- CHECCHIA-RISPOLI G. — « Su di una Echinofauna pliocenica dei dintorni di Lentini (provincia di Siracusa) ». 383.
- CHERUBINO S. — « Sulla riduzione delle matrici a forma canonica ». Nota I. 478.
- ID. — « Sulla riduzione delle matrici a forma canonica ». Nota II. 496, 647.
- ID. — « Sulle radici caratteristiche delle funzioni olomorfe di matrici ». 846.
- CHISINI O. — « Sulla curva di diramazione dei piani multipli ». 22.
- CINQUINI S. — « Sopra le equazioni funzionali non lineari nel campo analitico ». 483.
- CISOTTI U. — « Effetti di zavorra dovuti a una doppietta ». 253.
- ID. e MASOTTI A. — « Effetti di zavorra nello spazio ». 3.
- CONTI G. — « Relazioni tra la temperatura invernale e la temperatura estiva a Roma ». 333.
- COTRONEI G. e PERRI T. — « Ulteriori ricerche sulle compatibilità ed incompatibilità embrionali negli Anfibi studiate col metodo degli espianti ». 901.
- ID. e SPIRITO A. — « Fenomeni di accrescimento embrionale e larvale studiati nei trapianti tra Anuri e Urodeli ». 943.
- CROCCO L. — « Una nuova funzione di corrente per lo studio del moto rotazionale dei gas ». 64, 115.

D

- DAL PIAZ G. — « La struttura geologica delle Austridi. Nota II. Il sistema austroalpino a sud della finestra tettonica degli Alti Tauri ». 269.
- DE FAZI R. e PIRRONE F. — « Sulla costituzione chimica della coleslerina. XIII. Il 13-18-dimetil-9-13-ciclopentano-5-6-deidro-idrofenantrolo-3, della coleslerina ». 887.

- DESIO A. — « Nuove basi geologiche per la ricerca dei fosfati in Libia ». 205.
- DE VITO G. — Vedi PARISI E.
- DUNNING J. R., PEGRAM G. B., MITCHELL, G. A., FINK G. e SEGRÈ E. — « Sulla velocità dei neutroni lenti ». 340.
- DUNNING J. R. — Vedi RASETTI F.

E

- ENRIQUES F. — « La proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari e le curve infinitamente vicine ». 459.

F

- FAGIOLO E. — « Ricerche sugli espanti del pronefro negli Anfibi ». Nota II. 222.
- FANO G. — « Superficie algebriche e varietà a tre dimensioni a curve sezioni canoniche ». 813.
- FENOGLIO M. — « Sopra una vogesite del Ginepro (Isola d'Elba) ». 77.
- FIGURA V. — « Sul valore alimentare e nutritivo della ghianda, e sulla possibilità di utilizzarla nell'alimentazione umana ». 707.
- FINK G. — Vedi DUNNING J. R.
- ID. — Vedi RASETTI F.
- FINZI B. — « Rotazioni plastiche ». 676.
- ID. — « Dispersione di un vortice in un mezzo plastico ». 733.
- ID. — Vedi MAGGI G. A.
- FRANCINI-NALDI G. — Vedi BERLINGOZZI S.
- FROLA E. — « Su certi integrali capaci di risolvere il problema dinamico delle travi inflesse ». 739.
- ID. — « Sulla equazione $(C(x)y'(x))' = -\lambda M(x) \sin y(x)$; $y(0)=y(1)=0$ ». 744.

G

- GALAMINI A. — « Anafilassi alimentare in rapporto con la sezione del vago ». 371.
- ID. — « Contributo allo studio comparato dell'anafilassi ». 371, 529.

- GALAMINI A. — «Anafilassi alimentare e vagotomia sottodiaframmatica». 532.
- ID. — «Curva alcoolemica e beriberi sperimentale». 537, 623.
- ID. — «Decorso dell'attività cardiaca durante l'asfissia». 537, 626.
- ID. e SERIANNI E. — «Sulla sopravvivenza del "Bufo vulgaris" alla pneumotomia bilaterale». 537, 699.
- GALLI A. — «Le vibrazioni di un sistema elastico con vincoli inerti ed elastici». 506, 572.
- GHIZZETTI A. — «Determinazione delle curve limiti di un sistema continuo ∞^1 di curve piane omografiche». 261.
- GIALANELLA L. — «Il momento delle quantità di moto del sistema planetario e l'ipotesi cosmogonica di Laplace». 506, 598.
- ID. — «Osservazioni meridiane di Giove e Vesta nel 1935». 685, 762.
- ID. — «Osservazioni meridiane di Saturno, di Urano e della Luna nel 1935». 853.
- GIGANTE D. — Vedi CAGLIOTI V.
- GIORGI G. — «A proposito delle induttività elettrica e magnetica». 171.
- ID. — «Sui postulati della seconda relatività». 462, 824.
- ID. — «Metodo pel calcolo degli effetti di distorsione nelle linee telegrafiche e telefoniche». 823.
- GOIDANICH G. — «Intorno ad una "Phytophthora", causante un marciume del colletto nel pomodoro». 512.
- GROSSFELD H. — «Ricerche sulla permeabilità delle cellule dei tessuti coltivate "in vitro"». 904.
- ID. — «Scarica del protoplasma per sottrazione degli elettroliti dal mezzo ambiente in cellule di tessuti coltivate "in vitro"». 911, 948.
- GUARESCHI C. — «Esperienze coi raggi X e col radio sulla ninfosi degli Insetti». 219.
- GUARESCHI P. — «Sulla viscosità dei gas». 603.
- ID. — «Sulla viscosità dei liquidi». Nota II. 690.
- ID. — «Sul calcolo dei calori latenti di ebollizione». 783.

- GUGINO E. — «Deduzione unitaria delle equazioni dinamiche del Maggi e dell'Appel». 333, 406.
- ID. — «Sulle equazioni dinamiche di Eulero-Lagrange secondo G. Hamel». 333, 413.

J

- JODI C. — «Una formula di maggiorazione per un moto vibratorio forzato da azioni armoniche». 421.
- ID. — «Procedimenti per ricerche sperimentali su suoli elastici». 682.
- JOLLES E. — «Sopra i derivati azossicarbonici». 67.

K

- KRALL G. — «Sulle equazioni del moto vibratorio di un ponte percorso da carichi inerti e molleggiati». 61, 124.
- ID. — «Limiti per le vibrazioni di un ponte qualunque percorso da carichi mobili con velocità uniforme». 61, 129.
- ID. — «Vibrazioni indotte da carichi inerti e molleggiati in moto su di un ponte». 753.

L

- LAMPARIELLO G. — «Irrotazionalità asintotica di ogni corrente stazionaria di fluido perfetto soggetto a forze conservative». 41.
- ID. — «Un'applicazione del metodo delle immagini ai moti vorticosi». 426.
- ID. — «Su un teorema di statica del sig. van den Dungen». 685, 728.
- LANDRA G. — «Il tricocicloforo di Sergio Sergi e la sua prima applicazione». 802.
- LAPORTA M. e VACCA C. — «Saggi biologici e chimici sul prodotto di irradiazione con raggi ultravioletti dell'ormone follicolare». 212.
- LEVI G. R. e BARONI A. — «Studio del carbonio ottenuto per disidratazione di idrati di carbonio». 441.
- LUCCHI E. — Vedi BETTI M.

M

- MAGGI G. A. e FINZI B. — « Condizioni sulla fronte d'onda e onde elettromagnetiche armoniche ». 9.
- MAGGINI M. — « Sulle variazioni rapide di colore di alcune stelle ». 336.
- MANARINI M. — « Sulle omografie vettoriali con applicazioni cinematiche negli spazi S_n ». Nota I. « Sulle assiali e dilatazioni ». 496.
- ID. — « Sulle omografie vettoriali con applicazioni cinematiche negli spazi S_n ». Nota II. « Sulle omografie prodotto di due assiali ». 506, 580.
- ID. — « Sulle omografie vettoriali con applicazioni cinematiche negli spazi S_n ». Nota III. « Formula generale per la velocità di trascinamento e composizione di moti istantanei di rotazione ». 506, 657.
- MANIÀ B. — « Sopra un problema di navigazione di Zermelo ». 292.
- ID. — « Le equazioni delle estremanti nei problemi di Lagrange ». 398.
- MAROTTA L. — « Esperienze eseguite con apici radicali isolati ed allevati in cultura ». 515.
- MASOTTI A. — « Sui moti piani provocati da due vortici-sorgenti ». 133.
- ID. — « Vedi CISOTTI U. ».
- MATTIOLI G. D. — « Seconda forma delle equazioni della turbolenza nell'ipotesi di una direzione di trasporto ». 49.
- ID. — « Equazione energetica della turbolenza e condizioni d'integrazione delle equazioni indefinite ». 55.
- MAZZA L. — « Amplificazione galvanometrica mediante celle fotoelettriche differenziali ». 891.
- MESSERI A. — « Il cribo primario organizzatore del cambio secondario ». 83.
- MINETTI S. — « Sulle funzioni olomorfe ammettenti due valori eccezionali finiti sull'andamento di una funzione olomorfa in prossimità di un punto singolare essenziale isolato ». Nota I. 488.
- ID. — « Sulle funzioni olomorfe ammet-

tenti due valori eccezionali finiti e sull'andamento di una funzione olomorfa in prossimità di un punto singolare essenziale isolato ». Nota II. 657.

- MITCHELL G. A. — Vedi DUNNING J. R.
- MITOLO M. — « Fenomeni di ossido-riduzione e stati di attività funzionale del neurasse ». 371, 453.
- MOVAIS C. — « Sull'aberrazione sferica del 5° ordine dei sistemi centrali ». 871, 933.

N

- NATTA G. e BACCAREDDA M. — « Esame della cellulosa coi raggi di elettroni ». 444.
- NEBBIA G. — « Sul tracciamento dei profili di correnti liquide permanenti gradualmente varie ». 61.
- NEGODI G. — « Contributo alla cariologia del genere "Calendula L." ». 88.

O

- ODONE F. — « Sulla temperatura assoluta T, e sulle principali relazioni termodinamiche ». 865.
- ORRÙ A. — « Sulla velocità di accrescimento dell'uovo di gallina ». 911, 954.
- ID. — « Comportamento della conduttività elettrica dell'albume di uovo di gallina a temperature crescenti e decrescenti ». 959.

P

- PALAMÀ G. — « Su due nuove generalizzazioni del determinante di Vandermonde ». 28.
- ID. — « Di una generalizzazione delle formule di Newton e di Waring ». 496, 553.
- PARISI E. e DE VITO G. — « Contributo alla conoscenza della maturazione dei formaggi ». II. « Polipeptidi fosforati ». 149.
- PEGRAM G. B. — Vedi DUNNING J. R.
- ID. — Vedi RASETTI F.
- PENTA F. — « Carbon fossile nel meso-

zoico di Longobucco in Calabria ». 698, 794.

PERETTI G. — « Ossido-riduzioni nell'intestino tenue e nel fegato di ratto albino durante l'assorbimento intestinale ». 521.

PERRI T. — « Processi correlativi di determinazione e di accrescimento dell'abbozzo lentogeno negli Anfibi anuri. II. Esperienze su *Rana esculenta* ». 155.

ID. — Vedi COTRONEI G.

PICCARDI G. — « Sullo spettro dell'ossido di Praseodimio allo stato di vapore ». 358.

PIRRONE F. — Vedi DE FAZI R.

PISTOLESI E. — « Sul problema dell'ala rotante ». 506, 585.

PITOTTI M. — « La gastrulazione dell'uovo di Lampreda (*Lampetra fluviatilis* L.). Spostamenti dei materiali durante la gastrulazione ». 209.

PRINCIPI P. — « Intorno all'età di alcune formazioni dell'Appennino ». 449.

PUCCIANI L. — « Ancora sulle induttività e sui campi di forza ». 643.

PUNTONI V. — « Sui rapporti fra gli attinomiceti anaerobi tipo "Wolff-Israel" ed il "Bacterium bifidum" ». 274.

R

RANZI S. — « Ipofisi e gestazione nei Selaci ». 365.

RASETTI F., SEGRÈ E., FINK G., DUNNING J. R. e PEGRAM G. B. — « Sulla legge di assorbimento dei neutroni lenti ». 343.

RIZZO C. — « Sui movimenti dei teleostei in rapporto con lesioni sperimentali degli apparati periferici di moto e di senso ». IV. « Lesioni labirintiche ». 710.

ROVERETO G. — « Di una particolare "facies" continentale dell'Oligocene ligure ». 470.

RUSSO A. — « Natura chimica, incremento, reversibilità del condrioma ». 543.

S

SANSONE G. — « Limitazione dell'integrale $\int_{-1}^1 P_n(x) dx$ ». 296.

SAVELLI R. — « Osservazioni sui cloroplasti delle Cactacee ». 899.

ID. — « Leucosterinoplasto ». 951.

SBRANA F. — « Sopra un problema relativo alla propagazione lineare ». 849.

SCORZA DRAGONI G. — « Qualche teorema sulle curve di Jordan ». 181.

ID. — « Sulle traslazioni piane del Brouwer doppiamente periodiche ». 256.

ID. — « A proposito di un teorema di Caccioppoli sulla rappresentazione conforme delle superficie ». 196, 557.

SCORZA G. — « Nuovi contributi alla teoria generale delle algebre ». 823, 915.

SEGRE B. — « Sulle varietà di Veronese a due indici ». Nota I. 303.

ID. — « Sulle varietà di Veronese a due indici ». Nota II. 316, 391.

ID. — « Intorno alle ovali sghembe, e su di una estensione del teorema di Cavalieri-Lagrange alle funzioni di due variabili ». 654.

SEGRÈ E. — Vedi DUNNING, J. R.

ID. — Vedi RASETTI F.

SERIANNI E. — Vedi GALAMINI A.

SEVERI F. — « La teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche ». Nota I. 818.

ID. — « La teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche ». Nota II. 823, 921.

SOLER E. — « Lavori geofisici eseguiti dall'Istituto di Geodesia della Regia Università di Padova nella regione vesuviana nel 1934-35 ». 823.

SPIRITO A. — « Nuove esperienze sull'influenza della corrente elettrica continua sui meristemi radicali ». Nota II. 226.

ID. — « Studi di Biologia embrionale. — I. Il fenomeno dell'anaerobiosi studiato comparativamente nei Petromizoni e negli Anfibi anuri ». 907.

STELLA A. — « Caratteristiche dei giacimenti metalliferi italiani in rocce basiche ». 830.

T

- TAGLIACCOZZO C. — « Un'osservazione sulla Cinetostatica dei sistemi elastici ». 432.
- ID. — « Un teorema sulle coazioni elastiche ». 502.
- TEDESCHI G. — « Sull'ossidazione del nichel monovalente per azione dell'acqua in presenza di ioni CN- ». 894.
- TERRACINI A. — « Sulle varietà luoghi di ∞^1 spazi ». 186.
- TONELLI L. — « Su una proposizione fondamentale dell'Analisi matematica ». 161.
- TOSCANO L. — « Operatori permutabili di secondo ordine ». 309.
- ID. — « Sulle potenze di una matrice del secondo ordine ». 493.
- TRIA E. — « Attività enzimatica e tensione superficiale. — Azione di alcune sostanze tensioattive sulla lipasi pancreatica ». 372.
- ID. — « Relazioni tra temperatura ed attività del fermento glicogenolitico del fegato degli animali pecilotermi ». 911.
- TRICOMI F. — « “Densità” di un continuo di punti o di rette e “densità” di una corrispondenza ». 313.

U

- USIGLIO G. — « Una nuova interpretazione della propagazione nel secondo mezzo nella riflessione totale ». 191.
- ID. — « Su di una recente esperienza considerata come conferma ad una nuova interpretazione della rifrazione in condizioni di riflessione totale ». 345.

V

- VACCA C. — Vedi CARTENI A.

VENTURA M. — « Sopra alcuni dati embriologici di “*Sapium sebiferum*” (L.) Roxb. ». 91.

- VOLTERRA E. — « Questioni di elasticità vincolata. IV. Significato geometrico del vincolo ». 329.
- ID. — « Sugli archi elastici piani. I. Le equazioni differenziali delle deformazioni ». 437.
- ID. — « Sugli archi elastici piani. — II. Direttrice rettilinea ». 506, 591.
- ID. — « Sugli archi elastici piani. — III. Direttrice qualsiasi ». 597, 665.

W

- WICK G. C. — « Sull'annichilazione degli elettroni positivi ». 352.
- ID. — « Sulla diffusione dei neutroni lenti ». 695, 774.

Z

- ZAGAMI V. — « Sul comportamento del glicogeno del cuore per azione dell'insulina ». 524.
- ID. — « Sul comportamento dei corpi creatinici del solfo e del cloro urinari nel digiuno e nella rialimentazione ». 537, 629.
- ID. — « Ulteriori osservazioni sul comportamento dei corpi creatinici, del solfo, del fosforo e del cloro urinari nel digiuno e nella rialimentazione ». 641, 700.
- ID. e CAPRARO V. — « Ancora sul comportamento dei corpi creatinici, del solfo, del fosforo e del cloro urinari nel digiuno e nella rialimentazione ». 635.
- ZWIRNER G. — « Sulla integrazione, secondo Volterra di una matrice ». 723.

INDICE PER MATERIE

A

- Antropologia.** — « Il tricocicloforo di Sergio Sergi e la sua prima applicazione ». LANDRA G. 802.
- Astronomia.** — « Altezza della cromosfera nel 1935 ed andamento del ciclo solare ». ABETTI G. 463.
- « L'eccentricità dei sistemi binari nel caso di masse variabili col tempo ». ARMELLINI G. 165.
- « Un'erronea obiezione contro l'ipotesi cosmogonica di Laplace ». Id. 277.
- « Sullo sviluppo delle orbite dei sistemi binari ». BEMPORAD G. 850.
- « Larghezze equivalenti e intensità centrali delle righe di assorbimento nello spettro del Sole al centro e ai lembi ». CASTELLI I. 769.
- « Il momento delle quantità di moto del sistema planetario e l'ipotesi cosmogonica di Laplace ». GIALANELLA L. 506, 598.
- « Osservazioni meridiane di Giove e Vesta nel 1935 ». Id. 685, 762.
- « Osservazioni meridiane di Saturno, di Urano e della Luna nel 1935 ». Id. 853.
- « Sulle variazioni rapide di colore di alcune stelle ». MAGGINI M. 336.

B

- Biologia.** — « Influenza della regione cefalica sul movimento e sulla sensibilità delle Planarie tricladi ». BENAZZI M. 152.
- « Razze fisiologiche di "Euplanaria gonocéphala" differenziate dalla diversa attitudine alla scissiparità ». Id. 361.
- Biologia.** — « Ulteriori ricerche sulle compatibilità ed incompatibilità embrionali negli Anfibi studiate col metodo degli espianti ». COTRONEI G. e PERRI T. 901.
- « Fenomeni di accrescimento embrionale e larvale studiati nei trapianti tra Anuri e Urodèli ». COTRONEI G. e SPIRITO A. 943.
- « Ricerche sugli espianti del pronefro negli Anfibi ». Nota II. FAGIOLO E. 222.
- « Intorno ad una "Phytophthora" causante un marciume del colletto nel pomodoro ». GOIDÀNICH G. 512.
- « Ricerche sulla permeabilità delle cellule dei tessuti coltivate "in vitro" ». GROSSFELD H. 904.
- « Scarica del protoplasma per sottrazione degli elettroliti dal mezzo ambiente in cellule di tessuti coltivate "in vitro" ». Id. 911, 948.
- « Esperienze coi raggi X e col radio sulla ninfosi degli Insetti ». GUARESCHI C. 219.
- « Esperienze eseguite con apici radicali isolati ed allevati in cultura ». MARROTTA L. 515.
- « Processi correlativi di determinazione e di accrescimento dell'abbozzo lentogeno negli Anfibi anuri. — II. Esperienze su *Rana esculenta* ». PERRI T. 155.
- « Sui rapporti fra gli attinomiceti anaerobi tipo "Wolff-Israel" ed il "Bacterium bifidum" ». PUNTONI V. 274.
- « Ipofisi e gestazione nei Selaci ». RANZI S. 365.
- « Natura chimica, incremento, reversibilità del condrioma ». RUSSO A. 543.

Biologia. — « Nuove esperienze sull'influenza della corrente elettrica continua sui meristemi radicali ». Nota II. SPIRITO A. 226.

— « Studi di Biologia embrionale. — I. Il fenomeno dell'anaerobiosi studiato comparativamente nei Petromizonti e negli Anfibi anuri ». SPIRITO A. 907.

Biologia vegetale. — « Contributo alla cariologia del genere "Calendula" (L.) ». NEGODI G. 88.

— « Sopra alcuni dati embriologici di "Sapium sebiferum" (L.) Roxb. ». VENTURA M. 91.

Botanica. — « Il cribro primario organizzatore del cambio secondario ». MESSERI A. 83.

— « Osservazioni sui cloroplasti delle Cactacee ». SAVELLI R. 899.

C

Chimica. — « Solfuro, seleniuro e solfo-seleniuro di solfocianogeno ». BARONI A. 139.

— « Sui cloruri di solfocianogeno ». ID. 871.

— « Ossidabilità e struttura di alcuni neri-fumi industriali ». ID. 899, 940.

— « Ricerche sugli aminoacidi rotatori ». BERLINGOZZI S. e FRANCINI-NALDI G. 874.

— « Anomalie nella costante di dissociazione di alcuni acidi organici alogenati ». BETTLM. e LUCCHI E. 465.

— « Sulla decomposizione termica delle NH₄-argille ». BOTTINI O. 142.

— « Contributo alla conoscenza biochimica delle ossa durante lo sviluppo ». CAGLIOTTI V. e GIGANTE D. 878.

— « Idratazione e struttura dell'amido ». CENTOLA G. 617.

— « Struttura dell'acetilcellulosa solubile in acetone o "cellite" ». ID. 788.

— « Relazioni fra struttura e proprietà meccaniche di pellicole e fili di acetilcellulosa ». ID. 881.

— « Sulla costituzione chimica della colesterina — XIII. Il 13-18-dimetil-9-13-ciclopentano-5-6-deidro-idrofe-

nantrolo-3, della colesterina ». DE FAZI R. e PIRRONI F. 887.

Chimica. — « Sopra i derivati azos-sicarbonici ». JOLLES E. 67.

— « Studio del carbonio ottenuto per disidratazione di idrati di carbonio ». LEVI G. R. e BARONI A. 441.

— « Esame della cellulosa coi raggi di elettroni ». NATTA G. e BACCAREDDA M. 444.

— « Contributo alla conoscenza della maturazione dei formaggi. — II. Polipeptidi fosforati ». PARISI E. e DE VITO G. 149.

— « Sullo spettro dell'ossido di Praseodimio allo stato di vapore ». PICCARDI G. 358.

Chimica-Biologica. — « Sul metabolismo glucidico della ghiandola mammaria "in vitro" ». ANTONIANI C. e SPIGA CLERICI A. 73.

— « Variazioni dell'escrezione dell'allantoina nel ratto, in rapporto a diete chetogene e antichetogene ». BERGAMI G., BAER P. e BOERI E. 198.

Chimica-Fisica. — « La colorimetria durante il periodo dello sviluppo del colore ». ID. ID. ID. 511, 610.

— « Amplificazione galvanometrica mediante celle fotoelettriche differenziali ». MAZZA L. 891.

— « Sull'ossidazione del nichel monovalente per azione dell'acqua in presenza di ioni CN — ». TEDESCHI G. 894.

— « Leucosterinoplasto ». ID. 951.

Commemorazioni. — 230.

Comunicazioni varie. — 381, 912.

F

Fisica. — « Una registrazione a valvole per coincidenze fra contatori a moltiplicazione ». BERNARDINI G. e BOC-CIARELLI O. 265.

— « La ricerca del potere risolutivo dei materiali sensibili fotografici con un nuovo tipo di interferometro ». BRUSCAGLIONI R. 511, 686.

— « Sulla velocità dei neutroni lenti ». DUNNING J. R., PEGRAM G. B., MIT-

CHELL G. A., FINK G. e SEGRÈ E.
340.

Fisica. — « A proposito delle induttività elettrica e magnetica ». GIORGI G. 171.

— « Sulla viscosità dei gas ». GUARESCHI P. 603.

— « Sulla viscosità dei liquidi ». Nota II. ID. 690.

— « Sul calcolo dei calori latenti di ebollizione ». ID. 783.

— « Sull'aberrazione sferica del 5° ordine dei sistemi centrali ». MORAIS C. 871, 933.

— « Sulla temperatura assoluta T, e sulle principali relazioni termodinamiche ». Odone F. 865.

— « Ancora sulle induttività e su i campi di forza ». PUCCIANI L. 643.

— « Sulla legge di assorbimento dei neutroni lenti ». RASETTI F., SEGRÈ E., FINK G., DUNNING J. R. e PEGRAM G. B. 343.

— « Una nuova interpretazione della propagazione nel secondo mezzo nella riflessione totale ». USIGLIO G. 191.

— « Su di una recente esperienza considerata come conferma ad una nuova interpretazione della rifrazione in condizioni di riflessione totale ». ID. 345.

— « Sull'annichilazione degli elettroni positivi ». WICK G. C. 352.

— « Sulla diffusione dei neutroni lenti ». ID. 695, 774.

Fisiologia. — « Liberazione di una sostanza acetilcolinico-simile dalla superficie di taglio del nervo durante l'eccitamento fisiologico ». BERGAMI G. 518.

— « Sulla cristallizzazione della carbossiemoglobina del sangue essiccato di varie specie animali, e su una particolare regola di applicazione medico-legale ». BIOCCA E. 368.

— « Composizione chimica e valore energetico di diete consumate in due Colonie Marine ». CARTENI A. e VACCA C. 216.

— « Sul valore alimentare e nutritivo della ghianda e sulla possibilità di

utilizzarla nell'alimentazione umana.

FIGURA V. 707.

Fisiologia. — « Anafilassi alimentare in rapporto con la sezione del vago ». GALAMINI A. 371.

— « Contributo allo studio comparato dell'anafilassi ». ID. 371, 529.

— « Anafilassi alimentare e vagotomia sottodiaframmatica ». ID. 532.

— « Curva alcoolemica e beriberi sperimentale ». ID. 537, 623.

— « Decorso dell'attività cardiaca durante l'asfissia ». ID. 537, 626.

— « Sulla sopravvivenza del "Bufo vulgaris" alla pneumotomia bilaterale ». GALAMINI A. e SERIANNI E. 537, 699.

— « Saggi biologici e chimici sul prodotto di irradiazione con raggi ultravioletti dell'ormone follicolare ». LAPORTA M. e VACCA C. 212.

— « Fenomeni di ossido-riduzione e stati di attività funzionale del neurasse ». MITOLO M. 371, 453.

— « Sulla velocità di accrescimento dell'uovo di gallina ». ORRÙ A. 911, 954.

— « Comportamento della conduttività elettrica dell'albume di uovo di gallina a temperature crescenti e decrescenti ». ID. 959.

— « Ossido-riduzioni nell'intestino tenue e nel fegato di ratto albino durante l'assorbimento intestinale ». PERETTI G. 521.

— « Relazioni tra temperatura ed attività del fermento glicogenolitico del fegato degli animali pecilotermi ». TRIA E. 911.

— « Sul comportamento del glicogeno del cuore per azione dell'insulina ». ZAGAMI V. 524.

— « Sul comportamento dei corpi creatinici del solfo e del cloro urinari nel digiuno e nella rialimentazione ». ID. 537, 629.

— « Ulteriori osservazioni sul comportamento dei corpi creatinici, del solfo, del fosforo e del cloro urinari nel digiuno e nella rialimentazione ». ID. 641, 700.

— « Ancora sul comportamento dei corpi creatinici, del solfo, del fosforo e del

cloro urinarii nel digiuno e nella rialimentazione». ZAGAMI V. e CAPRARO V. 635.

Fisiologia generale. — «Attività enzimatica e tensione superficiale. — Azione di alcune sostanze tensioattive sulla lipasi pancreatica». TRIA E. 372.

Fisiopatologia. — «Sui movimenti dei teleostei in rapporto con lesioni sperimentali degli apparati periferici di moto e di senso. — IV. Lesioni labirintiche». RIZZO C. 710.

C

Geofisica. — «Confronto delle profondità ipocentrali di due recenti terremoti consimili». AGAMENNONE G. 859.

— «Due nuovi tipi di onde sismiche alla luce di una teoria del Somigliana». CALOI P. 507.

— «Relazioni tra la temperatura invernale e la temperatura estiva a Roma». CONTI G. 333.

— «Lavori geofisici eseguiti dall'Istituto di Geodesia della R. Università di Padova nella regione vesuviana nel 1934-35». SOLER E. 823.

Geologia. — «Una spiaggia pleistocenica a "Strombus bubonius" presso Palidoro (Roma)». BLANC A. C. 200.

— «Giacimento sottomarino a "Ciprina islandica, L." nel golfo di Terranova Pausania (Sardegna)». ID. 695.

— «Su di una Echinofauna pliocenica dei dintorni di Lentini (provincia di Siracusa)». CHECCHIA-RISPOLI G. 383.

— «La struttura geologica delle Austridi. Nota II. Il sistema austroalpino a sud della finestra tettonica degli Alti Tauri». DAL PIAZ G. 269.

— «Nuove basi geologiche per la ricerca dei fosfati in Libia». DESIO A. 205.

— «Intorno all'età di alcune formazioni dell'Appennino». PRINCIPI P. 449.

— «Di una particolare "facies" continentale dell'Oligocene ligure». ROVERETO G. 470.

I

Idraulica. — «Sul tracciamento dei profili di correnti liquide permanenti gradualmente varie». NEBBIA G. 61.

M

Matematica. — «Funzioni di composizione di 2^a specie, funzioni di matrici infinite». ANDREOLI G. 281.

— «Nuova espressione per la curvatura totale di una superficie». ANDRUETTO G. 95.

— «Sulle linee ed ipersuperficie geodeticamente parallele». ID. 99.

— «Sulla iterazione di una classe di funzioni». BARBA G. 473.

— «Cinematica integrale». BLASCHKE W. 495, 546.

— «Un contributo alla Cinematica Integrale». ID. 657, 721.

— «Sulla normalizzazione delle equazioni differenziali lineari». BOMPIANI E. 807.

— «Trasporti non lineari: geometria di un sistema di equazioni alle derivate parziali del 2° ordine. I. Preliminari». BORTOLOTTI E. 16.

— «Trasporti non lineari: geometria di un sistema di equazioni alle derivate parziali del 2° ordine. II. Le proprietà intrinseche del sistema». ID. 35, 104.

— «Trasporti non lineari: geometria di un sistema di equazioni alle derivate parziali del 2° ordine. III. Altri operatori differenziali intrinseci». «Le proprietà descrittive del sistema». ID. 35, 175.

— «Funzioni determinanti e polinomi di Laguerre». BROGGI U. 111.

— «Sulle funzioni determinanti». ID. 316, 386.

— «Sulla rappresentazione conforme delle superficie». CACCIOPPOLI R. 287.

— «Un'osservazione sui plurigeneri delle superficie ellittiche di genere $p_g = 0$. CAMPEDELLI L. 495, 548.

— «Sulle funzioni di una variabile bi-

duale totalmente derivabili ». CARBONARO C. 839.

Matematica. — « Sulla riduzione delle matrici a forma canonica ». Nota I. CHERUBINO S. 478.

— « Sulla riduzione delle matrici a forma canonica ». Nota II. ID. 496, 647.

— « Sulle radici caratteristiche delle funzioni olomorfe di matrici ». ID. 846.

— « Sulla curva di diramazione dei piani multipli ». CHISINI O. 22.

— « Sopra le equazioni funzionali non lineari nel campo analitico ». CINQUINI S. 483.

— « La proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari e le curve infinitamente vicine ». ENRIQUES F. 459.

— « Superficie algebriche e varietà a tre dimensioni a curve sezioni canoniche ». FANO G. 813.

— « Determinazione delle curve limiti di un sistema continuo ∞^1 di curve piane omografiche ». GHIZZETTI A. 261.

— « Sopra un problema di navigazione di Zermelo ». MANIÀ B. 292.

— « Le equazioni delle estremanti nei problemi di Lagrange ». ID. 398.

— « Sulle funzioni olomorfe ammettenti due valori eccezionali finiti sull'andamento di una funzione olomorfa in prossimità di un punto singolare essenziale isolato ». Nota I. MINETTI S. 488.

— « Sulle funzioni olomorfe ammettenti due valori eccezionali finiti e sullo andamento di una funzione olomorfa in prossimità di un punto singolare essenziale isolato ». Nota II. ID. 657.

— « Su due nuove generalizzazioni del determinante di Vandermonde ». PALAMÀ G. 28.

— « Di una generalizzazione delle formule di Newton e di Waring ». ID. 496, 553.

— « Limitazione dell'integrale $\int_0^1 |P_n(x)|^m dx$. SANSONE G. 296.

— « Sopra un problema relativo alla propagazione lineare ». SBRANA F. 849.

Matematica. — « Qualche teorema sulle curve di Jordan ». SCORZA DRAGONI G. 181.

— « Sulle traslazioni piane del Brouwer doppiamente periodiche ». ID. 256.

— « A proposito di un teorema di Caccioppoli sulla rappresentazione conforme delle superficie ». ID. 196, 557.

— « Nuovi contributi alla teoria generale delle algebre ». SCORZA G. 823, 915.

— « Sulle varietà di Veronese a due indici ». Nota I. SEGRE B. 303.

— « Sulle varietà di Veronese a due indici ». Nota II. ID. 316, 391.

— « Intorno alle ovali sghembe, e su di una estensione del teorema di Cavalieri-Lagrange alle funzioni di due variabili ». ID. 654.

— « La teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche ». Nota I. SEVERI F. 818.

— « La teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche ». Nota II. ID. 823, 921.

— « Sulle varietà luoghi di ∞^1 spazi ». TERRACINI A. 186.

— « Su una proposizione fondamentale dell'Analisi matematica ». TONELLI L. 161.

— « Operatori permutabili di secondo ordine ». TOSCANO L. 309.

— « Sulle potenze di una matrice del secondo ordine ». ID. 493.

— « "Densità" di un continuo di punti o di rette e "densità" di una corrispondenza ». TRICOMI F. 313.

— « Sulla integrazione, secondo Volterra di una matrice ». ZWIRNER G. 723.

Meccanica. — « Moto generato da una sorgente liquida piana addossata a un profilo rigido rettilineo con formazione di vortici ». AGOSTINELLI C. 317.

— « Sul vortice elicoidale ». ID. 670.

— « Effetto di tremolio nelle ali ». ANDREOLI G. 506, 566.

— « Sul problema dell'impulso nei corpi elastici isotropi ». ARRIGHI G. 925.

— « Sulla variazione di spinta di un liquido pesante in equilibrio ». ID. 929.

Meccanica. — « Vortice libero regolizzatore nel problema della lamina ». CALDONAZZO B. 36.

- « Sopra un problema idrodinamico relativo ad un arco di circonferenza ». ID. 322.
- « Effetti di zavorra dovuti a una doppietta ». CISOTTI U. 253.
- « Effetti di zavorra nello spazio ». ID. e MASOTTI A. 3.
- « Una nuova funzione di corrente per lo studio del moto rotazionale dei gas ». CROCCO L. 61, 115.
- « Rotazioni plastiche ». FINZI B. 676.
- « Dispersione di un vortice in un mezzo plastico ». ID. 733.
- « Su certi integrali capaci di risolvere il problema dinamico delle travi inflesse ». FROLA E. 739.
- « Sulla equazione: $(C(x)y'(x))' = -\lambda M(x) \sin y(x); y(0) = y(1) = 0$ ». ID. 744.
- « Le vibrazioni di un sistema elastico con vincoli inerti ed elastici ». GALLI A. 506, 572.
- « Sui postulati della seconda relatività ». GIORGI G. 462, 824.
- « Metodo pel calcolo degli effetti di distorsione nelle linee telegrafiche e telefoniche ». ID. 823.
- « Deduzione unitaria delle equazioni dinamiche del Maggi e dell'Appel ». GUGINO E. 333, 406.
- « Sulle equazioni dinamiche di Eulero-Lagrange secondo G. Hamel ». ID. 333, 413.
- « Una formula di maggiorazione per un moto vibratorio forzato da azioni armoniche ». JODI C. 421.
- « Procedimenti per ricerche sperimentali su suoli elastici ». ID. 682.
- « Sulle equazioni del moto vibratorio di un ponte percorso da carichi inerti e molleggiati ». KRALL G. 61, 124.
- « Limiti per le vibrazioni di un ponte qualunque percorso da carichi mobili con velocità uniforme ». ID. 61, 129.
- « Vibrazioni indotte da carichi inerti e molleggiati in moto su di un ponte ». ID. 753.

Meccanica. — « Irrotazionalità asintotica di ogni corrente stazionaria di fluido perfetto soggetto a forze conservative ». LAMPARIELLO G. 41.

- « Un'applicazione del metodo delle immagini ai moti vorticosi ». ID. 426.
- « Su un teorema di statica del sig. van den Dungen ». ID. 685, 728.
- « Condizioni sulla fronte d'onda e onde elettromagnetiche armoniche ». MAGGI G. A. e FINZI B. 9.
- « Sulle omografie vettoriali con applicazioni cinematiche negli spazi S_n ». Nota I. Sulle assiali e dilatazioni ». MANARINI M. 496.
- « Sulle omografie vettoriali con applicazioni cinematiche negli spazi S_n ». Nota II. Sulle omografie prodotto di due assiali ». ID. 506, 580.
- « Sulle omografie vettoriali con applicazioni cinematiche negli spazi S_n ». Nota III. Formula generale per la velocità di trascinamento e composizione di moti istantanei di rotazione ». ID. 506, 657.
- « Sui moti piani provocati da due vortici-sorgenti ». MASOTTI A. 133.
- « Seconda forma delle equazioni della turbolenza nell'ipotesi di una direzione di trasporto ». MATTIOLI G. D. 49.
- « Equazione energetica della turbolenza e condizioni d'integrazione delle equazioni indefinite ». ID. 55.
- « Sul problema dell'ala rotante ». PI-STOLESI. E. 506, 585.
- « Un'osservazione sulla Cinetostatica dei sistemi elastici ». TAGLIACOZZO C. 432.
- « Un teorema sulle coazioni elastiche ». ID. 502.
- « Questioni di elasticità vincolata. IV. Significato geometrico del vincolo ». VOLTERRA E. 329.
- « Sugli archi elastici piani. — I. Le equazioni differenziali delle deformazioni ». ID. 437.
- « Sugli archi elastici piani. — II. Direttrice rettilinea ». ID. 506, 591.
- « Sugli archi elastici piani. — III. Direttrice qualsiasi ». ID. 597, 665.

- Mineralogia.** — « Carbon fossile nel mesozoico di Longobucco in Calabria ». PENTA F. 698, 794.
— « Caratteristiche dei giacimenti metalliferi italiani in rocce basiche ». STELLA A. 830.

O

- Opere pervenute in dono all'Accademia.** — 94, 251, 382, 582, 715, 913.

P

- Paleontologia.** — « Sulla presenza di "Equus hydruntinus" nelle ghiaie quaternarie dell'Aniene ». BLANC G. A. 827.
Patologia. — « Contributo alla conoscenza della fine struttura della fibra muscolare striata in condizioni normali e patologiche. — Nota III. I processi regressivi dei componenti la striatura trasversale ». BASILE A. 534.

- Petrografia.** — « Sopra una vogesite del Ginepro (Isola d'Elba) ». FENOGILIO M. 77.

- Personale Accademico.** — 250, 381, 714.

- Presentazione di libri.** — 93, 250, 381, 538, 714, 912.

- Presentazione di Note e Memorie.** — 93, 250, 381, 540, 714, 912.

- Presentazione di plichi suggellati.** — 93.

R

- Relazioni di Commissioni.** — 250, 381, 540, 714.

Z

- Zoologia.** — « La gastrulazione dell'uovo di Lampreda (*Lampetra fluviatilis* L.). Spostamenti dei materiali durante la gastrulazione ». PITOTTI M. 209.

